Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 23 (1949)

Artikel: Die erste Cohomologiegruppe von Überlagerungen und Homotopie-Eigenschaften dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten.

Autor: Specker, Ernst

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19767

Die erste Cohomologiegruppe von Überlagerungen und Homotopie-Eigenschaften dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten

Von ERNST SPECKER, Zürich

Einleitung

Die erste Cohomologiegruppe B^1 eines endlichen (zusammenhängenden) Komplexes K ist durch die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ von K bestimmt: Wird der Cohomologietheorie die abelsche Gruppe J als Koeffizientenbereich zugrunde gelegt, so ist B^1 isomorph der Gruppe der homomorphen Abbildungen von $\mathfrak{G}$ in J; die natürliche Isomorphie dieser beiden Gruppen hat die folgende Bedeutung: Der Charakter, der einer Cohomologieklasse zugeordnet ist, hat auf einem Gruppenelement $g \in \mathfrak{G}$ den Wert, den die Cohomologieklasse auf der g entsprechenden ganzzahligen Homologieklasse hat (B. Eckmann [1], S. 267).

Dieser Satz wird folgendermaßen verallgemeinert: Der endliche Komplex K mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ werde vom Komplex $\boldsymbol{K}$ überlagert, und zwar gehöre die Überlagerung zur Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$. Dann ist die erste Cohomologiegruppe B^1 von $\boldsymbol{K}$ — berechnet unter Zugrundelegung endlicher Ketten mit Koeffizienten aus der abelschen Gruppe J — durch die Inklusion von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{G}$ bestimmt. Wir werden auch hier eine Gruppe $B(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ definieren (und zwar in Abhängigkeit von J und $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$) und zeigen, daß B^1 dieser Gruppe isomorph ist.

Die Decktransformationengruppe $\mathfrak{D}$ einer Überlagerung $\boldsymbol{K}$ des Komplexes K kann in natürlicher Weise aufgefaßt werden als Automorphismengruppe der ersten Cohomologiegruppe B^1 von $\boldsymbol{K}$. (Zum Begriff der Decktransformationengruppe einer beliebigen Überlagerung vergleiche man H. Seifert und W. Threlfall [17], S. 198.) Wir werden demnach auch die Gruppe $B(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ als Gruppe mit der Automorphismengruppe $\mathfrak{D}$ erklären und die Operatorisomorphie von B^1 und $B(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ beweisen. Diese Ergebnisse sind im wesentlichen in zwei inzwischen erschienenen Arbeiten von B. Eckmann [2] und [3] enthalten; es werden in diesen Arbeiten auch höherdimensionale Cohomologiegruppen betrachtet.

Wird die Überlagerung $\boldsymbol{K}$ des endlichen Komplexes K ihrerseits von einem Komplex $\mathbf{\mathsf{K}}$ überlagert, so gibt die Projektionsabbildung von $\mathbf{\mathsf{K}}$ auf $\boldsymbol{K}$ Anlaß zu einem Homomorphismus der ersten Cohomologiegruppe von $\mathbf{\mathsf{K}}$ in diejenige von $\boldsymbol{K}$; diesen Homomorphismus werden wir algebraisch beschreiben, und zwar in Abhängigkeit von der Fundamentalgruppe von K und den Untergruppen, die zu den Überlagerungen gehören. Sind $\boldsymbol{K}$ und $\mathbf{\mathsf{K}}$ endliche Komplexe, so steht dieser Homomorphismus in enger Beziehung zum gruppentheoretischen Begriff der Verlagerung (H. Zassenhaus [21], S. 131).

Wir betrachten nun wieder eine einzige Überlagerung $\boldsymbol{K}$ des endlichen Komplexes K, die zur Untergruppe $\mathfrak{H}$ der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ von K gehört. Die Elemente von $B(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ sind Klassen von Funktionen auf $\mathfrak{G}$ mit Werten in J, und sie sind durch die damit in natürlicher Weise gegebene Addition verknüpft; auf $\mathfrak{H}$ haben alle Funktionen einer Klasse denselben Wert. Bezeichnet $E(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ die Untergruppe derjenigen Klassen, deren Elemente auf den Elementen von $\mathfrak{H}$ den Wert 0 haben, so darf die Faktorgruppe $B(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})/E(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ als Gruppe von Funktionen auf $\mathfrak{H}$ mit Werten in J aufgefaßt werden. In diesem Sinne ist $B(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})/E(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ eine Gruppe von homomorphen Abbildungen von $\mathfrak{H}$ in J — und zwar ist sie identisch mit der durch die erste Cohomologiegruppe B^1 von $\boldsymbol{K}$ induzierten Charakterengruppe der (als Fundamentalgruppe von $\boldsymbol{K}$ aufgefaßten) Gruppe $\mathfrak{H}$; beim natürlichen Isomorphismus von $B(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ auf B^1 wird nämlich $E(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ auf die Gruppe E^1 derjenigen eindimensionalen Cohomologieklassen abgebildet, die auf allen Zyklen den Wert 0 haben. Durch die Inklusion $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ sind daher neben B^1 auch die Gruppen E^1 und B^1/E^1 bestimmt.

Wir werden die Untergruppe E^1 der ersten Cohomologiegruppe bei beliebigen Komplexen näher untersuchen; in Komplexen, deren erste Homologiegruppe die Nullgruppe ist, ist E^1 gleich der ersten Cohomologiegruppe; in endlichen Komplexen ist E^1 die Nullgruppe. (Im folgenden sei der Homologie- und Cohomologietheorie die additive Gruppe der ganzen Zahlen als Koeffizientenbereich zugrunde gelegt.) Bei unendlichen Komplexen steht E^1 in enger Beziehung zur Endentheorie, wie sie von H. Freudenthal in [7] entwickelt worden ist: Der Rang der Gruppe E^1 und die Anzahl der Enden eines Komplexes bestimmen sich gegenseitig. Im Zusammenhang mit dem Beweis dieses Satzes werden wir zeigen, daß die erste Cohomologiegruppe eines beliebigen Komplexes eine freie abelsche Gruppe ist.

Gehört die Überlagerung $\boldsymbol{K}$ des endlichen Komplexes K mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ zur Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$, so ist die Gruppe E^1

von K und damit auch die Endenzahl von K durch $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ bestimmt; das ist die Verallgemeinerung eines Satzes der Arbeit [10] von H. Hopf, der besagt, daß die Endenzahl einer regulären Überlagerung eines endlichen Komplexes durch die Decktransformationengruppe bestimmt ist. Wie in der Arbeit [10] weiter gezeigt wird, ist die Endenzahl einer solchen Überlagerung gleich 0, 1, 2 oder unendlich; wir werden daraus schließen: Der Rang der ersten Cohomologiegruppe einer regulären unendlichblättrigen Überlagerung eines endlichen Komplexes ist gleich 0, 1 oder unendlich; für nicht-reguläre unendlichblättrige Überlagerungen braucht der entsprechende Satz nicht zu gelten.

In einem zweiten Teil wenden wir diese Ergebnisse an auf die Untersuchung von dreidimensionalen endlichen (berandeten oder unberandeten) orientierbaren Mannigfaltigkeiten. (Die Beschränkung auf orientierbare Mannigfaltigkeiten ist in den meisten Fällen nicht nötig und wird nur der Einfachheit halber durchgeführt.) Eine solche Anwendung ist bei unberandeten Mannigfaltigkeiten durch die Dualität nahegelegt. Auf Grund der bekannten Isomorphie der zweiten Homotopiegruppe eines Komplexes und der zweiten Homologiegruppe seiner universellen Überlagerung können wir zum Beispiel beweisen, daß die zweite Homotopiegruppe einer dreidimensionalen geschlossenen Mannigfaltigkeit durch ihre Fundamentalgruppe bestimmt ist. H. Hopf hat diesen Satz in [9] ohne Beweis ausgesprochen.

Etwas weniger naheliegende Anwendungen erhalten wir, wenn wir berandete dreidimensionale Mannigfaltigkeiten betrachten. Auch hier ist nämlich noch ein Rest der Dualität vorhanden, der in gewissen Fällen gestattet, über die zweite Homologiegruppe der universellen Überlagerung etwas auszusagen. So gelingt es, eine solche Klasse $\mathfrak{K}$ von Gruppen anzugeben, daß jede dreidimensionale endliche (berandete) Mannigfaltigkeit, unter deren Randflächen sich keine Kugel befindet und deren Fundamentalgruppe zu $\mathfrak{K}$ gehört, asphärisch ist. Unter weiteren Einschränkungen sind schärfere Aussagen möglich: Die zweite Homotopiegruppe einer endlichen dreidimensionalen Mannigfaltigkeit, deren nicht leerer Rand aus Ringflächen besteht, ist durch die Fundamentalgruppe der Mannigfaltigkeit bestimmt. Besonders interessante Mannigfaltigkeiten dieser Art sind die Außenräume von Verschlingungen in der dreidimensionalen Sphäre.

Nach einem Satz von W. Hurewicz [12] sind die Homologiegruppen eines asphärischen Komplexes durch seine Fundamentalgruppe bestimmt. Folgt daher einerseits aus der Struktur einer Gruppe $\mathfrak{G}$, daß eine dreidimensionale endliche Mannigfaltigkeit mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$

asphärisch ist, wenn sich unter ihren Randflächen keine Kugel befindet; können anderseits die Homologiegruppen eines asphärischen Komplexes mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ nicht Homologiegruppen einer solchen Mannigfaltigkeit sein, so dürfen wir schließen, daß $\mathfrak{G}$ nicht Fundamentalgruppe einer dreidimensionalen endlichen Mannigfaltigkeit ist. Als Anwendung zählen wir die abelschen Gruppen auf, die als Fundamentalgruppen solcher (berandeter oder unberandeter) Mannigfaltigkeiten auftreten; daraus ergeben sich dann weiter notwendige Bedingungen für die Einbettbarkeit zweidimensionaler Komplexe in beliebige dreidimensionale Mannigfaltigkeiten.

Herrn Professor H. Hopf danke ich für Anregung und Ermunterung.

I. Die erste Cohomologiegruppe von Überlagerungen

1. Vorbereitende Bemerkungen

1.1. K sei ein beliebiger Komplex (simplizialer Komplex oder Zellen komplex). Der Homologietheorie von K legen wir ganzzahlige endliche Ketten zugrunde. $\mathfrak{L}^n$, $\mathfrak{Z}^n$, $\mathfrak{H}^n$, $\mathfrak{B}^n = \mathfrak{Z}^n/\mathfrak{H}^n$ bezeichnen die Gruppen der n-dimensionalen Ketten, Zyklen, Ränder, Homologieklassen. Die Elemente von $\mathfrak{L}^n$ bezeichnen wir mit kleinen lateinischen Buchstaben mit hochgestelltem Dimensionsindex: c^n. Die Elemente der Faktorgruppe $\mathfrak{L}^n/\mathfrak{H}^n$ werden mit kleinen fetten Buchstaben bezeichnet: $\mathbf{c}^n$.

1.2. J sei eine abelsche Gruppe. Der Cohomologietheorie von K legen wir endliche Ketten mit Koeffizienten aus J zugrunde. L^n, Z^n, H^n, $B^n = Z^n/H^n$ bezeichnen die Gruppen der n-dimensionalen Ketten, Cozyklen, Coränder, Cohomologieklassen. Die Ketten aus L^n bezeichnen wir mit großen lateinischen Buchstaben: C^n.

Da die additive Gruppe der ganzen Zahlen und die Gruppe J bezüglich J ein Gruppenpaar bilden, ist der Kroneckersche Index eines Elementes von L^n auf einem Element von $\mathfrak{L}^n$ definierbar. Er ist ein Element von J; wir schreiben ihn als Produkt. Jede Kette aus Z^n hat auf den Elementen von $\mathfrak{H}^n$ den Wert 0; es wird daher in natürlicher Weise ein Produkt der Elemente von Z^n mit den Elementen von $\mathfrak{L}^n/\mathfrak{H}^n$ induziert.

1.3. Die n-dimensionalen Cozyklen, die auf allen Zyklen den Wert 0 haben, bilden eine Untergruppe A^n von Z^n, die H^n enthält; wir setzen $A^n/H^n = E^n$. Die Gruppe A^1 läßt sich auch folgendermaßen beschreiben:

C^1 gehört genau dann zu A^1, wenn es eine solche 0-dimensionale, eventuell unendliche Kette C^0 mit Koeffizienten aus J gibt, daß der Corand von C^0 die Kette C^1 ist.

1.4. Ist der Komplex K gegeben als Komplex mit einer Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$, so werden die in der Homologie- und Cohomologietheorie auftretenden Gruppen stets aufgefaßt als Gruppen, die $\mathfrak{G}$ als Operatorgruppe besitzen. Dies wird insbesondere dann der Fall sein, wenn K gegeben ist als Überlagerungskomplex eines Komplexes K'; die Gruppe $\mathfrak{G}$ ist dann die Decktransformationengruppe von K.

