Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 43 (1968)

Artikel: Groupes d'homotopie des variétés de Stiefel complexes.
Autor: Sigrist, Francois
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-32911

Groupes d'homotopie des variétés de Stiefel complexes

par FRANÇOIS SIGRIST[1])

Introduction

Le but de ce travail est la détermination des groupes $\pi_{2k+p}(U_{k+m,m})$ pour $0 \leqslant p \leqslant 6$. Rappelons que $U_{k+m,m}$ est la variété des $(k+m) \times m$ matrices unitaires. Les résultats se déduisent principalement de la suite exacte d'homotopie associée à la fibration $U_{n-l,m-l} \to U_{n,m} \to U_{n,l}$. Au § 1, l'utilisation systématique d'une formule d'ECKMANN pour les espaces fibrés à base sphérique permet de déterminer les groupes d'homotopie de $U_{n,2}$. Rappelons le résultat d'ECKMANN: Soit $F \to E \to S^m$ une fibration de base sphérique, et soit $\partial(1)$ l'image du générateur de $\pi_m(S^m)$ par l'homomorphisme $\partial: \pi_m(S^m) \to \pi_{m-1}(F)$. La connaissance de $\partial(1)$ permet d'évaluer $\partial: \pi_i(S^m) \to \pi_{i-1}(F)$ sur toutes les suspensions, grâce à la formule $\partial(\Sigma\alpha) = \partial(1) \circ \alpha$. Appliquée à la fibration $S^{2n-3} \to U_{n,2} \to S^{2n-1}$, la formule ramène la détermination des groupes d'homotopie de $U_{n,2}$ à l'étude des compositions pour les applications sphériques, effectuée piincipalement par TODA.

Le § 2 traite des groupes d'homotopie de $U_{n,3}$ et $U_{n,4}$. L'application des suites exactes d'homotopie ramène la détermination des groupes d'homotopie à celle des invariants $U(n, k)$ de JAMES: Si l'on considère la fibration $U_{n-1,k-1} \to U_{n,k} \to S^{2n-1}$, l'ordre de $\partial(1)$ dans $\pi_{2n-2}(U_{n-1,k-1})$ est appelé nombre de JAMES $U(n, k)$.Une étude systématique du système de nombres $U(n, k)$ est due à JAMES: à l'aide des propriétés démontrées dans le travail de JAMES, il est possible de déterminer presque toutes les valeurs de $U(n, 3)$ et $U(n, 4)$. La K-théorie des variétés de STIEFEL complexes, étudiée par ATIYAH et TODD, permet enfin, à l'aide des théorèmes d'intégralité, d'achever complètement la détermination des groups $\pi_{2k+p}(U_{k+m,m})$, $0 \leqslant p \leqslant 6$.

§ 1. Les groupes d'homotopie de $U_{n,2}$

Nous utiliserons la suite exacte d'homotopie de la fibration $S^{2n-3} \to U_{n,2} \to S^{2n-1}$. Pour n pair, cette fibration a une section bien connue, donc $\pi_i(U_{n,2}) \cong \pi_i(S^{2n-1}) \oplus \pi_i(S^{2n-3})$. A l'aide des valeurs connues des groupes d'homotopie des sphères, on obtient alors:

---

[1]) L'auteur tient à remercier vivement MM. les professeurs B. ECKMANN et P. J. HILTON pour leurs suggestions enrichissantes au cours de la rédaction de ce travail.

n pair	$n=2$	$n=4$	$n\geqslant 6$
$\pi_{2n-4}(U_{n,2})$	0	0	0
$\pi_{2n-3}(U_{n,2})$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$
$\pi_{2n-2}(U_{n,2})$	0	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$
$\pi_{2n-1}(U_{n,2})$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}+\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}+\mathbf{Z}_2$
$\pi_{2n}(U_{n,2})$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2+\mathbf{Z}_{24}$	$\mathbf{Z}_2+\mathbf{Z}_{24}$
$\pi_{2n+1}(U_{n,2})$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2+\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$
$\pi_{2n+2}(U_{n,2})$	$\mathbf{Z}_{12}$	$\mathbf{Z}_{24}+\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_{24}$
$\pi_{2n+3}(U_{n,2})$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$
$\pi_{2n+4}(U_{n,2})$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_{30}$	$\mathbf{Z}_{240}$

