Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 23 (1949)

Artikel: Über Wertverteilung gebrochener rationaler Funktionen.

Autor: Nagy, Gyula v. S v.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19765

Über Wertverteilung gebrochener rationaler Funktionen

Von Gyula v. Sz. Nagy, Szeged (Ungarn)

1. Die nicht reduzierbare rationale Funktion

$$F(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n} \tag{1}$$

ist vom n-ten Grad, wenn $|a_0| + |b_0| \neq 0$ ist. Der Punkt z_0 ist eine Z-Stelle bzw. ein Pol der Funktion $F(z)$, je nachdem $F(z_0) = Z$ bzw. $F(z_0) = \infty$ ist.

Diese Arbeit beschäftigt sich um die Lage der Z-Stellen der Funktion (1) bezüglich ihrer Nullstellen und Pole und verallgemeinert einige Sätze von mir über Polynome[1]). So beweise ich die Sätze:

I. *Bezeichnet α bzw. β eine (endliche) Nullstelle bzw. einen (endlichen) Pol der rationalen Funktion $F(z)$ n-ten Grades*

$$F(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$$

und sind

$$C = \frac{f(\beta)}{g(\alpha)} \qquad \text{und} \qquad |Z| < |C| \,, \tag{2}$$

so besitzt die Funktion $F(z)$ mindestens eine Z-Stelle im Innern des Kreises

$$\left|\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right| \doteq \left|\frac{Z}{C}\right|^{\frac{1}{n}} = t\,(<1) \tag{3}$$

oder sämtliche Z-Stellen auf diesem Kreis.

---

[1]) *Gy. Sz. Nagy,* Über die Lage der A-Stellen eines Polynoms bezüglich seiner Nullstellen, Acta Scientiarum Math. Szeged **11** (1947), S. 147—151.

Andere Ergebnisse über Wertverteilung gebrochener rationaler Funktionen befinden sich in den Arbeiten:

M. Fekete, Über Wertverteilung bei rationalen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, Acta Scient. Math. Szeged **4** (1929), S. 234—243.

Gy. Sz. Nagy, Über den Wertvorrat gebrochener rationaler Funktionen in Kreisbereichen, Hungarica Acta Math. **1**, Nr. 3 (1948), S. 1—13.

Dasselbe gilt im Falle $|Z| > |C|$ *für die Z-Stellen von* $F(z)$ *im Kreise*

$$\left|\frac{z-\beta}{z-\alpha}\right| \leqq \left|\frac{C}{Z}\right|^{\frac{1}{n}} .$$

II. *Ist*

$$0 < \omega = \left|\operatorname{arc}\frac{-Z}{C}\right| = \left|\operatorname{arc}\frac{-Z\cdot g(\alpha)}{f(\beta)}\right| \leqq \pi , \tag{4}$$

so enthält das Kreiszweieck $K\left(\alpha, \beta; \frac{\omega}{n}\right)$, *von dessen Punkten aus die Strecke* (α, β) *unter je einem Winkel* $\geqq \frac{\omega}{n}$ *erscheint, mindestens eine Z-Stelle der Funktion* $F(z)$ *im Innern oder jede Z-Stelle von* $F(z)$ *am Rande.*

Die Z-Stellen der rationalen Funktion $F(z)$ sind Nullstellen des Polynoms

$$\varphi(z) = f(z) - Zg(z) = \sum_{k=0}^{n} (a_k - Zb_k) z^{n-k} = (a_0 - Zb_0) \prod_{k=1}^{n} (z - z_k) . \tag{5}$$

Im Falle $a_0 - Zb_0 = 0$ hat das Polynom $\varphi(z)$ die Form

$$\varphi(z) = (a_p - Zb_p) \prod_{k=1}^{n-p} (z - z_k) , \quad a_p - Zb_p \neq 0 ,$$

$$a_k - Zb_k = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, p-1; p < n) .$$