1.5. Zu den im folgenden benützten Sätzen aus der Überlagerungstheorie vergleiche man Seifert-Threlfall [17], 8. Kapitel. Wir erinnern nur kurz an folgendes:

Es sei $\boldsymbol{K}$ Überlagerungskomplex des zusammenhängenden Komplexes K. Im folgenden bedeute „Weg" stets „Kantenweg". Ist w ein Weg in K mit dem Anfangspunkt O, $\boldsymbol{O}$ ein O überlagernder Punkt von $\boldsymbol{K}$, dann gibt es genau einen Weg $\boldsymbol{w}$ mit dem Anfangspunkt $\boldsymbol{O}$, der w überlagert. Jedem Weg $\boldsymbol{w}$ von $\boldsymbol{K}$ ist auf natürliche Weise ein Element $c^1(\boldsymbol{w})$ der Kettengruppe $\mathfrak{L}^1$ von $\boldsymbol{K}$ zugeordnet. Es seien v und w homotope Wege von K mit dem Anfangspunkt O, $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ die entsprechenden Überlagerungswege mit dem Anfangspunkt $\boldsymbol{O}$; dann sind die Ketten $c^1(\boldsymbol{v})$ und $c^1(\boldsymbol{w})$ homolog (d. h. ihre Differenz liegt in $\mathfrak{H}^1(\boldsymbol{K})$); es haben also insbesondere $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ denselben Endpunkt.

Es sei nun in K ein Eckpunkt O, in $\boldsymbol{K}$ ein O überlagernder Eckpunkt $\boldsymbol{O}$ ausgezeichnet; zu Wegen mit dem Anfangspunkt O betrachten wir Überlagerungswege mit dem Anfangspunkt $\boldsymbol{O}$. Der Eckpunkt O sei der Pol der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ von K. Repräsentieren v und w ein Element $a \in \mathfrak{G}$, so sind $c^1(\boldsymbol{v})$ und $c^1(\boldsymbol{w})$ homolog; wir können daher einem Element $a \in \mathfrak{G}$ in natürlicher Weise ein Element $\mathbf{c}^1(a)$ der Gruppe $\mathfrak{L}^1/\mathfrak{H}^1$ von $\boldsymbol{K}$ zuordnen. Die Elemente h von $\mathfrak{G}$, die die Eigenschaft haben, daß $\mathbf{c}^1(h)$ ein Homologiezyklus ist, bilden eine Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$. Sind a und b zwei Elemente von $\mathfrak{G}$, so haben $\mathbf{c}^1(a)$ und $\mathbf{c}^1(b)$ genau dann denselben Rand, wenn a und b in derselben rechtsseitigen Restklasse von $\mathfrak{H}$ nach $\mathfrak{G}$ liegen. Die Menge der rechtsseitigen Restklassen von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}$ bezeichnen wir im folgenden mit $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ und verstehen unter einer „Restklasse" stets eine „rechtsseitige Restklasse". Alle Wege, die Repräsentanten von Elementen einer Restklasse X von $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ überlagern, besitzen denselben Endpunkt. Wir bezeichnen ihn mit $\boldsymbol{O}(X)$; $\boldsymbol{O}(X)$ überlagert O. Verschiedenen Restklassen werden dadurch verschiedene Eckpunkte zugeordnet. Für Elemente $h \in \mathfrak{H}$ und $a \in \mathfrak{G}$ ist $\mathbf{c}^1(h\,a) = \mathbf{c}^1(h) + \mathbf{c}^1(a)$, denn ein h repräsentierender Weg wird von einem geschlossenen Weg überlagert.

1.6. Nur endlich viele der Wege $\boldsymbol{w}_i$ von $\boldsymbol{K}$, die einen Weg w von K überlagern, haben mit einem vorgegebenen endlichen Teilkomplex von $\boldsymbol{K}$ einen nicht leeren Durchschnitt.

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß ein Eckpunkt $\boldsymbol{P}$ von $\boldsymbol{K}$ nur Eckpunkt von endlich vielen der Wege $\boldsymbol{w}_i$ ist. Die Eckpunkte von w seien in ihrer Reihenfolge $P_1, \ldots, P_n$. Ist P_k Projektion von $\boldsymbol{P}$, so gibt es genau einen Weg $\boldsymbol{w}_{ik}$, dessen k-ter Eckpunkt $\boldsymbol{P}$ ist.

2. Satz I.

2.1. $\boldsymbol{K}$ sei Überlagerungskomplex des endlichen und zusammenhängenden Komplexes K; in K sei ein Eckpunkt O, in $\boldsymbol{K}$ ein O überlagernder Eckpunkt ausgezeichnet. Nach Auszeichnung dieser Eckpunkte gehört zur Überlagerung eindeutig eine gewisse Untergruppe $\mathfrak{H}$ der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ von K. Der Satz I besagt in einer vorläufigen Formulierung, daß die Gruppen $B^1(\boldsymbol{K})$ und $E^1(\boldsymbol{K})$ durch $\mathfrak{G}$ und ihre Untergruppe $\mathfrak{H}$ bestimmt sind (und zwar als Gruppen mit der Decktransformationengruppe als Operatorgruppe).

2.2. Es sei Z^1 die Gruppe der Cozyklen von $\boldsymbol{K}$. Wir bilden Z^1 homomorph ab in eine Gruppe von Funktionen auf $\mathfrak{G}$ mit Werten in J. Nach 1.5 gehört zu jedem Element $a \in \mathfrak{G}$ eindeutig ein Element $\mathbf{c}^1(a)$ der Gruppe $\mathfrak{L}^1/\mathfrak{H}^1$ von $\boldsymbol{K}$.

Dem Cozyklus $C^1 \in Z^1$ ordnen wir die Funktion $f(a) = C^1 \cdot \mathbf{c}^1(a)$ auf $\mathfrak{G}$ zu. Wird die Addition von Funktionen auf $\mathfrak{G}$ mit Werten in J wie üblich erklärt, so ist diese Zuordnung ein Homomorphismus $\mathfrak{h}$ von Z^1 auf eine Gruppe von Funktionen auf $\mathfrak{G}$. Es soll nun untersucht werden, welche Funktionen beim Homomorphismus $\mathfrak{h}$ Bild eines Cozyklus sind.

2.21. Es sei $f(x)$ eine Funktion auf $\mathfrak{G}$ mit Werten in J, die beim Homomorphismus $\mathfrak{h}$ Bild eines Cozyklus C^1 ist. Dann ist für $h \in \mathfrak{H}$ und $a \in \mathfrak{G}$

$$f(ha) = f(h) + f(a)\ .$$

Beweis: $f(ha) = C^1 \cdot \mathbf{c}^1(ha) = C^1 \cdot [\mathbf{c}^1(h) + \mathbf{c}^1(a)]$

$$= C^1 \cdot \mathbf{c}^1(h) + C^1 \cdot \mathbf{c}^1(a) = f(h) + f(a)\ .$$

2.22. Nach 2.21 ist die Funktion $F(x) = f(xa) - f(x)$ (a festes Element von $\mathfrak{G}$) konstant auf den Restklassen von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}$, wenn $f(x)$ Bild eines Cozyklus ist. Es ist daher $F(x)$ in natürlicher Weise eine Funktion auf den Restklassen von $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ zugeordnet; wir bezeichnen diese

Funktion mit $F(X)$. Wir zeigen nun, daß es nur endlich viele Restklassen gibt, auf denen $F(X)$ einen von O verschiedenen Wert hat. Diesen Sachverhalt werden wir auch folgendermaßen ausdrücken: Es ist $F(X) = 0$ für fast alle $X \in \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$. Dieselbe Sprechweise verwenden wir auch in anderem Zusammenhang.

Beweis: Es sei w ein das Element a der Fundamentalgruppe repräsentierender Weg: $\boldsymbol{w}(X)$ sei der w überlagernde Weg mit dem Anfangspunkt $\boldsymbol{O}(X)$ und $c^1(X)$ die zum Wege $\boldsymbol{w}(X)$ gehörende Kette. Für $C^1 \in Z^1$ ist dann: $C^1 \cdot [\mathbf{c}^1(x\,a) - \mathbf{c}^1(x)] = C^1 \cdot c^1(X)$, $x \in X$. Nach 1.6 ist $|\, C^1 \,|$ fremd zu fast allen Wegen $\boldsymbol{w}(X)$, d. h. $F(X) = C^1 \cdot c^1(X) = 0$ für fast alle $X \in \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$.

2.3. Es sei $\Phi(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ die Gruppe der Funktionen $f(x)$ auf $\mathfrak{G}$ mit Werten in J, die die beiden folgenden Bedingungen erfüllen:

1) Für $h \in \mathfrak{H}$ und $a \in \mathfrak{G}$ ist $f(h\,a) = f(h) + f(a)$.

Bei festem a ist daher die Funktion $f(x\,a) - f(x)$ konstant auf den Restklassen von $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ und es kann die Funktion $f(X\,a) - f(X)$ auf $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ betrachtet werden.

2) $f(X\,a) - f(X) = 0$ für fast alle $X \in \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$.

In 2.2 wurde gezeigt, daß der Homomorphismus $\mathfrak{h}$ die Gruppe Z^1 in $\Phi(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ abbildet; wir zeigen nun, daß $\mathfrak{h}$ eine Abbildung von Z^1 auf $\Phi(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ ist.

Den Beweis zerlegen wir in die folgenden Nummern:

2.31. In K werde jeder Eckpunkt P durch einen Weg $v(P)$ mit O verbunden; $v(O)$ sei der Nullweg. Ist $\boldsymbol{P}$ ein Eckpunkt von $\boldsymbol{K}$, so sei $v(\boldsymbol{P})$ der Weg in $\boldsymbol{K}$ mit dem Anfangspunkt $\boldsymbol{P}$, der $v(P)$ überlagert; der Endpunkt von $v(\boldsymbol{P})$ ist ein Eckpunkt $\boldsymbol{O}(X)$. Wir ordnen jedem Eckpunkt $\boldsymbol{P}$ diejenige Restklasse $X(\boldsymbol{P})$ zu, daß $\boldsymbol{O}\big(X(\boldsymbol{P})\big)$ der Endpunkt von $v(\boldsymbol{P})$ ist. Es sei $\boldsymbol{w}$ ein Weg von $\boldsymbol{K}$ mit dem Anfangspunkt $\boldsymbol{P}$ und dem Endpunkt $\boldsymbol{Q}$; wir setzen $X(\boldsymbol{w}) = X(\boldsymbol{P})$. Die Projektion des Weges $v^{-1}(\boldsymbol{P})\,\boldsymbol{w}\,v(\boldsymbol{Q})$ ist ein geschlossener Weg in K mit dem Anfangspunkt 0; es gehört also zu ihm ein gewisses Element $a = a(\boldsymbol{w})$ der Fundamentalgruppe von K. Man sieht leicht, daß die Funktionen $X(\boldsymbol{w})$ und $a(\boldsymbol{w})$ die folgenden Eigenschaften besitzen:

a) Besitzen $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ dieselbe Projektion, so ist $a(\boldsymbol{v}) = a(\boldsymbol{w})$.

b) Besitzen $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ verschiedene Anfangspunkte mit derselben Projektion, so ist $X(\boldsymbol{v}) \neq X(\boldsymbol{w})$.

c) Ist $\boldsymbol{w}$ homotop 0 (also insbesondere geschlossen), so ist $a(\boldsymbol{w})$ gleich dem Einselement von $\mathfrak{G}$: $a(\boldsymbol{w}) = e$.

d) Sind $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ zwei Wege, die miteinander multipliziert werden können (d. h. ist der Endpunkt von $\boldsymbol{v}$ gleich dem Anfangspunkt von $\boldsymbol{w}$), so ist

$$X(\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{w}) = X(\boldsymbol{v}) \;, \quad X(\boldsymbol{v})\,a(\boldsymbol{v}) = X(\boldsymbol{w}) \;, \quad a(\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{w}) = a(\boldsymbol{v})\,a(\boldsymbol{w}) \;.$$

2.32. Es sei nun $f(x)$ ein Element von $\Phi(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$. Wir ordnen $f(x)$ die folgende Funktion auf den Wegen von $\boldsymbol{K}$ mit Werten in J zu:

$$C^1(\boldsymbol{w}) = f\big(X(\boldsymbol{w})\,a(\boldsymbol{w})\big) - f\big(X(\boldsymbol{w})\big) \;.$$

Wir leiten nun einige Eigenschaften der Funktion $C^1(\boldsymbol{w})$ her:

a) Ist der Weg $\boldsymbol{w}$ homotop 0, so ist $C^1(\boldsymbol{w}) = 0$.

Beweis: Wenn $\boldsymbol{w}$ homotop 0 ist, so ist $a(\boldsymbol{w}) = e$.

b) Sind $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ zwei Wege, die miteinander multipliziert werden können, so ist $C^1(\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{w}) = C^1(\boldsymbol{v}) + C^1(\boldsymbol{w})$.

Beweis:

$$\begin{aligned} C^1(\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{w}) &= f\big(X(\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{w})\,a(\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{w})\big) - f\big(X(\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{w})\big) \\ &= f\big(X(\boldsymbol{v})\,a(\boldsymbol{v})\big) - f\big(X(\boldsymbol{v})\big) + f\big(X(\boldsymbol{v})\,a(\boldsymbol{v})\,a(\boldsymbol{w})\big) - f\big(X(\boldsymbol{v})\,a(\boldsymbol{v})\big) \\ &= C^1(\boldsymbol{v}) + f\big(X(\boldsymbol{w})\,a(\boldsymbol{w})\big) - f\big(X(\boldsymbol{w})\big) \\ &= C^1(\boldsymbol{v}) + C^1(\boldsymbol{w}) \;. \end{aligned}$$

c) Aus a) und c) folgt unmittelbar: $C^1(\boldsymbol{w}^{-1}) = -\,C^1(\boldsymbol{w})$.

d) Sind $\boldsymbol{w}_i$ Wege mit derselben Projektion aber verschiedenen Anfangspunkten, so ist $C^1(\boldsymbol{w}_i) = 0$ für fast alle $\boldsymbol{w}_i$.