Pour n impair, la fibration $S^{2n-3}\to U_{n,2}\to S^{2n-1}$ n'a pas de section. La théorème d'ECKMANN [4] affirme en effet: pour n impair, l'homomorphisme $\partial:\pi_{2n-1}(S^{2n-1})\to \pi_{2n-2}(S^{2n-3})$ n'est pas trivial, $\partial(1)$ est l'application essentielle $S^{2n-2}\to S^{2n-3}$ obtenue en prenant la $(2n-5)$-ième suspension de l'application de HOPF $p:S^3\to S^2$. Les homomorphismes $\partial:\pi_i(S^{2n-1})\to\pi_{i-1}(S^{2n-3})$ peuvent être évalués sur les suspensions à l'aide d'une formule d'ECKMANN [3]: $\partial(\Sigma\alpha)=\partial(1)\circ\alpha$. Cette formule nous permettra de déterminer ∂ pour toutes les valeurs de i inférieures à $(2n+6)$. Nous écrivons $p:S^3\to S^2$ et $q:S^7\to S^4$ pour les applications de HOPF. La référence [HU] se rapporte au livre de S. T. HU: *Homotopy theory* (Academic Press, New York-London) et la référence [TODA] au livre de H. TODA: *Composition methods in homotopy groups of spheres* (Princeton University Press).

Dimension $2n-1$

$\pi_{2n-1}(S^{2n-1})=\mathbf{Z}$ générateur 1
$\pi_{2n-2}(S^{2n-3})=\mathbf{Z}_2$ générateur $\Sigma^{2n-5}p$
$\partial(1)=\Sigma^{2n-5}p,$ [ECKMANN [4]]
∂ est un épimorphisme.

Dimension $2n$

$\pi_{2n}(S^{2n-1})=\mathbf{Z}_2$ générateur $\Sigma^{2n-3}p$
$\pi_{2n-1}(S^{2n-3})=\mathbf{Z}_2$ générateur $\Sigma^{2n-5}(p\circ\Sigma p)$ [HU, p. 328]
$\partial(\Sigma^{2n-3})=\Sigma^{2n-5}p\circ\Sigma^{2n-4}p=\Sigma^{2n-5}(p\circ\Sigma p),$
∂ est un isomorphisme.

Dimension $2n+1$

$n=3$ $\pi_7(S^5)=\mathbf{Z}_2$ générateur $\Sigma^3(p\circ\Sigma p)$
$\pi_6(S^3)=\mathbf{Z}_{12}$ [HU, p. 329]
$\partial(\Sigma^3(p\circ\Sigma p))=\Sigma p\circ(\Sigma^2(p\circ\Sigma p))=\Sigma p\circ\Sigma^2 p\circ\Sigma^3 p,$
élément d'ordre 2. [HU, p. 329]

$n \geqslant 5 \quad \pi_{2n+1}(S^{2n-1}) = \mathbf{Z}_2$ générateur $\Sigma^{2n-3}(p \circ \Sigma p)$

$\pi_{2n}(S^{2n-3}) = \mathbf{Z}_{24}$ générateur $\Sigma^{2n-7} q$ [HU, p. 330]

$\partial(\Sigma^{2n-3}(p \circ \Sigma p)) = \Sigma^{2n-5} p \circ \Sigma^{2n-4}(p \circ \Sigma p) = \Sigma^{2n-5}(p \circ \Sigma p \circ \Sigma^2 p) = 12\ \Sigma^{2n-7} q$ [TODA, p. 190]

∂ est un monomorphisme.

Dimension $2n+2$

$n=3 \quad \pi_8(S^5) = \mathbf{Z}_{24}$ générateur Σq [HU, p. 330]

$\pi_7(S^3) = \mathbf{Z}_2$ générateur $\Sigma p \circ q$ [HILTON [6]]

$\partial(\Sigma q) = \Sigma p \circ q$,

∂ est un épimorphisme.

$n \geqslant 5 \quad \pi_{2n+2}(S^{2n-1}) = \mathbf{Z}_{24}$ générateur $\Sigma^{2n-5} q$

$\pi_{2n+1}(S^{2n-3}) = 0$ [HU, p. 331]

Dimension $2n+3$

$n=3 \quad \pi_9(S^5) = \mathbf{Z}_2$ générateur $\Sigma(q \circ \Sigma^5 p)$ [HU, p. 331]

$\pi_8(S^3) = \mathbf{Z}_2$ générateur $\Sigma p \circ q \circ \Sigma^5 p$ [HU, p. 330, TODA, p. 42, HILTON [6]]

$\partial(\Sigma(q \circ \Sigma^5 p)) = \Sigma p \circ q \circ \Sigma^5 p$,

∂ est un isomorphisme.