Dann ist $z_n = z_{n-1} = \cdots = z_{n-p+1} = \infty$ eine (p-fache) Z-Stelle von $F(z)$. Daraus folgt die Gleichung

$$-\frac{Z}{C} = \prod_{k=1}^{n} \frac{z_k - \alpha}{z_k - \beta} , \tag{6}$$

weil

$$\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(\beta)} = \frac{-Zg(\alpha)}{f(\beta)} = -\frac{Z}{C} = \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha - z_k}{\beta - z_k} = \prod_{k=1}^{n} \frac{z_k - \alpha}{z_k - \beta}$$

ist und weil im Falle $p > 0$, also im Falle $z_n = z_{n-1} = \cdots = z_{n-p+1} = \infty$,

$$\frac{z_k - \alpha}{z_k - \beta} = 1 , \quad (k = n, n-1, \ldots, n-p+1)$$

sind.

Liegt keine Z-Stelle von $F(z)$ im Innern des Kreises (3), so sind

$$\left|\frac{z_k - \alpha}{z_k - \beta}\right| \geqq t \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad \text{und} \qquad \prod_{k=1}^{n} \left|\frac{z_k - \alpha}{z_k - \beta}\right| = \left|\frac{Z}{C}\right| = t^n ,$$

Diese Relationen bestehen zugleich nur dann, wenn die Ungleichungen mit lauter Gleichungszeichen gelten. Damit ist der Satz I bewiesen, weil sein zweiter Absatz aus dem ersten folgt, wenn man die Funktion $F(z)$ durch ihre Reziproke ersetzt.

Enthält das Kreiszweieck $K\left(\alpha, \beta; \frac{\omega}{n}\right)$ keine Z-Stelle ($Z \neq 0, \infty$) von $F(z)$ im Innern, so bestehen die Ungleichungen

$$\left|\operatorname{arc}\frac{z_k - \alpha}{z_k - \beta}\right| \leqq \frac{\omega}{n} = \frac{1}{n}\left|\operatorname{arc}\frac{-Z}{C}\right| \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)\ . \tag{7}$$

Diese Ungleichungen und die aus (6) folgende Ungleichung

$$\omega = \left|\operatorname{arc}\frac{-Z}{C}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\operatorname{arc}\frac{z_k - \alpha}{z_k - \beta}\right| \leqq \sum_{k=1}^{n}\left|\operatorname{arc}\frac{z_k - \alpha}{z_k - \beta}\right|$$

enthalten nur dann keinen Widerspruch, wenn jede Ungleichung (7) mit Gleichungszeichen besteht. Damit ist der Satz II bewiesen.

2. Sind die Nullstellen der Polynome $f(z)$ und $g(z)$ bekannt, so gelten die Sätze:

III. *Sind*

$$F(z) = \prod_{k=1}^{n}\frac{z - \alpha_k}{z - \beta_k}\ , \qquad 0 < t < 1\ , \qquad t^n = |U| = \frac{1}{|V|}\ , \tag{8}$$

so enthält die Gesamtheit der n Kreisscheiben

$$\left|\frac{z - \alpha_k}{z - \beta_k}\right| \leqq t \qquad \text{bzw.} \qquad \left|\frac{z - \beta_k}{z - \alpha_k}\right| \leqq t \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{9}$$

jede U-Stelle bzw. jede V-Stelle der rationalen Funktion $F(z)$ von (8).

IV. *Ist*

$$0 < \omega = |\operatorname{arc} W| \leqq \pi\ , \tag{10}$$

so enthält die Gesamtheit der n Kreiszweiecke $K\left(\alpha_k, \beta_k; \frac{\omega}{n}\right)$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) *jede W-Stelle der Funktion $F(z)$ von* (8).