Beweis: $a(\boldsymbol{w}_i) = a$, $X(\boldsymbol{w}_i) = X_i$; für $i \neq j$ ist $X_i \neq X_j$.

$C^1(\boldsymbol{w}_i) = f(X_i\,a) - f(X_i)$, und diese Differenz ist 0 für fast alle i.

2.33. Es werde nun der Funktion $C^1(\boldsymbol{w})$ folgendermaßen eine Funktion C^1 auf den Kanten von $\boldsymbol{K}$ mit Werten in J zugeordnet: Der Wert von C^1 auf der Kante x^1 sei gleich $C^1(\boldsymbol{w})$, wobei $\boldsymbol{w}$ der Weg ist, der die Kante x^1 einmal in der gegebenen Orientierung durchläuft. Nach 2.32 c) ist C^1 eine ungerade Funktion der Kanten, es kann daher C^1 aufgefaßt werden als Kette. Die Kette C^1 ist endlich: Nach 2.32 d) besitzt C^1 nur auf endlich vielen Kanten mit derselben Projektion einen von 0 verschiedenen Wert, und da der Komplex K endlich ist, folgt daraus die Behauptung. Aus 2.32 b) folgt: Gehört zum Wege $\boldsymbol{w}$ die Kette c^1, so ist $C^1 \cdot c^1 = C^1(\boldsymbol{w})$.

Die Kette C^1 ist ein Cozyklus.

Beweis: Zu einer zweidimensionalen Zelle x^2 gibt es einen Weg $\boldsymbol{w}$ mit folgenden Eigenschaften: $\boldsymbol{w}$ ist homotop 0, und die Kette, die zu $\boldsymbol{w}$ gehört ist der Rand ∂x^2 von x^2. Nach 2.32 a) hat C^1 auf ∂x^2 den Wert 0; es hat daher der Corand δC^1 von C^1 auf der Zelle x^2 den Wert 0: C^1 ist Cozyklus.

2.34. Wir zeigen, daß der in 2.2 definierte Homomorphismus $\mathfrak{h}$ den Cozyklus C^1 auf die Funktion $f(x)$ abbildet, von der wir ausgegangen sind. Es sei $a \in \mathfrak{G}$; $\boldsymbol{w}$ sei ein Weg von $\boldsymbol{K}$ mit dem Anfangspunkt $\boldsymbol{O}$, dessen Projektion zu a gehört. Ist c^1 die dem Wege $\boldsymbol{w}$ entsprechende Kette, so ist der Wert von $\mathfrak{h}\, C^1$ auf a gleich $C^1 \cdot c^1$. Aus $a(\boldsymbol{w}) = a$ und $X(\boldsymbol{w}) = \mathfrak{H}$ folgt:

$$C^1 \cdot c^1 = C^1(\boldsymbol{w}) = f(\mathfrak{H}\, a) - f(\mathfrak{H}) = f(a) .$$

Damit ist gezeigt, daß $\mathfrak{h}$ die Gruppe Z^1 der Cozyklen von $\boldsymbol{K}$ auf die Gruppe $\Phi(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ abbildet.

2.4. $\Phi_1(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ sei die Untergruppe derjenigen Funktionen von $\Phi(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$, die auf den Elementen von $\mathfrak{H}$ den Wert 0 haben. Das Urbild von $\Phi_1(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ beim Homomorphismus $\mathfrak{h}$ ist die Gruppe $A^1(\boldsymbol{K})$ (Definition in 1.3).

Beweis: 2.41. Es sei $C^1 \in A^1$. Ist $h \in \mathfrak{H}$, so ist $\mathbf{c}^1(h)$ ein Homologiezyklus. Es ist daher $C^1 \cdot \mathbf{c}^1(h) = 0$, d. h. das Bild von C^1 beim Homomorphismus $\mathfrak{h}$ gehört zu $\Phi_1(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$.

2.42. Es sei $\mathfrak{h}\, C^1 = f(x) \in \Phi_1(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$. Zu jedem Zyklus c^1 in $\boldsymbol{K}$ existiert ein $h \in \mathfrak{H}$, so daß c^1 in $\mathbf{c}^1(h)$ liegt

$$C^1 \cdot c^1 = C^1 \cdot \mathbf{c}^1(h) = f(h) = 0 , \qquad \text{d. h.} \qquad C^1 \in A^1 .$$

2.5. Für $f(x) \in \Phi_1(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ ist $(h \in \mathfrak{H})\, f(h\, a) = f(h) + f(a) = f(a)$, d. h. $f(x)$ ist auf Restklassen von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}$ konstant; es gehört daher zu $f(x)$ eine Funktion $f(X)$ definiert auf den Restklassen $X \in \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$. Es sei $\Phi_2(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ die Untergruppe derjenigen $f(x)$ von $\Phi_1(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$, zu denen es ein solches $\mathfrak{c} \in J$ gibt, daß $f(X) = \mathfrak{c}$ für fast alle $X \in \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$.

Das Urbild von $\Phi_2(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ beim Homomorphismus $\mathfrak{h}$ ist die Gruppe der Coränder $H^1(\boldsymbol{K})$.

Beweis: 2.51. Es sei C^1 Corand: $C^1 = \delta C^0$. Nach 2.4 gehört $f(x) = \mathfrak{h}\, C^1$ zu $\Phi_1(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$. Liegt a in der Restklasse A, so ist

$$f(a) = f(A) = C^1 \cdot \mathbf{c}^1(a) = \delta C^0 \cdot \mathbf{c}^1(a) = C^0 \cdot \partial \mathbf{c}^1(a) = C^0 \cdot \boldsymbol{O}(A) - C^0 \cdot \boldsymbol{O} ,$$

und da C^0 endlich ist, ist $f(A) = -\, C^0 \cdot \boldsymbol{O}$ für fast alle Restklassen A.

2.52. Es gehöre anderseits das Bild von C^1 beim Homomorphismus $\mathfrak{h}$ zu $\Phi_2(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$. Zu jedem Eckpunkt $\boldsymbol{P}$ werde eine Kette $d^1(\boldsymbol{P})$ so bestimmt, daß $\partial d^1(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{O}$. Wir definieren eine nulldimensionale Kette F^0 (mit Koeffizienten aus J) durch $F^0 \cdot \boldsymbol{P} = C^1 \cdot d^1(\boldsymbol{P})$. F^0 ist unabhängig von der speziellen Wahl von $d^1(\boldsymbol{P})$, denn nach 2.4 hat C^1 auf allen Zyklen den Wert 0. Man sieht leicht, daß $\delta F^0 = C^1$. Die Kette F^0 braucht nicht endlich zu sein; wir zeigen aber, daß F^0 auf fast allen Eckpunkten denselben Wert $\mathfrak{c} \in J$ hat.

Nach Definition von $\mathfrak{h}\, C^1 = f(x)$ ist

$$f(X) = C^1 \cdot d^1(\boldsymbol{O}(X)) = F^0 \cdot \boldsymbol{O}(X) ,$$

und da $f(x) \in \Phi_2(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$, so ist $F^0 \cdot \boldsymbol{O}(X) = \mathfrak{c}$ für fast alle Restklassen $X \in \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$. Es seien $\boldsymbol{P}_i$ die Eckpunkte von $\boldsymbol{K}$, die einen Eckpunkt P von K überlagern; es sei w ein Weg von O nach P, $\boldsymbol{w}_i$ seien die Überlagerungswege von $\boldsymbol{O}_{j_i}$ nach $\boldsymbol{P}_i$ und c_i^1 die zu $\boldsymbol{w}_i$ gehörigen Ketten. Es ist $F^0 \cdot \boldsymbol{P}_i - F^0 \cdot \boldsymbol{O}_{j_i} = C^1 \cdot c_i^1$; nach 1.6 sind fast alle $\boldsymbol{w}_i$ fremd zu $|C^1|$, es ist daher $C^1 \cdot c_i^1 = 0$ für fast alle i. F^0 hat auf fast allen Eckpunkten $\boldsymbol{P}_i$ den Wert $\mathfrak{c}$, und da K endlich ist überhaupt auf fast allen Eckpunkten $\boldsymbol{P}$. Es sei E^0 die Kette, die auf allen Eckpunkten den Wert $\mathfrak{c}$ hat; die Kette $(F^0 - E^0)$ ist endlich, und es ist $\delta(F^0 - E^0) = \delta F^0 = C^1$, d. h. C^1 ist Corand.

Wir haben damit gezeigt: Der Homomorphismus $\mathfrak{h}$ bildet Z^1 auf $\Phi(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ ab; die Urbilder der Gruppen $\Phi_1(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ und $\Phi_2(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ bei dieser Abbildung sind die Gruppen A^1 und H^1. $\mathfrak{h}$ induziert daher einen Isomorphismus $\mathfrak{i}$ der Cohomologiegruppe $B^1 = Z^1/H^1$ von $\boldsymbol{K}$ auf die Gruppe $\Phi(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})/\Phi_2(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}) = B(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$, der die Untergruppe $E^1 = A^1/H^1$ von B^1 auf die Gruppe $\Phi_1(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})/\Phi_2(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}) = E(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ abbildet.

2.6. Wir fassen zusammen:

Definition. Es sei: $\mathfrak{G}$ eine (multiplikativ geschriebene) Gruppe, $\mathfrak{H}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$; J eine abelsche (additiv geschriebene) Gruppe; $\Phi(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ die Gruppe der Funktionen $f(x)$ auf $\mathfrak{G}$ mit Werten in J, die die folgenden beiden Eigenschaften haben:

1) Für $h \in \mathfrak{H}$ und $a \in \mathfrak{G}$ ist $f(h\,a) = f(h) + f(a)$,

2) für festes $a \in \mathfrak{G}$ ist $f(x\,a) = f(x)$ für alle $x \in \mathfrak{G}$ mit Ausnahme der x aus höchstens endlich vielen (rechtsseitigen) Restklassen von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}$;

$\Phi_1(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ die Gruppe derjenigen Funktionen aus $\Phi(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$, die auf den Elementen von $\mathfrak{H}$ den Wert 0 haben; $\Phi_2(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ die Gruppe derjenigen Funktionen aus $\Phi_1(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$, die auf allen Elementen — mit Ausnahme derjenigen aus endlich vielen (rechtsseitigen) Restklassen von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}$ — einen konstanten Wert haben.

Satz I. *K sei ein endlicher zusammenhängender Komplex mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$; $\boldsymbol{K}$ sei eine Überlagerung von K, die zur Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ gehört. Dann gibt es einen Isomorphismus der ersten Cohomologiegruppe B^1 von $\boldsymbol{K}$ (berechnet unter Zugrundelegung endlicher Ketten und des Koeffizientenbereiches J) auf die Gruppe $\Phi(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})/\Phi_2(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}) = B(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$, der die Gruppe E^1 der eindimensionalen Cohomologieklassen, die auf allen Zyklen den Wert 0 haben, auf die Gruppe $\Phi_1(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})/\Phi_2(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}) = E(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ abbildet.*

2.7. Gehört die Überlagerung $\boldsymbol{K}$ von K zur Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$, so ist die Decktransformationengruppe von $\boldsymbol{K}$ (d. h. die Gruppe derjenigen Automorphismen von $\boldsymbol{K}$, die mit der Projektion von $\boldsymbol{K}$ auf K vertauschbar sind) isomorph zur Faktorgruppe $\mathfrak{N}/\mathfrak{H}$ des Normalisators $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}$ (Seifert-Threlfall [17], S. 198). Die Decktransformationengruppe gibt Anlaß zu Automorphismengruppen der in der Homologie- und Cohomologietheorie von $\boldsymbol{K}$ auftretenden Gruppen. Alle jene Gruppen identifizieren wir.

2.8. Es soll nun die Faktorgruppe $\mathfrak{N}/\mathfrak{H}$ als Automorphismengruppe von $B(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ erklärt werden; dazu erklären wir zunächst $\mathfrak{N}$ als Automorphismengruppe von $\Phi(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$.

Ist $a \in \mathfrak{N}$ und $f(x) \in \Phi(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$, so sei

$$a\, f(x) = f(a^{-1}\, x\, a) \ .$$

Man zeigt leicht, daß mit $f(x)$ auch $a\, f(x)$ zu $\Phi(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ gehört; die Elemente von $\mathfrak{N}$ sind damit als Automorphismen von $\Phi(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ erklärt, und zwar bilden sie die Gruppen $\Phi_i(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ $(i = 1, 2)$ auf sich ab.

Die Elemente von $\mathfrak{H}$ bilden $f(x) \in \Phi(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ in eine modulo $\Phi_2(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ kongruente Funktion ab.

Beweis: Es ist zu zeigen, daß für $h \in \mathfrak{H}$

$$f(x) - h\, f(x) \in \Phi_2(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}) \ .$$

1) Sei $k \in \mathfrak{H}$; dann ist

$$f(k) - h\, f(k) = f(k) - f(h^{-1}\, k\, h) = f(k) + f(h) - f(k) - f(h) = 0 \, .$$

2) $f(X) - h\, f(X) = f(X) - f(h^{-1}\, X\, h) = f(X) - f(X\, h)$

und diese Differenz ist gleich 0 für fast alle $X \in \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$.