$n \geqslant 5 \quad \pi_{2n+3}(S^{2n-1}) = 0$ [HU, p. 331]

$\pi_{2n+2}(S^{2n-3}) = 0$ [HU, p. 332]

Dimension $2n+4$

$n=3 \quad \pi_{10}(S^5) = \mathbf{Z}_2$ [HU, p. 332]

$\pi_9(S^3) = \mathbf{Z}_3$ [HU, p. 332]

∂ est trivial.

$n \geqslant 5 \quad \pi_{2n+4}(S^{2n-1}) = 0$ [HU, p. 332]

$\pi_{2n+3}(S^{2n-3}) = \mathbf{Z}_2$ [HU, p. 332]

Dimension $2n+5$

$n=3 \quad \pi_{11}(S^5) = \mathbf{Z}_2$

$\pi_{10}(S^3) = \mathbf{Z}_{15}$

∂ est trivial.

$n=5 \quad \pi_{15}(S^9) = \mathbf{Z}_2$ générateur $\Sigma^5(q \circ \Sigma^3 q)$ [TODA, p. 189]

$\pi_{14}(S^7) = \mathbf{Z}_{120}$ [HU, p. 332]

$\partial(\Sigma^5(q \circ \Sigma^3 q) = \Sigma^5 p \circ \Sigma^4 q \circ \Sigma^7 q = 0$ puisque $\Sigma^5 p \circ \Sigma^4 q = 0 : S^{11} \to S^7$

$n \geqslant 7 \quad \pi_{2n+5}(S^{2n-1}) = \mathbf{Z}_2$ générateur $\Sigma^{2n-5}(q \circ \Sigma^3 q)$ [TODA, p. 189]

$\pi_{2n+4}(S^{2n-3}) = \mathbf{Z}_{240}$ [HU, p. 332]

$\partial(\Sigma^{2n-5}(q \circ \Sigma^3 q)) = \Sigma^{2n-5} p \circ \Sigma^{2n-6} q \circ \Sigma^{2n-3} q = 0$

puisque $\Sigma^{2n-5} p \circ \Sigma^{2n-6} q = 0 : S^{2n+1} \to S^{2n-3}$.

La suite exacte d'homotopie de $S^{2n-3} \to U_{n,2} \to S^{2n-1}$ fournit alors les valeurs suivantes des groupes d'homotopie de $U_{n,2}$, pour n impair:

n impair	$n=3$	$n=5$	$n\geqslant 7$
$\pi_{2n-4}(U_{n,2})$	0	0	0
$\pi_{2n-3}(U_{n,2})$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$
$\pi_{2n-2}(U_{n,2})$	0	0	0
$\pi_{2n-1}(U_{n,2})$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$
$\pi_{2n}(U_{n,2})$	$\mathbf{Z}_6$	$\mathbf{Z}_{12}$	$\mathbf{Z}_{12}$
$\pi_{2n+1}(U_{n,2})$	0	0	0
$\pi_{2n+2}(U_{n,2})$	$\mathbf{Z}_{12}$	$\mathbf{Z}_{24}$	$\mathbf{Z}_{24}$
$\pi_{2n+3}(U_{n,2})$	$\mathbf{Z}_3$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$
$\pi_{2n+4}(U_{n,2})$	$\mathbf{Z}_{30}$	$\mathbf{Z}_{120}$	$\mathbf{Z}_{240}$

§ 2. Quelques groupes d'homotopie de $U_{n,3}$ et $U_{n,4}$

Les groupes d'homotopie de $U_{3,3}=U(3)$ se déterminent à l'aide de la fibration $S^1\to U_{3,3}\to U_{3,2}$. On obtient alors:

$$\pi_1(U_{3,3})=\mathbf{Z} \qquad \pi_i(U_{3,3})\cong\pi_i(U_{3,2}) \qquad i>1$$