Die Annahme, daß eine U-Stelle u bzw. eine V-Stelle v der Funktion $F(z)$ außerhalb jeder Kreisscheibe der ersten bzw. zweiten Gesamtheit von (9) liegt, führt zu einem Widerspruch. Aus (8) und aus den Ungleichungen

$$\left|\frac{u - \alpha_k}{u - \beta_k}\right| > t \qquad \text{bzw.} \qquad \left|\frac{v - \alpha_k}{v - \beta_k}\right| < t^{-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

folgt nämlich die falsche Ungleichung

$$t^n = |U| = |F(u)| = \prod_{k=1}^{n} \left| \frac{u-\alpha_k}{u-\beta_k} \right| > t^n$$

$$\text{bzw.} \qquad t^{-n} = |V| = |F(v)| = \prod_{k=1}^{n} \left| \frac{v-\alpha_k}{v-\beta_k} \right| < t^{-n} \; .$$

Ähnlicherweise führt die Annahme, daß $F(z)$ eine W-Stelle w außerhalb jedes Kreiszweieckes $K\left(\alpha_k, \beta_k; \frac{\omega}{n}\right)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ besitzt, zu einem Widerspruch. Wären nämlich

$$\left| \operatorname{arc} \frac{w-\alpha_k}{w-\beta_k} \right| < \frac{\omega}{n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

so wären

$$\omega = |\operatorname{arc} F(w)| = \left| \sum_{k=1}^{n} \operatorname{arc} \frac{w-\alpha_k}{w-\beta_k} \right| \leqq \sum_{k=1}^{n} \left| \operatorname{arc} \frac{w-\alpha_k}{w-\beta_k} \right| < \omega \; .$$

Damit sind die Sätze III und IV bewiesen.

3. Bezeichnet B einen konvexen Bereich der komplexen z-Ebene und ist $0<t<1$ bzw. $0<\vartheta\leqq\pi$, so hat der Bereich $B(t)$ bzw. $K(B;\vartheta)$ die Eigenschaft:

Sind α und β zwei beliebige Punkte von B, so enthält B die Kreisscheiben

$$\left| \frac{z-\alpha}{z-\beta} \right| \leqq t \quad \text{und} \quad \left| \frac{z-\beta}{z-\alpha} \right| \leqq t \; .$$

Von einem beliebigen Punkte des Bereiches $K(B;\vartheta)$ aus erscheint der konvexe Bereich B unter einem Winkel $\geqq \vartheta$.

Bedeutet B die Kreisscheibe $|z-\zeta| \leqq r$, so ist $K(B;\vartheta)$ bzw. $B(t)$ die Kreisscheibe $|z-\zeta| \leqq r \operatorname{cosec} \frac{\vartheta}{2}$ bzw.

$$|z-\zeta| \leqq r\,(1+t)\,(1-t)^{-1}.$$

Die erste Behauptung ist klar, auch die zweite läßt sich leicht einsehen. Sind nämlich $|\alpha-\zeta| \leqq r$, $|\beta-\zeta| \leqq r$ und

$$\left| \frac{z-\alpha}{z-\beta} \right| = t_1 \leqq t \,, \quad \text{also} \quad \frac{z-\alpha}{z-\beta} = t_1 e^{i\varphi} \,, \quad \text{d. h.} \quad z = \frac{\alpha - \beta t_1 e^{i\varphi}}{1 - t e^{i\varphi}} \,,$$

so ist

$$|z-\zeta| = \left| \frac{(\alpha-\zeta)-(\beta-\zeta)\,t_1 e^{i\varphi}}{1-t_1 e^{i\varphi}} \right| \leqq \frac{|\alpha-\zeta| + |\beta-\zeta|\,t_1}{1-t_1}$$

$$\leqq \frac{r+rt}{1-t} = r\,\frac{1+t}{1-t} \; .$$

Aus den Sätzen III und IV folgt also der Satz

V. *Enthält der konvexe Bereich B jede Nullstelle und jeden Pol der rationalen Funktion $F(z)$ n-ten Grades von der Form*

$$F(z) = \frac{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}{z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n} \tag{11}$$

und sind $|U| = |V|^{-1} = t^n < 1$ *bzw.* $0 < |\operatorname{arc} W| = \omega \leqq \pi$, *so enthält der Bereich* $B(t)$ *bzw.* $K\left(B; \frac{\omega}{n}\right)$ *jede U-Stelle, jede V-Stelle bzw. jede W-Stelle der Funktion* $F(z)$.