Es ist demnach die Gruppe $\mathfrak{N}/\mathfrak{H}$ in natürlicher Weise als Automorphismengruppe von $\Phi(\mathfrak{G},\mathfrak{H})/\Phi_2(\mathfrak{G},\mathfrak{H}) = B(\mathfrak{G},\mathfrak{H})$ erklärbar; die Automorphismen von $\mathfrak{N}/\mathfrak{H}$ bilden die Untergruppe E^1 auf sich ab.

Satz I'. *K sei ein endlicher zusammenhängender Komplex mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$; $\boldsymbol{K}$ sei eine Überlagerung von K, die zur Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ gehört. Dann existiert ein Operatorisomorphismus der Gruppe $B^1(\boldsymbol{K})$ auf die Gruppe $B(\mathfrak{G},\mathfrak{H})$, der $E^1(\boldsymbol{K})$ auf $E(\mathfrak{G},\mathfrak{H})$ abbildet. Dabei ist die Faktorgruppe $\mathfrak{N}/\mathfrak{H}$ des Normalisators $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}$ die gemeinsame Operatorgruppe.*

Dem Beweis schicken wir einen Hilfssatz voraus: Es sei $f(x) \in \Phi(\mathfrak{G},\mathfrak{H})$, $n \in \mathfrak{N}$ (Normalisator von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{G}$); dann ist $n\,f(x) - \big(f(n^{-1}x) - f(n^{-1})\big) \in \Phi_2(\mathfrak{G},\mathfrak{H})$.

Beweis: 1) Es sei $h \in \mathfrak{H}$; dann ist auch $n^{-1} h\, n \in \mathfrak{H}$.

$$\begin{aligned} f(n^{-1}h) - f(n^{-1}) &= f(n^{-1}h\,n\,n^{-1}) - f(n^{-1}) \\ &= f(n^{-1}h\,n) + f(n^{-1}) - f(n^{-1}) = n\,f(h)\ . \end{aligned}$$

2) Es ist $f(X\,n) - f(X) = 0$ für fast alle $X \in \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$; mit Y durchläuft $n^{-1}Y$ die Restklassen von $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$, und es ist daher $f(n^{-1}Y\,n) - f(n^{-1}Y) = 0$ für fast alle $Y \in \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$.

$$f(n^{-1}Y\,n) - \big(f(n^{-1}Y) - f(n^{-1})\big) = f(n^{-1}) = \mathfrak{c} \text{ für fast alle } Y \in \mathfrak{G}/\mathfrak{H}.$$

Beweis von Satz I': Wir zeigen, daß der durch den in 2.2 definierten Homomorphismus induzierte Isomorphismus von $B^1(\boldsymbol{K})$ auf $B(\mathfrak{G},\mathfrak{H})$ operatortreu ist. Es sei $C^1 \in Z^1$, $\mathfrak{h}\,C^1 = f(x)$, $n \in \mathfrak{N}$; die Restklasse von n in $\mathfrak{N}/\mathfrak{H}$ bezeichnen wir mit (n). (n) fassen wir auf als Automorphismus von Z^1, $\mathfrak{L}^1/\mathfrak{H}^1$ usw. Es sei $\mathfrak{h}(n)\,C^1 = g(x)$; dann ist

$$g(a) = (n)\,C^1 \cdot \mathbf{c}^1(a) = C^1 \cdot (n)^{-1}\,\mathbf{c}^1(a)\ .$$

Aus der Definition von $\mathbf{c}^1(a)$ folgt unmittelbar:

$$(n)^{-1}\,\mathbf{c}^1(a) = \mathbf{c}^1(n^{-1}a) - \mathbf{c}^1(n^{-1})$$

und es ist daher $g(a) = f(n^{-1}a) - f(n^{-1})$; nach dem Hilfssatz sind $g(x)$ und $n\,f(x)$ modulo $\Phi_2(\mathfrak{G},\mathfrak{H})$ kongruent, d. h. der durch $\mathfrak{h}$ induzierte Isomorphismus von B^1 auf $B(\mathfrak{G},\mathfrak{H})$ ist operatortreu.

3. Projektion. Satz II.

3.1. Der Komplex $\boldsymbol{K}$ überlagere den Komplex K. Die Projektionsabbildung von $\boldsymbol{K}$ auf K ist mit der Rand- und Coranbildung in K und $\boldsymbol{K}$

vertauschbar; sie induziert daher Homomorphismen der in der Homologie- und Cohomologietheorie auftretenden Gruppen von $\boldsymbol{K}$ in die entsprechenden Gruppen von K. Alle diese Homomorphismen bezeichnen wir mit U.

3.2. $\boldsymbol{K}^2$ überlagere $\boldsymbol{K}^1$, $\boldsymbol{K}^1$ überlagere den endlichen zusammenhängenden Komplex K. Es soll in diesem Abschnitt der Homomorphismus von $B^1(\boldsymbol{K}^2)$ in $B^1(\boldsymbol{K}^1)$ auf Grund der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ von K und der Untergruppen von $\mathfrak{G}$, die zu den beiden Überlagerungen gehören, beschrieben werden.

O sei der Pol der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ von K; $\boldsymbol{O}^1$ sei ein Eckpunkt von $\boldsymbol{K}^1$, der O überlagert, $\boldsymbol{O}^2$ sei ein Eckpunkt von $\boldsymbol{K}^2$, der $\boldsymbol{O}^1$ und damit auch O überlagert. Es seien $\mathfrak{H}_i$ $(i = 1, 2)$ die Untergruppen von $\mathfrak{G}$, die zu den Überlagerungen $\boldsymbol{K}^i$ und den ausgezeichneten Eckpunkten $\boldsymbol{O}^i$ gehören. Da $\boldsymbol{O}^2$ den Eckpunkt $\boldsymbol{O}^1$ überlagert, ist $\mathfrak{H}_2$ Untergruppe von $\mathfrak{H}_1$. Durch die Wahl von $\boldsymbol{O}^i$ ist der im letzten Abschnitt konstruierte Isomorphismus $\mathfrak{i}_i$ von $B^1(\boldsymbol{K}^i)$ auf $B(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}_i)$ eindeutig bestimmt. Wir beschreiben den Homomorphismus U von $B^1(\boldsymbol{K}^2)$ in $B^1(\boldsymbol{K}^1)$, indem wir den Homomorphismus $V = \mathfrak{i}_1\, U\, \mathfrak{i}_2^{-1}$ von $B(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}_2)$ in $B(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}_1)$ beschreiben.

3.3. Es sei C^1 eine endliche Kette (mit Koeffizienten aus J) in $\boldsymbol{K}^2$, UC^1 ihre Projektion in $\boldsymbol{K}^1$; c^1 sei eine (endliche oder unendliche) ganzzahlige Kette in $\boldsymbol{K}^1$, $U^{-1}c^1$ ihr vollständiges Urbild in $\boldsymbol{K}^2$. Dann ist $UC^1 \cdot c^1 = C^1 \cdot U^{-1} c^1$.

3.4. Zum Cozyklus C^1 in $\boldsymbol{K}^2$ gehöre die Funktion $f(x)$ aus $\Phi(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}_2)$, zu seiner Projektion in $\boldsymbol{K}^1$ die Funktion $F(x)$ aus $\Phi(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}_1)$. Wir zeigen, wie die Funktion $F(x)$ aus $f(x)$ berechnet werden kann. Um den Wert der Funktion $F(x)$ auf einem Element $a \in \mathfrak{G}$ zu berechnen, haben wir in K einen a repräsentierenden Weg w zu wählen, diesen Weg in den ihn überlagernden Weg $\boldsymbol{w}$ mit dem Anfangspunkt $\boldsymbol{O}^1$ in $\boldsymbol{K}^1$ durchzudrücken und das dem Weg $\boldsymbol{w}$ entsprechende Element c^1 von $\mathfrak{L}^1(\boldsymbol{K}^1)$ zu bestimmen; dann ist $F(a) = UC^1 \cdot c^1$.

Wir betrachten nun die im allgemeinen unendliche Kette $U^{-1}c^1$ von $\boldsymbol{K}^2$. Sind $\boldsymbol{w}_i^2$ die Wege von $\boldsymbol{K}^2$, die den Weg $\boldsymbol{w}$ überlagern, und gehören zu den Wegen $\boldsymbol{w}_i^2$ die Ketten c_i^1, so ist $U^{-1}c^1 = \sum\limits_i c_i^1$. Die Wege $\boldsymbol{w}_i^2$ lassen sich auch folgendermaßen charakterisieren: Sie überlagern den Weg w und beginnen in einem Eckpunkt $\boldsymbol{O}^2(X)$ von $\boldsymbol{K}^2$, wobei X eine Restklasse aus $\mathfrak{H}_1/\mathfrak{H}_2$ ist (dabei bezeichnet $\mathfrak{H}_1/\mathfrak{H}_2$ die Menge der Restklassen von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}_2$, die in $\mathfrak{H}_1$ liegen).

Es sei $\mathbf{c}^1(x)$ die zur Überlagerung $\boldsymbol{K}^2$ von K gehörende Funktion auf $\mathfrak{G}$ mit Werten in $\mathfrak{L}^1/\mathfrak{H}^1$. Für festes $a \in \mathfrak{G}$ ist $\mathbf{c}^1(x\,a) - \mathbf{c}^1(x)$ konstant auf Restklassen von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}_2$; es ist daher $\mathbf{c}^1(X\,a) - \mathbf{c}^1(X)$ $(X \in \mathfrak{G}/\mathfrak{H}_2)$ in natürlicher Weise erklärbar. Aus der zweiten Charakterisierung der Wege $\boldsymbol{w}_i^2$ folgt leicht: Beginnt der Weg $\boldsymbol{w}_i^2$ im Eckpunkt $\boldsymbol{O}^2(X)$, so gehört c_i^1 zur Restklasse $\mathbf{c}^1(X\,a) - \mathbf{c}^1(X)$. Es ist daher

$$UC^1 \cdot c^1 = C^1 \cdot U^{-1} c^1 = C^1 \cdot \sum_i c_i^1 = C^1 \cdot \sum \left[\mathbf{c}^1(X\,a) - \mathbf{c}^1(X)\right]$$

(die letzte Summe ist zu erstrecken über die Restklassen $X \in \mathfrak{H}_1/\mathfrak{H}_2$).

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} C^1 \cdot \sum_{X \in \mathfrak{H}_1/\mathfrak{H}_2} \left[\mathbf{c}^1(Xa) - \mathbf{c}^1(X)\right] &= \sum_{X \in \mathfrak{H}_1/\mathfrak{H}_2} C^1 \cdot \left[\mathbf{c}^1(Xa) - \mathbf{c}^1(X)\right] \\ &= \sum_{X \in \mathfrak{H}_1/\mathfrak{H}_2} \left[f(Xa) - f(X)\right]; \end{aligned}$$

wir haben daher gezeigt: Gehört zum Cozyklus C^1 in $\boldsymbol{K}^2$ die Funktion $f(x)$ aus $\Phi(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}_2)$, so gehört zu UC^1 in $\boldsymbol{K}^1$ die Funktion $F(x)$ aus $\Phi(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}_1)$, die folgendermaßen definiert ist:

$$F(a) = \sum_{X \in \mathfrak{H}_1/\mathfrak{H}_2} \left[f(Xa) - f(X)\right].$$

3.5. Wir fassen das Ergebnis in einer Definition und einem Satz zusammen. Die nicht bewiesenen Behauptungen ergeben sich für Gruppen $\mathfrak{G}$, die als Fundamentalgruppen eines endlichen Komplexes auftreten, unmittelbar aus der geometrischen Interpretation; die entsprechenden Beweise können aber auch leicht für beliebige Gruppen algebraisch geführt werden.

Definition: $\mathfrak{G}$ sei eine Gruppe, $\mathfrak{H}_i$ $(i = 1, 2)$ seien Untergruppen von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}_2$ Untergruppe von $\mathfrak{H}_1$. V sei der folgendermaßen definierte Homomorphismus von $\Phi(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}_2)$ in $\Phi(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}_1)$:

$$Vf(x)\,/_{x=a} = \sum_{X \in \mathfrak{H}_1/\mathfrak{H}_2} \left[f(Xa) - f(X)\right].$$

(Die Summe, die über alle Restklassen X von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}_2$ in $\mathfrak{H}_1$ zu erstrecken ist, ist endlich.)

V bildet die Gruppe $\Phi_2(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}_2)$ in $\Phi_2(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}_1)$ ab und induziert daher einen — auch mit V bezeichneten — Homomorphismus von $B(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}_2)$ in $B(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}_1)$.

Satz II. *Der endliche zusammenhängende Komplex K werde von den Komplexen $\boldsymbol{K}^1$ und $\boldsymbol{K}^2$ überlagert; $\boldsymbol{K}^2$ überlagere $\boldsymbol{K}^1$. Die zu den Überlagerungen gehörenden Untergruppen $\mathfrak{H}_i$ $(i = 1, 2)$ der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ von K seien so gewählt, daß $\mathfrak{H}_2$ Untergruppe von $\mathfrak{H}_1$ ist. U bezeichne den natürlichen Homomorphismus der ersten Cohomologiegruppe $B^1(\boldsymbol{K}^2)$ von $\boldsymbol{K}^2$ in die erste Cohomologiegruppe $B^1(\boldsymbol{K}^1)$ von $\boldsymbol{K}^1$. Dann gibt es solche Isomorphismen $\mathfrak{i}_i$ von $B^1(\boldsymbol{K}^i)$ auf $B(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}_i)$ $(i = 1, 2)$, daß $\mathfrak{i}_1 U = V \mathfrak{i}_2$.*

3.6. Ist K ein endlicher zusammenhängender Komplex mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$, so ist nach Satz I $B^1(K) = \Phi(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})/\Phi_2(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$. $\Phi(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ ist die Gruppe der homomorphen Abbildungen von $\mathfrak{G}$ in J; $\Phi_2(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ ist die Nullgruppe. Die Gruppe $B^1(K)$ ist daher isomorph der Gruppe der homomorphen Abbildungen von $\mathfrak{G}$ in J (B. Eckmann [1], S. 267).