De façon analogue, la fibration $U_{n-1,2}\to U_{n,3}\to S^{2n-1}$ montre que $\pi_i(U_{n,3})\cong \pi_i(U_{n-1,2})$ pour $i<2n-2$. Le calcul de ces groupes se ramène aux résultats du paragraphe précédent. Nous envisageons maintenant les cas $n=4$ et $n=5$ séparément. $U_{4,3}=SU(4)$. D'après les théorèmes de BOTT [2], les groupes d'homotopie sont donnés par

$$\begin{aligned}\pi_6(U_{4,3})&=\pi_6(SU(4))=0\\ \pi_7(U_{4,3})&=\pi_7(SU(4))=\mathbf{Z}\\ \pi_8(U_{4,3})&=\pi_8(SU(4))=\mathbf{Z}_{24}\end{aligned}$$

Pour $n=5$ nous considérons tout d'abord la suite exacte de $U(5)\to U(7)\to U_{7,2}$:

$$\begin{array}{cccccccccccc}\to\pi_{12}(U(7))&\to&\pi_{12}(U_{7,2})&\to&\pi_{11}(U(5))&\to&\pi_{11}(U(7))&\to&\pi_{11}(U_{7,2})&\to&\pi_{10}(U(5))\\ \to\quad 0&\to&0&\to&\pi_{11}(U(5))&\to&\mathbf{Z}&\to&\mathbf{Z}&\to&\mathbf{Z}_{120}\end{array}$$

Cette suite exacte fournit $\pi_{11}(U(5))=0$.
La suite exacte de $U_{4,2}\to U_{5,3}\to S^9$:

$$\begin{array}{ccccccc}\to\pi_{11}(U_{4,2})&\to&\pi_{11}(U_{5,3})&\to&\pi_{11}(S^9)&\to\\ \to\quad\mathbf{Z}_2&\to&\pi_{11}(U_{5,3})&\to&\mathbf{Z}_2&\to\end{array}$$

montre que l'ordre de $\pi_{11}(U_{5,3})$ est une puissance de 2.

La suite exacte d'homotopie de $U(2)\to U(5)\to U_{5,3}$:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & \pi_{11}(U(5))&\to&\pi_{11}(U_{5,3})&\to&\pi_{10}(U(2))&\to&\pi_{10}(U(5))&\to&\pi_{10}(U_{5,3})&\to&\pi_9(U(2))&\to\\ \to&\pi_9(U(5))&\to&\pi_9(U_{5,3})&\to&\pi_8(U(2))&\to&\pi_8(U(5))&\to&\pi_8(U_{5,3})&\to&\pi_7(U(2))&\to\pi_7(U(5))\\ & 0&\to&\pi_{11}(U_{5,3})&\to&\mathbf{Z}_{15}&\to&\mathbf{Z}_{120}&\to&\pi_{10}(U_{5,3})&\to&\mathbf{Z}_3&\to\\ \to&\mathbf{Z}&\to&\pi_9(U_{5,3})&\to&\mathbf{Z}_2&\to&0&\to&\pi_8(U_{5,3})&\to&\mathbf{Z}_2&\to\quad\mathbf{Z}\end{array}$$

fournit, puisque $\pi_{11}(U_{5,3})$ est un 2-groupe:

$$\begin{aligned} \pi_{11}(U_{5,3}) &= 0 \\ \pi_{10}(U_{5,3}) &= \mathbf{Z}_{24} \\ \pi_{9}(U_{5,3}) &= \mathbf{Z} \quad \text{ou} \quad \mathbf{Z}+\mathbf{Z}_2 \\ \pi_{8}(U_{5,3}) &= \mathbf{Z}_2 \end{aligned}$$

La détermination de $\pi_9(U_{5,3})$ s'effectue à l'aide de la fibration $U_{4,2} \to U_{5,3} \to S^9$:

$$\begin{array}{ccccccccc} \to & \pi_{10}(S^9) & \to & \pi_9(U_{4,2}) & \to & \pi_9(U_{5,3}) & \to & \pi_9(S^9) \\ \to & \mathbf{Z}_2 & \to & \mathbf{Z}_2+\mathbf{Z}_2 & \to & \pi_9(U_{5,3}) & \to & \mathbf{Z} \end{array}$$

