Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 23 (1949)

Artikel: Eine Bemerkung zur Hebbarkeit des Randes einer Riemannschen Fläche.

Autor: Strebel, Kurt

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19770

Eine Bemerkung zur Hebbarkeit des Randes einer Riemannschen Fläche

Von Kurt Strebel, Zürich

Leo Sario hat in seiner Dissertation[1]) den Begriff der „Hebbarkeit" des Randes einer Riemannschen Fläche eingeführt. Danach nennt man den Rand „hebbar" (oder „absolut hebbar"), wenn es auf der Fläche keine eindeutigen analytischen Funktionen mit endlichem Dirichlet-Integral außer den Konstanten gibt. Um anderseits den etwas feineren Begriff der „relativen Hebbarkeit" zu definieren, geht man nach *Sario* folgendermaßen vor: Man betrachtet alle kompakten Teilgebiete F_0 der gegebenen Riemannschen Fläche F, für die das Komplement $F - F_0$ zusammenhängend ist. Ist dann eine in einem solchen Gebiet $F - F_0$ eindeutige analytische Funktion mit endlichem Dirichlet-Integral, deren Realteil auf dem Rand Γ_0 von F_0 verschwindet, stets notwendig eine Konstante, so heißt der Rand von F relativ hebbar.

Ist die Fläche F von endlichem Geschlecht, so kann man sie auf ein Teilgebiet einer geschlossenen Riemannschen Fläche F^* von demselben Geschlecht konform abbilden. Dadurch erhält der Rand Γ von F eine Darstellung durch Punkte von F^*. Ist er hebbar, relativ oder absolut, so kann die Punktmenge Γ auf F^*, wie *Sario* gezeigt hat, kein Kontinuum enthalten, sondern muß eine diskrete Punktmenge sein.

Es erhebt sich nun die Frage, ob das auch hinreichend sei, oder ob es diskrete, nicht hebbare Punktmengen gebe. *R. Nevanlinna* und *P. Myrberg* haben durch Angabe spezieller Beispiele gezeigt, daß es in der Tat solche Punktmengen gibt.

Man kann nun aber leicht weitergehen und durch Angabe eines Beispiels einer Funktion zeigen, daß der Rand von F nicht mehr relativ hebbar ist, sobald die Punktmenge Γ auf F^* positives Flächenmaß hat:

Sei F ein Teilgebiet einer geschlossenen Riemannschen Fläche F^* von demselben Geschlecht mit einem Rand Γ von positivem Flächenmaß. Wir wählen mit *Sario* das kompakte Teilgebiet F_0 von F so, daß das

[1]) *Leo Sario,* Über Riemannsche Flächen mit hebbarem Rand. Helsinki 1948.

Komplement $F - F_0$ (und somit auch $F^* - F_0$) zusammenhängend und schlichtartig ist. $F^* - F_0$ enthält den gesamten Rand von F in seinem Innern. In $F - F_0$ wählen wir einen beliebigen Punkt P aus und machen die Schlitzabbildung von $F - F_0$ mit zur imaginären Achse parallelen Schlitzen und dem Pol P.

$$w^{(1)}(z) = u^{(1)}(x,y) + i\, v^{(1)}(x,y)$$

sei die analytische Funktion auf $F - F_0$, die die Abbildung leistet. Diese erhält man bekanntlich so, daß man zunächst mittels des Dirichletschen Prinzips das Strömungspotential $v^{(1)}$ konstruiert mit der dem gegebenen Pol P und Residuum entsprechenden Singularität, und dann dazu den Realteil $u^{(1)}$ aufsucht. Ist $h(x,y)$ irgendeine stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion auf $F - F_0$ mit endlichem Dirichlet-Integral, die in einer Umgebung des Punktes P verschwindet, so gilt für das Strömungspotential $v^{(1)}(x,y)$ die Gleichung

$$D_{F-F_0}(v^{(1)}, h) \equiv \iint\limits_{F-F_0} (v_x^{(1)} h_x + v_y^{(1)} h_y)\, dx\, dy = 0 \;.$$

Diese Gleichung ergibt leicht[2]), daß der Rand des Bildgebietes von $F - F_0$ in der $w^{(1)}$-Ebene den Flächeninhalt null hat. Schöpfen wir nämlich $F - F_0$ durch eine Folge von kompakten Teilgebieten

$$F_1 \subset F_2 \subset \cdots$$

aus, deren Ränder

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots$$

aus je endlich vielen, stückweise analytischen Kurven bestehen, und wählen die Funktion h so, daß sie in einer Umgebung des Randes Γ von F gleich $v^{(1)}$ ist und in einer Umgebung des Punktes P und des Randes Γ_0 und F_0 verschwindet, so gilt

$$D_{F-F_0}(v^{(1)}, h) = \lim_{n\to\infty} D_{F_n}(v^{(1)}, h) = -\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Gamma_n} h \frac{\partial v^{(1)}}{\partial n}\, ds$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Gamma_n} v^{(1)}\, du^{(1)} = 0 \;,$$

---

[2]) *Hurwitz-Courant*, Lehrbuch der Funktionentheorie, II. Teil.

wobei das letzte Integral in negativem Sinne um diejenigen Randkurven $\overline{\Gamma}_n$ des Bildes von F_n, die die Bildmenge von Γ umschließen, zu erstrecken ist. Es stellt den gesamten Flächeninhalt der von den endlich vielen getrennt liegenden Kurven, in die $\overline{\Gamma}_n$ zerfällt, umschlossenen Teilgebiete der $w^{(1)}$-Ebene dar. Der Inhalt der Bildmenge von Γ muß somit null sein.

Machen wir anderseits die Schlitzabbildung von $F^* - F_0$ mit demselben Pol P und Residuum, und wiederum zur imaginären Achse parallelen Schlitzen, so wird diesmal der Rand Γ von F, der ja ganz im Innern von $F^* - F_0$ liegt, auf eine Punktmenge von positivem Maße abgebildet. Bezeichnen wir mit

$$w^{(2)}(z) = u^{(2)}(x, y) + i v^{(2)}(x, y)$$

die entsprechende analytische Funktion, die wir uns noch durch Addition einer reellen Konstanten so normiert denken, daß $u^{(2)} - u^{(1)} = 0$ auf Γ_0, so haben wir in

$$w = w^{(2)} - w^{(1)}$$

eine auf $F - F_0$ eindeutige und nicht-konstante analytische Funktion mit endlichem Dirichlet-Integral, deren Realteil auf Γ_0 verschwindet Der Rand von F ist somit nicht hebbar.

Wir können also den **Satz** aussprechen:

Damit der Rand eines Teilgebietes F einer geschlossenen Riemannschen Fläche F^* von endlichem Geschlecht relativ hebbar sei, ist notwendig, daß er das Flächenmaß null hat.

Ist F speziell ein Gebiet der komplexen Ebene, so ist, wie *Sario* gezeigt hat, die absolute Hebbarkeit mit der relativen identisch. Somit folgt, was man auch hier direkt einsehen könnte, daß eine abgeschlossene ebene Punktmenge, um hebbar zu sein, nicht nur diskret, sondern auch vom Flächenmaße null sein muß.

(Eingegangen den 5. Februar 1949)