Es sei $\boldsymbol{K}$ eine endliche Überlagerung von K, die zur Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ gehört; da $\mathfrak{H}$ Fundamentalgruppe von $\boldsymbol{K}$ ist, so ist $B^1(\boldsymbol{K})$ isomorph der Gruppe der homomorphen Abbildungen von $\mathfrak{H}$ in J. Der natürliche Homomorphismus von $B^1(\boldsymbol{K})$ in $B^1(K)$ läßt sich folgendermaßen beschreiben:

Es sei $v(x)$ die Verlagerung von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}$ (vgl. H. Zassenhaus [21], S. 131); $v(x)$ ist eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{G}$ in die abelsch gemachte Gruppe $\bar{\mathfrak{H}}$ von $\mathfrak{H}$. Die Cohomologieklasse ζ^1 induziere auf $\bar{\mathfrak{H}}$ den Charakter $f(x)$; dann induziert die Projektion $U\,\zeta^1$ von ζ^1 in K auf $\mathfrak{G}$ den Charakter $f\big(v(x)\big)$.

Der Beweis folgt leicht aus Satz II.

4. Die erste Cohomologiegruppe eines Komplexes

Satz III. *Die erste Cohomologiegruppe eines Komplexes, berechnet unter Zugrundelegung ganzzahliger endlicher Ketten, ist eine freie abelsche Gruppe.*

Der Inhalt dieses Abschnittes besteht im wesentlichen im Beweis dieses Satzes. Wir dürfen uns dabei ohne Einschränkung der Allgemeinheit auf zusammenhängende Komplexe beschränken.

4.1. K sei ein zusammenhängender Komplex; der Cohomologietheorie werde ein beliebiger Koeffizientenbereich J (und endliche Ketten) zugrunde gelegt. Wir wollen die Untergruppe E^1 der ersten Cohomologiegruppe B^1 von K (Definition in 1.3) auf eine neue Art charakterisieren.

Es sei Ψ die Gruppe der nulldimensionalen (endlichen oder unendlichen) Ketten C^0 mit Koeffizienten aus J, deren Corand endlich ist. Es sei Ω die Untergruppe derjenigen Elemente von Ψ, die nur auf endlich vielen Eckpunkten einen Wert haben, der nicht gleich einer gewissen Konstanten ist. Dann ist die Gruppe E^1 isomorph der Faktorgruppe Ψ/Ω, und zwar läßt sich ein Isomorphismus von Ψ/Ω auf E^1 folgendermaßen definieren: Es bezeichne δ die Corandbildung, h den natürlichen Homomorphismus der Gruppe der Cozyklen $Z^1(K)$ auf $B^1(K)$; dann bildet $h\delta$ die Gruppe Ψ homomorph auf E^1 ab, und der Kern dieses Homomorphismus ist Ω.

Der Beweis bietet keine Schwierigkeiten.

4.2. Es sei C^0 eine Kette aus Ψ. Durch C^0 wird die Menge der Eckpunkte von K in Klassen solcher zerlegt, auf denen C^0 einen konstanten Wert hat. Man sieht leicht, daß die Anzahl dieser Klassen endlich ist.

Bemerkung: Eine Kette, die auf den Eckpunkten einer dieser Klassen einen konstanten Wert, auf allen andern Eckpunkten den Wert 0 hat, gehört zu Ψ; daraus folgt, daß jede Cohomologieklasse von E^1 rein (von erster Art) ist.

4.3. Im folgenden sei der Koeffizientenbereich die additive Gruppe der ganzen Zahlen. Wir zeigen vorerst, daß die Gruppe E^1 eine freie abelsche Gruppe ist. Wir stützen uns dabei auf den folgenden bekannten Hilfssatz (vgl. Pontrjagin [15], S. 168; der Satz ist dort etwas anders formuliert):

Dafür, daß eine abelsche abzählbare Gruppe eine freie abelsche Gruppe ist, sind die beiden folgenden Bedingungen hinreichend:

1) sie enthält kein Element endlicher Ordnung;

2) jede ihrer Untergruppen endlichen Ranges besitzt endlich viele Erzeugende.

Bemerkung: Eine abelsche nicht-abzählbare Gruppe braucht nicht frei zu sein, auch wenn sie die Bedingungen 1) und 2) erfüllt.

Die Gruppe E^1 ist abzählbar. Wir zeigen, daß Ψ/Ω die Bedingungen 1) und 2) erfüllt.

ad 1) Es sei $C^0 \in \Psi$, $n\,C^0 \in \Omega$ (n ganze Zahl); es hat $n\,C^0$ auf fast allen Eckpunkten denselben Wert. Dann hat auch C^0 selbst auf fast allen Eckpunkten denselben Wert, d. h. $C^0 \in \Omega$. Ψ/Ω enthält demnach kein Element endlicher Ordnung.

ad 2) Es sei T eine Untergruppe endlichen Ranges von Ψ/Ω. T enthält solche linear unabhängige Elemente $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$, daß für jedes $\sigma \in T$ die Elemente $\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_p$ linear abhängig sind.

C_i^0 $(i = 1, \ldots, p)$ seien Repräsentanten von σ_i in Ψ. Jedes C_i^0 gibt gemäß 4.2 Anlaß zu einer Klasseneinteilung $\{\mathfrak{M}_i^k\}$ $(k = 1, \ldots, q_i)$ der Eckpunktmenge. $\{\mathfrak{N}^k\}$ $(k = 1, \ldots, n)$ sei die Superposition dieser Klasseneinteilungen, d. h. die folgendermaßen definierte Klasseneinteilung: Zwei Eckpunkte gehören genau dann zur selben Klasse $\mathfrak{N}^j$, wenn sie in jeder Klasseneinteilung $\{\mathfrak{M}_i^k\}$ zur selben Klasse gehören.

Es gibt — wie leicht zu sehen — in $\mathfrak{N}^j$ nur endlich viele Eckpunkte, die mit einem Eckpunkt, der nicht zu $\mathfrak{N}^j$ gehört, durch eine Kante verbunden sind. Ist daher F_i^0 die charakteristische Funktion von $\mathfrak{N}^i$ (F_i^0 hat auf den Eckpunkten von $\mathfrak{N}^i$ den Wert 1, sonst den Wert 0), so gehört F_i^0 zu Ψ. Es seien τ_i die Restklassen von Ψ/Ω, zu denen die Ketten F_i^0 gehören. Wir zeigen, daß T eine Untergruppe der von den τ_i erzeugten Gruppe ist.

Zu $\sigma \in T$ gibt es Zahlen t, t_i, so daß

$$t\,\sigma = \sum_i t_i\,\sigma_i\ , \qquad t \neq 0\ .$$

Es sei C^0 ein Repräsentant von σ in Ψ; dann gibt es eine endliche Kette E^0 und eine Kette D^0, die auf fast allen Eckpunkten denselben Wert hat, so daß

$$t\,C^0 = \sum t_i\,C_i^0 + E^0 + D^0\ .$$

Es sei $\mathfrak{E}$ die Menge der Eckpunkte, auf denen E^0 einen von 0 verschiedenen Wert hat; $\mathfrak{E}$ ist endlich. Die Ketten C_i^0 haben auf den Eckpunkten von $\mathfrak{N}^j$ einen konstanten Wert; es hat daher $t\,C^0$ auf den Eckpunkten von $\mathfrak{N}^j \frown \mathfrak{E}$ einen konstanten Wert, und dasselbe gilt auch für C^0 selbst. C^0 habe in den Eckpunkten von $\mathfrak{N}^i \frown \mathfrak{E}$ den Wert s_i; falls $\mathfrak{N}^i \frown \mathfrak{E}$ leer ist, sei s_i beliebig.

Die Ketten C^0 und $\Sigma\, s_i F_i^0$ unterscheiden sich höchstens in Werten auf den Eckpunkten von $\mathfrak{E}$; die entsprechenden Elemente und $\Sigma\, s_i\,\tau_i$ von Ψ/Ω sind daher gleich. Die Gruppe T besitzt als Untergruppe einer abelschen Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden selbst endlich viele Erzeugende. Damit ist gezeigt, daß die Gruppe E^1 eine freie abelsche Gruppe ist.

4.4. Wir zeigen nun, daß die Gruppe B^1/E^1 eine freie abelsche Gruppe ist. Diese Gruppe ist abelsch und abzählbar; wir werden wieder den Hilfssatz aus 4.3 verwenden.

$\mathfrak{B}^1(K)$ sei die erste Homologiegruppe von K (berechnet unter Zugrundelegung ganzzahliger endlicher Ketten); jedes Element von B^1 gibt Anlaß zu einem Charakter von $\mathfrak{B}^1$ (d. h. einer Abbildung von $\mathfrak{B}^1$

in die additive Gruppe der ganzen Zahlen). Und zwar geben genau die Elemente von E^1 Anlaß zum Nullcharakter. Die Gruppe B^1/E^1 ist daher isomorph einer Untergruppe X der Charaktergruppe von $\mathfrak{B}^1$. Als Gruppe von Charakteren besitzt X kein Element endlicher Ordnung. Sei weiter U eine Untergruppe endlichen Ranges von X. Es gibt in U solche Elemente f_i $(i = 1, \ldots, m)$, daß es zu jedem Element $f \in U$ Zahlen t, t_i $(i = 1, \ldots, m)$ gibt, so daß

$$t f = \Sigma t_i f_i \,, \qquad t \neq 0 \,.$$

Der Kern des Homomorphismus f_i von $\mathfrak{B}^1$ in die Gruppe der ganzen Zahlen sei $\mathfrak{B}_i$; die Faktorgruppe $\mathfrak{B}^1/\mathfrak{B}_i$ ist zyklisch. Daraus folgt leicht, daß die Faktorgruppe von $\mathfrak{B}^1$ nach dem Durchschnitt $\Lambda \mathfrak{B}_i$ der Gruppen $\mathfrak{B}_i$ endlich viele Erzeugende besitzt. Jeder Charakter der Form $\Sigma t_i f_i$ besitzt auf den Elementen von $\Lambda \mathfrak{B}_i$ den Wert 0; dasselbe gilt von allen Charakteren aus U. U ist daher isomorph einer Untergruppe der Charakterengruppe von $\mathfrak{B}^1/\Lambda \mathfrak{B}_i$ und besitzt folglich nach bekannten Sätzen endlich viele Erzeugende.

4.5. Aus der Tatsache, daß B^1/E^1 und E^1 freie abelsche Gruppen sind, folgt unmittelbar, daß auch B^1 selbst eine freie abelsche Gruppe ist.

5. Die Gruppen B^1 und E^1 und die Enden eines Komplexes

Zur Endentheorie vergleiche man H. Freudenthal [7] und H. Hopf [10]. Die Kenntnis dieser Arbeiten ist für das Verständnis des folgenden nicht unbedingt nötig; denn der grundlegende Satz, den wir diesen Arbeiten in 5.1 entnehmen, kann auch als Definition der Sprechweise „der zusammenhängende Komplex K hat n (unendlich viele) Enden" aufgefaßt werden.

5.1. Ist K' Teilkomplex des Komplexes K, so verstehen wir unter $K - K'$ den folgendermaßen definierten Teilkomplex von K: Ein Simplex von K gehört genau dann zu $K - K'$, wenn es (echte oder unechte) Seite eines Simplexes ist, das nicht zu K' gehört.

Satz (Definition): K sei ein zusammenhängender Komplex. K hat mindestens n Enden, wenn es einen solchen endlichen Teilkomplex K' von K gibt, daß $K - K'$ mindestens n unendliche Komponenten besitzt. K hat n Enden, wenn er mindestens n und nicht mindestens $n + 1$ Enden hat; K hat unendlich viele Enden, wenn für alle n gilt, daß K mindestens n Enden hat.

Es folgt unmittelbar: Ein unendlicher zusammenhängender Komplex hat entweder eine bestimmt endliche Anzahl $\geqslant 1$ oder unendlich viele Enden; ein endlicher Komplex hat 0 Enden.

5.2. **Satz IV.** *Der Rang der Untergruppe E^1 der ersten Cohomologiegruppe eines unendlichen zusammenhängenden Komplexes (berechnet unter Zugrundelegung endlicher ganzzahliger Ketten) ist gleich der um 1 verminderten Anzahl der Enden des Komplexes, d. h. $n-1$, wenn der Komplex n Enden hat, unendlich, wenn er unendlich viele Enden hat.*

Bemerkung: Die Gruppe E^1 eines endlichen Komplexes ist die Nullgruppe. Ist die erste Homologiegruppe eines Komplexes die Nullgruppe, so ist die erste Cohomologiegruppe B^1 gleich E^1; es ist also in diesem Falle B^1 durch die Endenzahl bestimmt.

Beweis von Satz IV. Es genügt zu zeigen: Besitzt der Komplex K mindestens n Enden, so ist der Rang von E^1 mindestens gleich $n-1$; ist der Rang von E^1 mindestens gleich m, so hat K mindestens $m+1$ Enden.