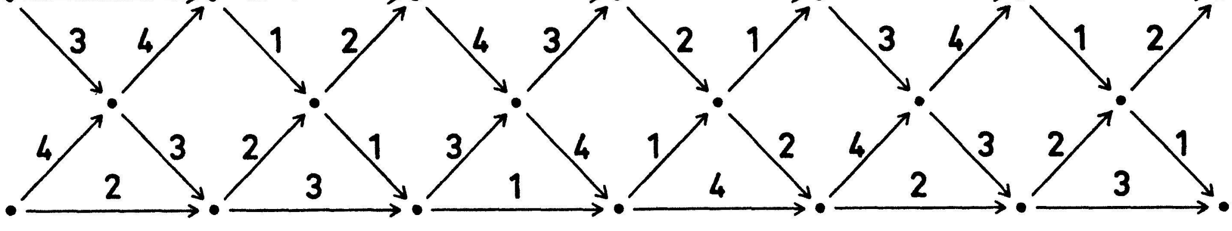
On voit que $\pi_9(U_{5,3})$ ne peut pas être isomorphe à $\mathbf{Z}$, donc

$$\pi_9(U_{5,3}) \cong \mathbf{Z}+\mathbf{Z}_2$$

Avant d'envisager les autres cas, introduisons la notation suivante, due à JAMES [8]: dans la suite exacte d'homotopie de la fibration $U_{n,k} \xrightarrow{p} S^{2n-1}$, l'image de $\pi_{2n-1}(U_{n,k}) \xrightarrow{p_*} \pi_{2n-1}(S^{2n-1}) = \mathbf{Z}$ est caractérisée par un nombre entier $U(n, k)$ que nous appellerons nombre de JAMES de $U_{n,k}$. La détermination des nombres $U(n, 3)$ et $U(n, 4)$ est renvoyée au prochain paragraphe (§3). Dans la suite de ce paragraphe, nous utiliserons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} S^{2n-5} & \to & S^{2n-5} & \to & * \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U_{n-1,2} & \to & U_{n,3} & \to & S^{2n-1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S^{2n-3} & \to & U_{n,2} & \to & S^{2n-1} \end{array}$$

Le diagramme contient quatre fibrations. Les quatre suites exactes d'homotopie correspondantes (1, 2, 3 et 4) se groupent en une „tresse" exacte



où tous les carrés et tous les triangles sont commutatifs. Un tel diagramme de suites exactes a reçu le nom de „rolling stone diagram" (ECKMANN et HILTON [5]).

Le fait que les variétés de STIEFEL associées comme ci-dessus donnent lieu à une tresse exacte a été démontré par JAMES [7].

La partie suivante de la tresse exacte

$$\begin{array}{ccccccccc}
\pi_{2n-1}(S^{2n-5}) & \rightarrow & \pi_{2n-1}(U_{n,3}) & \rightarrow & \pi_{2n-1}(S^{2n-1}) & \rightarrow & \pi_{2n-2}(S^{2n-3}) & \rightarrow & \pi_{2n-3}(S^{2n-5}) \\
 & \searrow \ \nearrow & & \searrow \ \nearrow & & \searrow \ \nearrow & & \searrow \ \nearrow & \\
 & \pi_{2n-1}(U_{n-1,2}) & & \pi_{2n-1}(U_{n,2}) & & \pi_{2n-2}(U_{n-1,2}) & & \pi_{2n-2}(U_{n,2}) & \\
 & \nearrow \ \searrow & & \nearrow \ \searrow & & \nearrow \ \searrow & & \nearrow \ \searrow & \\
\pi_{2n}(S^{2n-1}) & \rightarrow & \pi_{2n-1}(S^{2n-3}) & \rightarrow & \pi_{2n-2}(S^{2n-5}) & \rightarrow & \pi_{2n-2}(U_{n,3}) & \rightarrow & \pi_{2n-2}(S^{2n-1})
\end{array}$$

fournit pour n pair $\geqslant 6$

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \pi_{2n-1}(U_{n,3}) & \longrightarrow & \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{Z}_2 & \longrightarrow & \mathbf{Z}_2 \\
 & \searrow \ \nearrow & & \searrow \ \nearrow & & \searrow \ \nearrow & & \searrow \ \nearrow & \\
 & 0 & & \mathbf{Z}+\mathbf{Z}_2 & & \mathbf{Z}_{12} & & \mathbf{Z}_2 & \\
 & \nearrow \ \searrow & & \nearrow \ \searrow & & \nearrow \ \searrow & & \nearrow \ \searrow & \\
\mathbf{Z}_2 & \longrightarrow & \mathbf{Z}_2 & \longrightarrow & \mathbf{Z}_{24} & \longrightarrow & \pi_{2n-2}(U_{n,3}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

et par conséquent

$$\pi_{2n-1}(U_{n,3}) = \mathbf{Z} \qquad \pi_{2n-2}(U_{n,3}) = \mathbf{Z}_{12}$$