Bedeutet B die Kreisscheibe $|z - \zeta| \leqq r$, *so ist* $B(t)$ *bzw.* $K\left(B; \frac{\omega}{n}\right)$ *die Kreisscheibe* $|z - \zeta| \leqq r(1 + t)(1 - t)^{-1}$ *bzw.* $|z - \zeta| = r \operatorname{cosec} \frac{\omega}{2n}$.

Dieser Satz läßt sich auch in der Form ausdrücken:

VI. *Bezeichnet T die durch die Gleichung*

$$Z = F(z) \tag{12}$$

bestimmte konforme Abbildung der komplexen Z-Ebene auf die z-Ebene, wo die rationale Funktion $F(z)$ die Form (11) *besitzt, so hat T die Eigenschaften:*

Liegen die Nullstellen und die Pole von $F(z)$ in einem konvexen Bereich B, so enthält der Bereich $B(t)$ $(0 < t < 1)$ *bzw.* $K\left(B; \frac{\omega}{n}\right)$ $(0 < \omega \leqq \pi)$ *die Abbildung beider Kreisbereiche der Z-Ebene* $|Z| \leqq R_1 = t^n < 1$ und $|Z| \geqq R_2 = t^{-n} > 1$ *bzw. die Abbildung des Winkelraumes*

$$\pi - \omega \leqq \operatorname{arc} Z \leqq \pi + \omega.$$

4. Die äußere bzw. innere Seite eines Kegelschnittes K besteht aus den Punkten, die an K zwei verschiedene bzw. keine Tangenten senden. Mit dieser Benennung lassen sich die Sätze einer früheren Arbeit[2]) von mir in der Form ausdrücken und zusammenfassen:

VII. *Liegen die Nullstellen bzw. Pole der Funktion $F(z)$ von der Form* (11) *im Kreisbereich K_1 bzw. K_2, so kann man in folgenden Fällen einen von Kegelschnitt begrenzten Bereich B der z-Ebene angeben, der das Abbild einer Kreisscheibe* $|Z| \leqq t^n$ *in sich enthält.*

---

[2]) *Gy. de Sz. Nagy*, Generalisation of certain theorems of G. Szegö on the location of zeros of polynomials, Bull. of the Amer. Math. Soc. **53** (1947), S. 1164—1169.

1. *Sind* K_1: $|z-\zeta| \geqq r_1$, K_2: $|z-\zeta| \leqq r_2$, $t<\frac{r_1}{r_2}$, *so ist* B: $|z-\zeta| \geqq \frac{r_1 - r_2 t}{1+t}$.

2. *Sind* K_1: $|z-\zeta_1| \geqq r_1$, K_2: $|z-\zeta_2| \leqq |r_2|$, $t<1$ *und* $|\zeta_1 - \zeta_2| < r_1 - r_2$, *so ist* B *äußere Seite der Ellipse mit der Hauptachsenlänge* $r_1 - r_2$ *und mit den Brennpunkten* ζ_1 *und* ζ_2.

3. *Sind* K_1: $|z-\zeta_1| \leqq r_1$, K_2: $|z-\zeta_2| \leqq r_2$, $t<1$ *und* $|\zeta_1 - \zeta_2| > > r_1 + r_2$, *so liegt* B *außerhalb der* ζ_2 *enthaltenden inneren Seite der Hyperbel mit der Hauptachsenlänge* $r_1 + r_2$ *und mit den Brennpunkten* ζ_1 *und* ζ_2.

4. *Ist* K_1: $|z-\zeta| \leqq r$, *ist* K_2 *eine Halbebene mit der Randgeraden* g, *haben* K_1 *und* K_2 *keinen Punkt gemeinsam und ist* $t = e + r\frac{e+1}{\delta}$, *so enthält* B *die innere Seite eines Kegelschnitts mit der numerischen Exzentrität* e, *der in* ζ *einen Brennpunkt und in* g *die zugehörige Leitgerade besitzt, wenn* δ *den Abstand zwischen* ζ *und* g *bedeutet.*

(Eingegangen den 10. Juli 1948.)