Wir benützen beim Beweis die in 4.1 ausgesprochene Isomorphie $E^1 \simeq \Psi/\Omega$.

K habe mindestens n Enden, d. h. es gebe einen solchen endlichen Teilkomplex K' von K, daß $K - K'$ mindestens n unendliche Komponenten K_i $(i = 1, \ldots, n)$ besitzt. Es sei C_i^0 die charakteristische Funktion der Menge der Eckpunkte von K_i, d. h. C_i^0 habe auf den Eckpunkten von K_i den Wert 1 und auf allen andern Eckpunkten den Wert 0. Der Corand von C_i^0 ist endlich, denn er ist eine Kette aus K'; die Ketten C_i^0 gehören daher zu Ψ. Die Elemente C_i^0 $(i = 1, \ldots, n-1)$ sind modulo Ω linear unabhängig. Die Kette $\sum\limits_{i=1}^{n-1} t_i C_i^0$, $t_j \neq 0$, gehört nämlich nicht zu Ω, da sie auf den Eckpunkten von K_j den Wert t_j und auf den Eckpunkten von K_n den Wert 0 hat. Die Gruppe Ψ/Ω hat somit mindestens den Rang $n-1$.

Die Gruppe Ψ/Ω von K habe mindestens den Rang m. Es seien C_i^0 $(i = 1, \ldots, m)$ m Elemente von Ψ, die modulo Ω linear unabhängig sind. K' sei der Vereinigungskomplex der Komplexe $|\delta C_i^0|$; K' ist endlich. Die Ketten C_i^0 haben auf den Eckpunkten einer Komponente von $K - K'$ einen konstanten Wert; sind nämlich P und Q zwei solche Eckpunkte, so gibt es eine ganzzahlige endliche Kette c^1 mit den folgenden Eigenschaften: $|c^1|$ ist fremd zu K' und $\partial c^1 = P - Q$, und es ist daher

$$C_i^0 \cdot P - C_i^0 \cdot Q = C_i^0 \cdot \partial c^1 = \delta C_i^0 = 0 \; .$$

Es seien D_i^0 $(i = 1, \ldots, p)$ die charakteristischen Funktionen der Eckpunktmengen der unendlichen Komponenten von $K - K'$; die den Ketten D_i^0 $(i = 1, \ldots, p - 1)$ entsprechenden Restklassen von Ψ/Ω erzeugen eine Untergruppe, die die Untergruppe umfaßt, welche von den Restklassen der C_i^0 $(i = 1, \ldots, m)$ erzeugt wird; es ist daher $p - 1 \geqslant m$, d. h. K hat mindestens $m + 1$ Enden. Damit ist der Beweis von Satz VI beendet.

5.3. Korollar: K sei ein endlicher zusammenhängender Komplex mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$; $\boldsymbol{K}$ sei eine Überlagerung von K, die zur Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ gehört. Dann ist die Anzahl der Enden von $\boldsymbol{K}$ durch die Gruppe $\mathfrak{G}$ und ihre Untergruppe $\mathfrak{H}$ bestimmt.

Beweis: Nach Satz I (in 2.6) ist die Gruppe $E^1(\boldsymbol{K})$ durch $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{H}$ bestimmt, und $E^1(\boldsymbol{K})$ bestimmt die Endenzahl von $\boldsymbol{K}$.

Bemerkungen: 1. In der Endentheorie wird einem zusammenhängenden Komplex K ein gewisser topologischer Raum $\mathfrak{E}$, der Endenraum, zugeordnet. Zwischen der Gruppe E^1 und dem Endenraum von K besteht der folgende Zusammenhang: Die Gruppe E^1 (berechnet unter Zugrundelegung eines beliebigen Koeffizientenbereiches J) ist isomorph der Faktorgruppe der stetigen Funktionen auf $\mathfrak{E}$ mit Werten in J nach der Untergruppe der konstanten Funktionen. Diese Faktorgruppe kann als die reduzierte nullte Cohomologiegruppe von $\mathfrak{E}$ aufgefaßt werden.

Der am Anfang dieser Nummer ausgesprochene Satz läßt sich folgendermaßen verschärfen: Es sei K ein endlicher zusammenhängender Komplex mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$, $\boldsymbol{K}$ eine Überlagerung von K, die zur Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ gehört; dann ist der Endenraum von $\boldsymbol{K}$ durch $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{H}$ bestimmt.

2. Dieser letzte Satz ist bekannt, wenn $\boldsymbol{K}$ reguläre Überlagerung von K ist; und zwar ist $\mathfrak{E}$ dann sogar durch die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ bestimmt. Es kann daher in natürlicher Weise die Endenzahl einer Gruppe definiert werden, die als Decktransformationengruppe der regulären Überlagerung eines endlichen zusammenhängenden Komplexes auftritt (H. Hopf [10], S. 96). Aus Satz IV folgt, daß die Gruppe E^1 einer regulären Überlagerung durch die Decktransformationengruppe bestimmt ist; unabhängig vom Endenbegriff folgt dies aus der leicht zu beweisenden Isomorphie:

$$\Phi_1(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})/\Phi_2(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}) \simeq \Phi_1(\mathfrak{G}/\mathfrak{H}, \mathfrak{J})/\Phi_2(\mathfrak{G}/\mathfrak{H}, \mathfrak{J}) .$$

($\mathfrak{H}$ ist Normalteiler von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{J}$ die Gruppe, die nur aus dem Einheitselement besteht.)

3. Nach H. Hopf [10], S. 93 besitzt jede reguläre Überlagerung eines endlichen zusammenhängenden Komplexes (und damit jede Gruppe, für die die Endenzahl definiert ist) 0, 1, 2 oder unendlich viele Enden.

5.4. **Satz V.** *Die unter Zugrundelegung ganzzahliger Ketten berechnete erste Cohomologiegruppe* B^1 *und die Untergruppe* E^1 *von* B^1 *der regulären unendlichblättrigen Überlagerungen eines endlichen zusammenhängenden Komplexes sind freie abelsche Gruppen vom Range* 0, 1 *oder unendlich.*

Beweis. Die Gruppen B^1 und E^1 sind nach Satz III freie abelsche Gruppen. Aus dem in Bemerkung 3 zitierten Satz von H. Hopf und aus Satz IV folgt die Behauptung für die Gruppe E^1. Daß auch B^1 nur einen der angegebenen Ränge haben kann, zeigen wir, indem wir beweisen, daß die Gruppe B^1/E^1 den Rang 0 oder unendlich hat. Nach 4.4 ist die Gruppe B^1/E^1 isomorph einer Gruppe X von Charakteren der ersten Homologiegruppe $\mathfrak{B}^1$ der Überlagerung $\boldsymbol{K}$. Es seien C_i^1 $(i = 1, \ldots, n)$ Cozyklen, f_i die ihnen entsprechenden Homomorphismen von $\mathfrak{B}^1$ in die additive Gruppe der ganzen Zahlen; f_1 bilde $\mathfrak{B}^1$ nicht auf die Nullgruppe ab. Nach 4.4 gibt es eine solche Untergruppe $\mathfrak{B}_0^1$ von $\mathfrak{B}^1$, daß $\mathfrak{B}^1/\mathfrak{B}_0^1$ endlich viele Erzeugende besitzt und daß jeder Homomorphismus $\Sigma\, t_i\, f_i$ die Elemente von $\mathfrak{B}_0^1$ auf 0 abbildet. Es seien ζ_i $(i = 1, \ldots, m)$ Homologiezyklen, die ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{B}^1/\mathfrak{B}_0^1$ repräsentieren; c_i^1 seien Zyklen, die die ζ_i repräsentieren. Es gibt eine solche Decktransformation a von $\boldsymbol{K}$, daß $|aC^1|$ fremd ist zu allen Teilkomplexen $|c_i^1|$. Zu aC^1 gehört ein Homomorphismus g von $\mathfrak{B}^1$ in die Gruppe der ganzen Zahlen, der nicht alle Elemente auf 0 abbildet; wohl aber hat g auf den Homologiezyklen ζ_i den Wert 0. Es kann daher g nicht alle Elemente von $\mathfrak{B}_0^1$ auf 0 abbilden; g liegt nicht in der von den f_i erzeugten Untergruppe. Damit ist gezeigt: B^1/E^1 hat entweder den Rang 0 oder den Rang unendlich.

Bemerkung: Satz V läßt sich folgendermaßen verschärfen: Die Gruppen B^1 und E^1 der regulären unendlichblättrigen Überlagerungen eines (endlichen oder unendlichen) zusammenhängenden Komplexes sind freie abelsche Gruppen vom Range 0, 1 oder unendlich.

II. Anwendungen auf Mannigfaltigkeiten

6. Die zweite Homotopiegruppe von dreidimensionalen geschlossenen Mannigfaltigkeiten

6.1. M^n sei eine orientierbare unberandete n-dimensionale Mannigfaltigkeit; M^n kann endlich oder unendlich sein. Der Homologie- und Cohomologietheorie von M^n legen wir endliche ganzzahlige Ketten zugrunde. Den durch die Dualität induzierten Isomorphismus der k-ten Cohomologiegruppe B^k auf die $(n-k)$-te Homologiegruppe $\mathfrak{B}^{n-k}$ bezeichnen wir mit Δ. Der Isomorphismus Δ ist vertauschbar mit den durch einen Automorphismus von M^n induzierten Isomorphismen der Homologie- und Cohomologiegruppen. Ist $\mathbf{M}^n$ eine Überlagerung von M^n, so ist Δ vertauschbar mit den durch die Projektionsabbildung induzierten Homomorphismen der Homologie- und Cohomologiegruppen.

Aus Satz III in 4.1 folgt daher:

Die $(n-1)$-te Homologiegruppe (berechnet unter Zugrundelegung endlicher ganzzahliger Ketten) einer orientierbaren unberandeten n-dimensionalen Mannigfaltigkeit ist eine freie abelsche Gruppe.

Aus Satz II in 3.5 folgt:

$\mathbf{M}^n$ sei die universelle Überlagerung der orientierbaren geschlossenen n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M^n mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$. Dann sind die $(n-1)$-ten Homologiegruppen von M^n und $\mathbf{M}^n$ sowie der durch die Projektion von $\mathbf{M}^n$ auf M^n induzierte Homomorphismus der $(n-1)$-ten Homologiegruppe von $\mathbf{M}^n$ in die $(n-1)$-te Homologiegruppe von M^n durch $\mathfrak{G}$ bestimmt; insbesondere sind also auch das Bild und der Kern dieses Homomorphismus (als Untergruppen der entsprechenden Gruppen) durch $\mathfrak{G}$ bestimmt.
(Dabei ist die Homologiegruppe von $\mathbf{M}^n$ aufzufassen als Gruppe, die die Deckentransformationengruppe als Automorphismengruppe besitzt.)

Aus Satz IV in 5.2 und Satz V in 5.4 folgt:

Ist $\mathbf{M}^n$ reguläre unendlichblättrige Überlagerung einer geschlossenen orientierbaren n-dimensionalen Mannigfaltigkeit, so ist die $(n-1)$-te Homologiegruppe von $\mathbf{M}^n$ (berechnet unter Zugrundelegung endlicher ganzzahliger Ketten) eine freie abelsche Gruppe vom Range 0, 1 oder unendlich; ist $\mathbf{M}^n$ universelle Überlagerung, so ist dieser Rang gleich der um eins verminderten Anzahl der Enden der Fundamentalgruppe der Grundmannigfaltigkeit.

6.2. Es sei K ein zusammenhängender Komplex. Der Homologietheorie von K und seiner Überlagerungen legen wir endliche ganzzahlige Ketten zugrunde. Unter den Homotopiegruppen von K verstehen wir die Homotopiegruppen des zu K gehörenden Polyeders $\overline{K}$. Nach S. Eilenberg [5] kann die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ von K aufgefaßt werden als Automorphismengruppe der Homotopiegruppen Π^n von K. Es existiert ein natürlicher Homomorphismus h der n-ten Homotopiegruppe $\mathfrak{B}^n$ in die n-te Homologiegruppe Π^n von K; den Kern von h bezeichnen wir mit Γ^n, das Bild von Π^n bei h mit $\mathfrak{S}^n$. $\boldsymbol{K}$ sei die universelle Überlagerung von K; die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ von K kann aufgefaßt werden als Decktransformationengruppe von $\boldsymbol{K}$ und daher auch als Automorphismengruppe der Homologiegruppen $\mathfrak{B}^n(\boldsymbol{K})$ von $\boldsymbol{K}$. Den durch die Projektionsabbildung induzierten Homomorphismus von $\mathfrak{B}^n(\boldsymbol{K})$ in $\mathfrak{B}^n(K)$ bezeichnen wir mit P. Sind die Homotopiegruppen Π^m von K für $2 \leqslant m \leqslant N-1$ Nullgruppen, so existiert ein solcher Operatorisomorphismus i der N-ten Homotopiegruppe $\Pi^N(K)$ auf die N-te Homologiegruppe $\mathfrak{B}^N(\boldsymbol{K})$, daß $P\,i = h$.