U (n, 3)

Pour n impair $\geqslant 7$,

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \pi_{2n-1}(U_{n,3}) & \longrightarrow & \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{Z}_2 & \longrightarrow & \mathbf{Z}_2 \\
 & \searrow \ \nearrow & & \searrow \ \nearrow & & \searrow \ \nearrow & & \searrow \ \nearrow & \\
 & \mathbf{Z}_2 & & \mathbf{Z} & & \mathbf{Z}_{24}+\mathbf{Z}_2 & & 0 & \\
 & \nearrow \ \searrow & & \nearrow \ \searrow & & \nearrow \ \searrow & & \nearrow \ \searrow & \\
\mathbf{Z}_2 & \longrightarrow & \mathbf{Z}_2 & \longrightarrow & \mathbf{Z}_{24} & \longrightarrow & \pi_{2n-2}(U_{n,3}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

on obtient

$$\pi_{2n-1}(U_{n,3}) = \mathbf{Z} \qquad \pi_{2n-2}(U_{n,3}) = \mathbf{Z}_{48}$$

U(n, 3)

Remarquons ensuite que la suite exacte, (pour $n \geqslant 6$)

$$\begin{array}{ccccccc}
\pi_{2n}(S^{2n-5}) & \rightarrow & \pi_{2n}(U_{n,3}) & \rightarrow & \pi_{2n}(U_{n,2}) & \rightarrow & \pi_{2n-1}(S^{2n-5}) \\
0 & \rightarrow & \pi_{2n}(U_{n,3}) & \rightarrow & \pi_{2n}(U_{n,2}) & \rightarrow & 0
\end{array}$$

fournit la valeur du groupe $\pi_{2n}(U_{n,3})$.

Nous avons encore besoin de déterminer le groupe $\pi_{2n-2}(U_{n,4})$:

Pour $n=4$, $\pi_6(U(4))=0$ d'après le théorème de BOTT.

Pour $n=5$, $\pi_8(U_{5,4})=0$ également d'après le théorème de BOTT.

Pour $n=6$, la fibration $SU(2) \rightarrow SU(6) \rightarrow U_{6,4}$ fournit

$$\begin{array}{ccccccc}
\pi_{10}(SU(6)) & \rightarrow & \pi_{10}(U_{6,4}) & \rightarrow & \pi_9(SU(2)) & \rightarrow & \pi_9(SU(6)) \\
0 & \rightarrow & \pi_{10}(U_{6,4}) & \rightarrow & \mathbf{Z}_3 & \rightarrow & \mathbf{Z}
\end{array}$$

et par conséquent $\pi_{10}(U_{6,4})=\mathbf{Z}_3$.

Pour $n \geqslant 7$ la fibration $S^{2n-7} \to U_{n,4} \to U_{n,3}$ fournit

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_{2n-2}(S^{2n-7}) & \to & \pi_{2n-2}(U_{n,4}) & \to & \pi_{2n-2}(U_{n,3}) & \to & \pi_{2n-3}(S^{2n-7}) \\ 0 & \to & \pi_{2n-2}(U_{n,4}) & \to & \pi_{2n-2}(U_{n,3}) & \to & 0 \end{array}$$

donc $\pi_{2n-2}(U_{n,4}) \cong \pi_{2n-2}(U_{n,3})$, groupe que nous avons déjà déterminé.

Nous pouvons alors dresser une table des groupes d'homotopie $\pi_{2k+p}(U_{k+m})$ pour $0 \leqslant p \leqslant 6$, en remarquant que la fibration $U_{k+m,m} \to U_{k+m+1,m+1} \to S^{2k+2m+1}$ montre que le groupe $\pi_{2k+p}(U_{k+m,m})$ est indépendant de m sitôt que $2m > p$.