6.3. Aus den Sätzen von 6.1 und 6.2 ergibt sich nun unmittelbar:

Satz VI. *Die zweite Homotopiegruppe einer geschlossenen dreidimensionalen Mannigfaltigkeit M^3 ist eine freie abelsche Gruppe vom Range* 0, 1 *oder unendlich; der Rang ist* 0, *wenn die Fundamentalgruppe* $\mathfrak{G}$ *von* M^3 *endlich ist oder ein Ende hat, er ist* 1 *oder unendlich, je nachdem* $\mathfrak{G}$ *zwei oder unendlich viele Enden hat.*

Dieser Satz ist von H. Hopf in [9] ohne Beweis ausgesprochen worden; die Aufgabe, ihn zu beweisen, bildete den Anstoß für die vorliegende Arbeit.

Weiter folgt aus 6.1 und 6.2:

Die Mannigfaltigkeit M^3 ist genau dann asphärisch (d. h. es ist genau dann Π^m Nullgruppe für $m \geqslant 2$), wenn ihre Fundamentalgruppe ein Ende hat.

Die zweite Homotopiegruppe einer orientierbaren M^3 ist als Gruppe mit dem Operatorbereich $\mathfrak{G}$ durch $\mathfrak{G}$ bestimmt; auch der natürliche Homomorphismus der zweiten Homotopiegruppe in die zweite Homologiegruppe ist durch $\mathfrak{G}$ bestimmt, insbesondere also auch die Untergruppe Γ^2 der Homotopiegruppe Π^2, die Untergruppe $\mathfrak{S}^2$ der Homologiegruppe $\mathfrak{B}^2$ und die Faktorgruppe $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2$.

Die nähere Beschreibung dieser Abhängigkeiten ist Satz II in 3.5 zu entnehmen.

7. Die zweite Homotopiegruppe einer dreidimensionalen berandeten Mannigfaltigkeit

7.1. In diesem Abschnitt betrachten wir dreidimensionale orientierbare Mannigfaltigkeiten; M^3 bezeichne stets eine solche Mannigfaltigkeit. Unter einer „berandeten Mannigfaltigkeit“ verstehen wir eine Mannigfaltigkeit mit nicht-leerem Rand. Der Homologie- und Cohomologietheorie werden ganzzahlige endliche Ketten zugrunde gelegt.

Der folgende Dualitätssatz darf als bekannt gelten:

Die zweite Homologiegruppe einer Mannigfaltigkeit M^3 ohne endliche Randflächen ist isomorph derjenigen Untergruppe der ersten Cohomologiegruppe von M^3, deren Elemente Cozyklen enthalten, die auf den Kanten der Randflächen den Wert 0 haben.

Ferner werden wir uns wiederholt auf den folgenden Satz von H. Kneser [14] zu stützen haben: Auf einer endlichen und von der Kugel verschiedenen Randfläche einer M^3 gibt es einen solchen eindimensionalen Zyklus z^1, daß $n\,z^1$ (n ganz) nur für $n = 0$ in M^3 berandet. Insbesondere ist die Fundamentalgruppe einer M^3, die eine endliche und von der Kugel verschiedene Randfläche besitzt, unendlich.

7.2. **Satz VII.** *Dafür, daß eine dreidimensionale orientierbare berandete endliche Mannigfaltigkeit asphärisch ist, ist hinreichend, daß sie keine Kugeln als Randflächen besitzt und ihre Fundamentalgruppe ein oder zwei Enden hat.*

Bemerkung: Eine endliche Mannigfaltigkeit M^3 mit Kugeln als Randflächen ist offenbar genau dann asphärisch, wenn sie nur eine Randfläche besitzt und einfach zusammenhängend ist.

Beweis von Satz VII: Die universelle Überlagerung $\mathbf{M}^3$ der Mannigfaltigkeit M^3 besitzt keine Kugeln als Randflächen; M^3 besitzt nämlich nach Voraussetzung keine Kugeln und, da M^3 orientierbar ist, auch keine projektiven Ebenen als Randflächen. Nach dem Satz von Kneser besitzt $\mathbf{M}^3$ daher überhaupt keine endlichen Randflächen. Wenn wir gezeigt haben, daß ein eindimensionaler Cozyklus von $\mathbf{M}^3$, der auf den Kanten der Randflächen den Wert 0 hat, Corand ist, so folgt aus dem Dualitätssatz, daß die zweite Homologiegruppe von $\mathbf{M}^3$ die Nullgruppe ist. Da die höherdimensionalen Homologiegruppen trivialerweise Nullgruppen sind, so folgt dann (nach dem in 6.2 erwähnten Satz), daß M^3 asphärisch ist. Um zu zeigen, daß jeder eindimensionale Cozyklus von $\mathbf{M}^3$, der auf den Kanten der Randflächen den Wert 0 hat, Corand ist, unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ von M^3 habe ein Ende. Da ein eindimensionaler Cozyklus von $\boldsymbol{M}^3$ auf allen Zyklen den Wert 0 hat, ist die erste Cohomologiegruppe B^1 von $\boldsymbol{M}^3$ gleich ihrer Untergruppe E^1, nach Satz IV in 5.2 also die Nullgruppe.

2. Die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ von M^3 habe zwei Enden. Nach H. Hopf [10], S. 97, besitzt $\mathfrak{G}$ eine unendlich zyklische Untergruppe von endlichem Index; daraus folgt, daß jede unendlich zyklische Untergruppe von $\mathfrak{G}$ endlichen Index in $\mathfrak{G}$ hat. Wir wählen den Pol der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ auf einer Randfläche; nach dem Satz von Kneser gibt es einen solchen geschlossenen Weg w auf dieser Randfläche, daß das w entsprechende Element a der Fundamentalgruppe eine unendlich zyklische Untergruppe erzeugt. Es sei nun C^1 ein Cozyklus der universellen Überlagerung $\boldsymbol{M}^3$ von M^3, der auf den Kanten der Randflächen den Wert 0 hat. Wir bestimmen gemäß 2.2 die Funktion $f(x)$ aus $\Phi(\mathfrak{G}, \mathfrak{J})$, die zum Cozyklus C^1 gehört. (Dabei bezeichnet $\mathfrak{J}$ die Gruppe, die aus dem Einselement von $\mathfrak{G}$ besteht.) Aus der C^1 auferlegten Bedingung und der Konstruktion von a folgt, daß $f(a^n) = 0$ für alle n. Die Elemente von $\mathfrak{G}$ lassen sich darstellen in der Form $a^n a_i$ $(i = 1, \ldots, m;\ a_i \in \mathfrak{G})$. Es ist (bei festem $b \in \mathfrak{G}$) $f(x\,b) = f(x)$ für fast alle $x \in \mathfrak{G}$; daher ist $f(a^n a_i) = f(a^n) = 0$ für fast alle n, d. h. (da es nur endlich viele Elemente a_i gibt) $f(x) = 0$ für fast alle $x \in \mathfrak{G}$: $f(x)$ ist Element von $\Phi_2(\mathfrak{G}, \mathfrak{J})$ und C^1 nach 2.52 Corand.

7.3. **Satz VIII.** *Die zweite Homotopiegruppe einer dreidimensionalen orientierbaren endlichen Mannigfaltigkeit, deren nicht leerer Rand aus Ringflächen (d. h. geschlossenen orientierbaren Flächen vom Geschlecht* 1*) besteht, ist die Nullgruppe oder die freie abelsche Gruppe vom Rang unendlich, je nachdem die Fundamentalgruppe der Mannigfaltigkeit endlich (d. h. ein oder zwei) oder unendlich viele Enden hat.*

Beweis: Hat die Fundamentalgruppe der Mannigfaltigkeit ein oder zwei Enden, so ist die zweite Homotopiegruppe nach Satz VII die Nullgruppe. Wir haben daher nur noch Mannigfaltigkeiten zu betrachten, deren Fundamentalgruppen unendlich viele Enden haben. $\boldsymbol{M}^3$ sei die universelle Überlagerung der Mannigfaltigkeit M^3; die zweite Homotopiegruppe von M^3 ist isomorph der zweiten Homologiegruppe von $\boldsymbol{M}^3$. Nach dem Dualitätssatz ist die zweite Homologiegruppe von $\boldsymbol{M}^3$ isomorph einer gewissen Untergruppe der ersten Cohomologiegruppe von $\boldsymbol{M}^3$; sie ist daher als Untergruppe einer freien abelschen Gruppe (Satz III in 4.1) eine freie abelsche Gruppe. Wir haben zu zeigen, daß ihr Rang unendlich ist. Die Mannigfaltigkeit $\boldsymbol{M}^3$ wird von Zylindern und Ebenen berandet; denn nach dem Satz von Kneser kann eine Ringfläche nicht Randfläche einer einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit sein. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. Unter den Randflächen von $\boldsymbol{M}^3$ gibt es nur endlich viele Zylinder. Es sei K^2 der Komplex der Randflächen von $\boldsymbol{M}^3$. Wir betrachten den natürlichen Homomorphismus der ersten Cohomologiegruppe $B^1(\boldsymbol{M}^3)$ in die erste Cohomologiegruppe $B^1(K^2)$ (vgl. Hurewicz-Wallman [13], S. 115). Der Kern $B^1_0(\boldsymbol{M}^3)$ dieses Homomorphismus besteht aus denjenigen Cohomologieklassen, die Cozyklen enthalten, die auf allen Kanten von K^2 den Wert 0 haben. Nach dem Dualitätssatz ist daher die zweite Homologiegruppe von $\boldsymbol{M}^3$ isomorph $B^1_0(\boldsymbol{M}^3)$, und wir haben nur noch zu zeigen, daß der Rang von $B^1_0(\boldsymbol{M}^3)$ unendlich ist. Der Rang von $B^1(\boldsymbol{M}^3)$ ist nach Satz IV in 5.2 unendlich; der Rang der Faktorgruppe $B^1(\boldsymbol{M}^3)/B^1_0(\boldsymbol{M}^3)$ ist endlich, denn diese Gruppe ist isomorph einer Untergruppe von $B^1(K^2)$, deren Rang endlich ist (nämlich gleich der Anzahl der Komponenten von K^2, die einem Zylinder homöomorph sind). Daraus folgt unmittelbar, daß der Rang von $B^1_0(\boldsymbol{M}^3)$ unendlich ist.

2. Unter den Randflächen von $\boldsymbol{M}^3$ gibt es unendlich viele Zylinder. Wir werden hier die Voraussetzung über die Fundamentalgruppe von M^3 nicht benützen, sondern im Anschluß an J. H. C. Whitehead [20], S. 163, allgemeiner zeigen: Wird die universelle Überlagerung $\boldsymbol{M}^3$ einer endlichen Mannigfaltigkeit von n Zylindern und (mindestens) einer weiteren Fläche berandet, so ist der Rang der zweiten Homologiegruppe von $\boldsymbol{M}^3$ mindestens gleich n. Wir wählen ein zweidimensionales Simplex X^2_0 auf einer (von den n Zylindern verschiedenen) Randfläche und zweidimensionale Simplexe X^2_i auf den Zylindern $\mathfrak{Z}_i$ $(i = 1,\ldots,n)$; x^0_k sei der Eckpunkt der dualen Zellteilung im Corand X^3_k von X^2_k $(k = 0,\ldots,n)$. Wir bestimmen solche eindimensionale Ketten c^1_i $(i = 1,\ldots,n)$ der dualen Zellteilung, daß $\partial c^1_i = x^0_i - x^0_0$; $|c^1_i|$ ist fremd zu den Randflächen. C^1_i sei ein eindimensionaler Zyklus von $\mathfrak{Z}_i$, dessen Homologieklasse die erste Homologiegruppe von $\mathfrak{Z}_i$ erzeugt; D^2_i sei eine solche zweidimensionale Kette, daß $\partial D^2_i = C^1_i$ $(i = 1,\ldots,n)$. Es gibt Decktransformationen a_i und b_i von $\boldsymbol{M}^3$ mit den folgenden Eigenschaften: a_i und b_i bilden $\mathfrak{Z}_i$ auf sich ab; $|a_i D^2_i|$ und $|b_i D^2_i|$ sind fremd zu $|c^1_j|$ und $|X^2_k|$; es gibt eine solche zweidimensionale Kette B^2_i von $\mathfrak{Z}_i$, daß $\partial B^2_i = a_i C^1_i - b_i C^1_i$ und X^2_i in B^2_i mit dem Koeffizienten ± 1 auftritt $(i, j = 1,\ldots,n;$ $k = 0,\ldots,n)$. Die Kette $a_i D^2_i - b_i D^2_i - B^2_i = Z^2_i$ ist ein zweidimensionaler Zyklus, in dem X^2_i mit dem Koeffizienten ± 1 und X^2_k $(k \neq i)$

mit dem Koeffizienten 0 auftritt; $|Z_i^2|$ ist fremd zu $|c_j^1|$. Wir zeigen, daß die Homologieklassen der n Zyklen Z_i^2 linear unabhängig sind. Es sei $\Sigma t_j Z_j^2 = \partial C^3$; X_0^3 tritt in C^3 mit dem Koeffizienten 0, X_i^3 mit dem Koeffizienten $\pm t_i$ auf $(i = 1, \ldots, n)$. Wir berechnen die Schnittzahl der (dualen) Kette c_i^1 mit $\Sigma t_j Z_j^2$:

$$0 = c_i^1 \cdot \Sigma t_j Z_j^2 = c_i^1 \cdot \partial C^3 = \partial c_i^1 \cdot C^3 = (x_i^0 - x_0^0) \cdot C^3 = \pm t_i \ ,$$

d. h. die Homologieklassen der Z_i^2 sind linear unabhängig. Damit ist Satz VIII bewiesen.

Bemerkungen: 1. Spezielle Mannigfaltigkeiten des betrachteten Typus sind die Außenräume von Verschlingungen in der dreidimensionalen Sphäre S^3; insbesondere ist daher in Satz VIII enthalten:

Die Vermutung „Der Außenraum eines Knotens in S^3 ist asphärisch“ — (vgl. S. Eilenberg [4], *J. H. C. Whitehead* [20]) *— ist äquivalent der algebraischen Vermutung „Alle Knotengruppen haben ein oder zwei Enden“.*

Als Anwendung beweisen wir: Der Außenraum eines Torusknotens ist asphärisch.

Das Zentrum der Fundamentalgruppe des Außenraums enthält nämlich ein Element unendlicher Ordnung (Seifert-Threlfall [17], S. 179/180). Eine solche Gruppe besitzt nach H. Hopf [10], S. 97, und H. Freudenthal [8], S. 31, ein oder zwei Enden; der Außenraum ist daher asphärisch.

2. Der erste Teil von Satz VIII läßt sich folgendermaßen verschärfen: Die zweite Homotopiegruppe einer endlichen Mannigfaltigkeit M^3 ist eine freie abelsche Gruppe; ihr Rang ist 0 oder unendlich außer in den beiden folgenden Fällen: Erstens: Die Mannigfaltigkeit ist geschlossen und ihre Fundamentalgruppe hat zwei Enden; dann ist der Rang eins. Zweitens: Die Mannigfaltigkeit wird nur von Kugeln berandet und ihre Fundamentalgruppe ist endlich; in diesem Fall läßt sich der Rang leicht aus der Anzahl der Randflächen und der Ordnung der Fundamentalgruppe berechnen.

8. Die Fundamentalgruppen dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten

8.1. Auf Grund der Ergebnisse des letzten Abschnittes sollen Bedingungen angegeben werden, denen eine Gruppe genügt, die als Fundamentalgruppe einer dreidimensionalen endlichen orientierbaren (i. a. berandeten) Mannigfaltigkeit auftritt. Zu jeder Mannigfaltigkeit M^3 gibt es eine Mannigfaltigkeit M_3^0, die dieselbe Fundamentalgruppe wie M^3

und keine Kugeln als Randflächen besitzt; eine solche Mannigfaltigkeit M_0^3 erhält man, indem man an die Kugelrandflächen von M^3 Vollkugeln ansetzt. Wir dürfen daher in der Herleitung der Resultate annehmen, daß die Mannigfaltigkeiten M^3 von keinen Kugeln berandet werden, und die Sätze trotzdem für allgemeine Mannigfaltigkeiten aussprechen. Der Homologietheorie werden ganzzahlige endliche Ketten zugrunde gelegt.

8.2. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ mit einem oder zwei Enden sei Fundamentalgruppe einer M^3; falls $\mathfrak{G}$ zwei Enden hat, sei M^3 eine berandete Mannigfaltigkeit. Dann ist nach Satz VI in 6.3 und Satz VII in 7.2 M^3 asphärisch. Nach P. Smith [19] besitzt die Fundamentalgruppe eines asphärischen Raumes kein Element endlicher Ordnung. Nach W. Hurewicz [12], S. 215—224, sind die Homologiegruppen eines asphärischen Raumes durch dessen Fundamentalgruppe bestimmt; wir bezeichnen die Gruppe, die als n-te Homologiegruppe eines asphärischen Raumes mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ auftritt, mit $\mathfrak{H}^n(\mathfrak{G})$. Ist $\mathfrak{G}$ Fundamentalgruppe einer asphärischen berandeten M^3, so ist $\mathfrak{H}^n(\mathfrak{G})$ die Nullgruppe für $n \geqslant 3$. Ist $\mathfrak{G}$ Fundamentalgruppe einer geschlossenen asphärischen M^3, so ist $\mathfrak{H}^n(\mathfrak{G})$ die Nullgruppe für $n \geqslant 4$; ferner ist in diesem Fall auf Grund des Dualitätssatzes die Faktorgruppe $\mathfrak{H}_0^1(\mathfrak{G})$ der Gruppe $\mathfrak{H}^1(\mathfrak{G})$ nach der Untergruppe der Elemente endlicher Ordnung von $\mathfrak{H}^1(\mathfrak{G})$ isomorph der Gruppe $\mathfrak{H}^2(\mathfrak{G})$. Wir fassen zusammen:

Die Gruppe $\mathfrak{G}$ habe ein oder zwei Enden und sei Fundamentalgruppe einer dreidimensionalen orientierbaren endlichen Mannigfaltigkeit M^3; falls $\mathfrak{G}$ zwei Enden hat, werde M^3 nicht nur von Kugeln berandet; dann erfüllt $\mathfrak{G}$ die folgenden Bedingungen: $\mathfrak{G}$ besitzt kein Element endlicher Ordnung; die Gruppen $\mathfrak{H}^n(\mathfrak{G})$ sind Nullgruppen für $n \geqslant 4$. Wird die Mannigfaltigkeit M^3 nicht nur von Kugeln berandet, so ist $\mathfrak{H}^3(\mathfrak{G})$ die Nullgruppe; wird sie nur von Kugeln berandet, so ist $\mathfrak{H}_0^1(\mathfrak{G})$ isomorph $\mathfrak{H}^2(\mathfrak{G})$.

8.3. Als Anwendung soll untersucht werden, welche abelschen Gruppen $\mathfrak{G}$ als Fundamentalgruppen von Mannigfaltigkeiten M^3 auftreten können. Als Fundamentalgruppe besitzt $\mathfrak{G}$ endlich viele Erzeugende; nach H. Hopf [10], S. 97 und 99, besitzt eine unendliche abelsche Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden ein oder zwei Enden, und zwar zwei Enden genau dann, wenn sie den Rang eins hat. Ist $\mathfrak{G}$ die freie abelsche Gruppe vom Range n, so ist $\mathfrak{H}^n(\mathfrak{G})$ unendlich zyklisch und $\mathfrak{H}^{n+1}(\mathfrak{G})$ die Nullgruppe (W. Hurewicz [12], S. 222). Wie in 7.1 bemerkt wurde, ist die Fundamentalgruppe einer M^3, die nicht nur von Kugeln berandet wird, unendlich. Wir erhalten somit:

Satz IX. *Ist $\mathfrak{G}$ abelsche Fundamentalgruppe einer berandeten dreidimensionalen orientierbaren endlichen Mannigfaltigkeit, die nicht nur von Kugeln berandet wird, so ist $\mathfrak{G}$ die freie abelsche Gruppe vom Range eins oder zwei.*

Diese beiden Gruppen treten auch wirklich auf als Fundamentalgruppen von Mannigfaltigkeiten der verlangten Art. Die freie abelsche Gruppe vom Range eins ist Fundamentalgruppe des Volltorus; die freie abelsche Gruppe vom Range zwei ist Fundamentalgruppe des topologischen Produktes von Torus und Strecke.

Bei abelschen Fundamentalgruppen von dreidimensionalen orientierbaren endlichen Mannigfaltigkeiten, die nur von Kugeln berandet werden, können wir schließen: Ist der Rang von $\mathfrak{G} \geqslant 2$, so ist $\mathfrak{G}$ die freie abelsche Gruppe vom Range drei (P. A. Smith hat in [18] gezeigt, daß der Rang einer abelschen Gruppe, die als Fundamentalgruppe einer geschlossenen dreidimensionalen Mannigfaltigkeit auftritt, nicht größer als drei ist; unser Beweis kann als Ausgestaltung desjenigen von P. A. Smith aufgefaßt werden.) K. Reidemeister hat in [16] (mit anderen Methoden) die abelschen Gruppen aufgezählt, die als Fundamentalgruppen von geschlossenen orientierbaren dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten auftreten: es sind dies die zyklischen Gruppen und die freie abelsche Gruppe vom Range drei. Zusammen mit Satz IX ergibt dies:

Satz IX′. *Ist $\mathfrak{G}$ abelsche Fundamentalgruppe einer dreidimensionalen orientierbaren endlichen Mannigfaltigkeit, so ist $\mathfrak{G}$ zyklisch oder die freie abelsche Gruppe vom Range zwei oder drei.*

8.4. Aus Satz IX folgt leicht der folgende Satz von R. H. Fox ([6], S. 46):

Das Polyeder P sei in die dreidimensionale Sphäre eingebettet und habe eine abelsche Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$; dann ist $\mathfrak{G}$ die freie abelsche Gruppe vom Range 0, 1 oder 2.

Beweis: Eine geeignet gewählte abgeschlossene Umgebung von P ist eine Mannigfaltigkeit M^3 mit derselben Fundamentalgruppe wie P; wird M^3 nur von Kugeln berandet, so ist ihre Fundamentalgruppe die Nullgruppe, wie leicht aus dem Satz über die Fundamentalgruppe eines zusammengesetzten Komplexes geschlossen werden kann (Seifert-Threlfall [17], S. 179).

Aus Satz IX′ folgt: Das Polyeder P sei in eine dreidimensionale orientierbare Mannigfaltigkeit eingebettet und habe eine abelsche Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$; dann ist $\mathfrak{G}$ zyklisch oder die freie abelsche Gruppe vom Range zwei oder drei.

Bemerkung: Für die Gültigkeit des letzten Satzes genügt es, wenn P im Kleinen eineindeutig in die Mannigfaltigkeit eingebettet ist.

8.5. Ohne Beweis geben wir noch zwei weitere Sätze über die Fundamentalgruppen von Mannigfaltigkeiten M^3 an:

1. Ist die Gruppe $\mathfrak{G}$ mit zwei Enden Fundamentalgruppe einer dreidimensionalen orientierbaren endlichen Mannigfaltigkeit, so ist $\mathfrak{G}$ unendlich zyklisch oder das freie Produkt von zwei zyklischen Gruppen der Ordnung zwei. Die unendlich zyklische Gruppe ist Fundamentalgruppe des topologischen Produktes von Kreis und Kugel, das freie Produkt von zwei Gruppen der Ordnung zwei Fundamentalgruppe der topologischen Summe (Seifert-Threlfall [17], S. 218) zweier dreidimensionaler projektiver Räume.

2. Ist die Gruppe $\mathfrak{G}$ mit unendlich vielen Enden Fundamentalgruppe einer dreidimensionalen endlichen Mannigfaltigkeit, so besteht das Zentrum von $\mathfrak{G}$ nur aus dem Einselement.

Der Beweis von (1) kann rein gruppentheoretisch geführt werden, wenn man bedenkt, daß nach Satz IX′ jede abelsche Untergruppe endlichen Indexes von $\mathfrak{G}$ unendlich zyklisch ist. (2) kann mit den Methoden bewiesen werden, die P. A. Smith in [19] entwickelt hat.

(Eingegangen den 5. Januar 1949.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] *B. Eckmann*, Der Cohomologie-Ring einer beliebigen Gruppe, Comm. Math. Helv. 18, 232—282 (1946).

[2] *B. Eckmann*, On complexes over a ring and restricted cohomology groups, Proc. Nat. Ac. Sci. 33, 275—281 (1947).

[3] *B. Eckmann*, On infinite complexes with automorphisms, Proc. Nat. Sci. 33 372—376 (1947).

[4] *S. Eilenberg*, Sur les courbes sans nœuds, Fund. Math. 28, 233—242 (1936).

[5] *S. Eilenberg*, On the relation between the fundamental group of a space and the higher homotopy groups, Fund. Math. 32, 167—175 (1939).

[6] *R. H. Fox*, On the imbedding of polyhedra in 3-space Ann. Math. 49. 462 bis 470 (1948).

[7] *H. Freudenthal*, Über die Enden topologischer Räume und Gruppen, Math. Zeitschr. 33, 692—713 (1931).

[8] *H. Freudenthal*, Über die Enden diskreter Räume und Gruppen, Comm. Math. Helv. 17, 1—38 (1945).

[9] *H. Hopf*, Räume, die Transformationsgruppen mit kompakten Fundamentalbereichen gestatten, Verhandlungen der Schweizer. Naturforschenden Gesellschaft (1942), 79.

[10] *H. Hopf*, Enden offener Räume und unendliche diskontinuierliche Gruppen, Comm. Math. Helv. 16, 81—100 (1944).

[11] *H. Hopf*, Über die Bettischen Gruppen, die zu einer beliebigen Gruppe gehören, Comm. Math. Helv. 17, 39—79 (1945).

[12] *W. Hurewicz*, Beiträge zur Topologie der Deformationen (IV), Proc. Akad. Amsterdam 39, 215—224 (1936).

[13] *W. Hurewicz* and *H. Wallman*, Dimension theory (Princeton 1941).

[14] *H. Kneser*, Eine Bemerkung über dreidimensionale Mannigfaltigkeiten, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1925), 128—130.

[15] *L. Pontrjagin*, Topological groups (Princeton 1939).

[16] *K. Reidemeister*, Kommutative Fundamentalgruppen, Monatshefte Math. Ph. 43, 20—28 (1936).

[17] *H. Seifert* und *W. Threlfall*, Lehrbuch der Topologie (Leipzig-Berlin 1934).

[18] *P. A. Smith*, Manifolds with abelian fundamental group, Ann. Math. 37, 526—533 (1936).

[19] *P. A. Smith*, Transformations of finite period, Ann. Math. 39, 127—164 (1938).

[20] *J. H. C. Whitehead*, On the asphericity of regions in a 3-sphere, Fund. Math. 32, 149—166 (1939).

[21] *H. Zassenhaus*, Lehrbuch der Gruppentheorie, Bd. I (Leipzig-Berlin 1937).