Table des groupes $\pi_{2k+p}(U_{k+m,m})$

	m \ k	0	1	2	$2s+3$	$2s+4$
$p=0$		0	0	0	0	0
$p=1$		$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$
$p=2$	1	0	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$
	$\geqslant 2$	0	0	$\mathbf{Z}_2$	0	$\mathbf{Z}_2$
$p=3$	1	0	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$
	$\geqslant 2$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}+\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}+\mathbf{Z}_2$
$p=4$	1	0	$\mathbf{Z}_{12}$	$\mathbf{Z}_{24}$	$\mathbf{Z}_{24}$	$\mathbf{Z}_{24}$
	2	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_6$	$\mathbf{Z}_{24}+\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_{12}$	$\mathbf{Z}_{24}+\mathbf{Z}_2$
	$\geqslant 3$	0	0	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_{\frac{12}{U(2s+6,\,3)}}$	$\mathbf{Z}_{\frac{48}{U(2s+7,\,3)}}$
$p=5$	1	0	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	0	0
	2	$\mathbf{Z}_2$	0	$\mathbf{Z}_2+\mathbf{Z}_2$	0	$\mathbf{Z}_2$
	$\geqslant 3$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}+\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$
$p=6$	1	0	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	0	0
	2	$\mathbf{Z}_{12}$	$\mathbf{Z}_{12}$	$\mathbf{Z}_{24}+\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_{24}$	$\mathbf{Z}_{24}$
	3	$\mathbf{Z}_6$	$\mathbf{Z}_{24}$	$\mathbf{Z}_{24}$	$\mathbf{Z}_{24}+\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_{12}$
	$\geqslant 4$	0	0	$\mathbf{Z}_3$	$\mathbf{Z}_{\frac{48}{U(2s+7,\,3)}}$	$\mathbf{Z}_{\frac{12}{U(2s+8,\,3)}}$

Nous calculerons les valeurs de $U(n, 3)$ dans le prochain paragraphe, Celles-ci sont:

$n \equiv (\mathrm{mod}\ 24)$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$U(n, 3)$	2	6	24	4	12	3	8	12	6	2	24	12
$n \equiv (\mathrm{mod}\ 24)$	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$U(n, 3)$	4	3	24	4	6	6	8	12	12	1	24	12

§ 3. Détermination des nombres de James $U(n, 3)$ et $U(n, 4)$

Rappelons la définition de $U(n, k)$: c'est l'ordre de $\partial(1)$ dans $\pi_{2n-2}(U_{n-1,k-1})$, où ∂ est l'opérateur bord de la suite exacte de la fibration $U_{n-1,k-1} \to U_{n,k} \to S^{2n-1}$. JAMES a établi dans [8] un grand nombre de propriétés des nombres $U(n, k)$. Nous n'en retiendrons qu'une partie, nécessaire à la détermination des valeurs de $U(n, 3)$.

Théorèmes de JAMES [8]:

(0) $U(m, k)$ est multiple de $U(m, l)$ pour $l \leqslant k$

(I) $U(n, k)\ U(m, k)$ est un multiple de $U(m+n, k)$

(II) Soit b_k la plus petite valeur de m pour laquelle $U(m, k)=1$. Alors $U(n, k)=1 \Leftrightarrow n$ est un multiple de b_k.

(III) $U(mb_k, k+1)\cdot(mb_k, b_{k+1})=b_{k+1}$
$((p, q)$ désigne le plus grand commun diviseur de p et de q.)

(IV) Si $m \geqslant 2k-1$ et $U(n, k)=1$ alors $U(m, k)=U(m+n, k)$

Les nombres $U(n, k)$ sont connus pour $k=1, 2, (n-1), n$. Ce sont

$U(n, 1) \quad =1$

$U(n, 2) \quad = \begin{cases} 1 & \text{pour } n \text{ pair} \\ 2 & \text{pour } n \text{ impair} \end{cases}$ (Théorème d'ECKMANN [4])

$U(n, n-1)=U(n, n)=(n-1)!$ (Théorème de BOTT [2])

Nous allons maintenant déterminer les valeurs de $U(n, 3)$. Puisque $b_2=2$, et $U(4, 3)=6$, le théorème III de James fournit $6(4, b_3)=b_3$ d'où $b_3=24$, et par conséquent $U(2m, 3)=12/(m, 12)$. Pour n pair, les valeurs de $U(n, 3)$ sont donc connues, et sont périodiques de période 24:

$n \equiv (\mathrm{mod}\ 24)$	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
$U(n, 3)$	6	4	3	12	2	12	3	4	6	12	1	12

Pour n impair, une utilisation systématique du théorème I de JAMES fournit, à l'aide de $U(3, 3)=2$:

$n \equiv 3 \bmod 24$

$U(27, 3)$ est multiple de $2=U(27, 2)$

$U(27, 3)$ est diviseur de $2=U(24, 3)\cdot U(3, 3)$

$U(27, 3)=2$ et $U(24q+3, 3)=2$ à l'aide de (IV)

$n \equiv 11 \bmod 24$

$U(11, 3)$ est un diviseur de $U(8, 3) \cdot U(3, 3) = 6$

$U(11, 3) \cdot U(3, 3) = 2 \cdot U(11, 3)$ est un multiple de $U(14, 3) = 12$

Donc $U(24q + 11, 3) = 6$

$n \equiv 19 \bmod 24$

$U(19, 3)$ est un diviseur de $U(16, 3) \cdot U(3, 3) = 6$

$U(19, 3) \cdot U(3, 3) = 2 \cdot U(19, 3)$ est un multiple de $U(22, 3) = 12$

Donc $U(24q + 19, 3) = 6$

$n \equiv 5 \bmod 24$

Nous utiliserons les résultats du § 2. La suite exacte d'homotopie de $U_{4,2} \to U_{5,3} \to S^9$:

$$\begin{array}{ccccccccc} \pi_9(U_{5,3}) & \to & \pi_9(S^9) & \xrightarrow{\partial} & \pi_8(U_{4,2}) & \to & \pi_8(U_{5,3}) & \to & \pi_8(S^9) \\ \mathbf{Z} + \mathbf{Z}_2 & \to & \mathbf{Z} & \to & \mathbf{Z}_{24} + \mathbf{Z}_2 & \to & \mathbf{Z}_2 & \to & 0 \end{array}$$

fournit $U(5, 3) = 24$ donc $U(24q + 5, 3) = 24$

$n \equiv 21 \bmod 24$

$U(21, 3)$ est un diviseur de $U(18, 3) \cdot U(3, 3) = 8$

$U(21, 3) \cdot U(8, 3) = 3 \cdot U(21, 3)$ est un multiple de $U(29, 3) = U(5, 3) = 24$

Donc $U(24q + 21) = 8$

$n \equiv 13 \bmod 24$

$U(13, 3)$ est un diviseur de $U(10, 3) \cdot U(3, 3) = 24$

$U(13, 3) \cdot U(3, 3) = 2 \cdot U(13, 3)$ est un multiple de $U(16, 3) = 3$

$U(13, 3) \cdot U(8, 3) = 3 \cdot U(13, 3)$ est un multiple de $U(21, 3) = 8$

Donc $U(24q + 13, 3) = 24$

Les valeurs suivantes de $U(n, 3)$ ne peuvent pas être entièrement déterminées à l'aide des résultats de JAMES; on obtient cependant:

$n \equiv 7 \bmod 24$

$U(7, 3)$ est un diviseur de $U(4, 3) \cdot U(3, 3) = 12$

$n \equiv 9 \bmod 24$

$U(9, 3)$ est un diviseur de $U(6, 3) \cdot U(3, 3) = 8$

$n \equiv 15 \bmod 24$

$U(15, 3)$ est un diviseur de $U(12, 3) \cdot U(3, 3) = 4$

$n \equiv 17 \bmod 24$

$U(17, 3)$ est un diviseur de $U(14, 3) \cdot U(3, 3) = 24$

$n \equiv 23 \bmod 24$

$U(23, 3)$ est un diviseur de $U(20, 3) \cdot U(3, 3) = 12$

$n \equiv 25 \bmod 24$

$U(25, 3)$ est un diviseur de $U(22, 3) \cdot U(3, 3) = 24$

Pour achever la détermination des nombres $U(n, 3)$, nous remarquerons tout d'abord que $U(4, 3) = U(4, 4) = 6$, $U(5, 3) = U(5, 4) = 24$, et que, pour $n \geqslant 6$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\pi_{2n-1}(U_{n,4}) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \pi_{2n-1}(S^{2n-1}) \arrow[rr, "\partial"] \arrow[dr, "\partial"] & & \pi_{2n-2}(U_{n-1,2}) \arrow[rr] & & \pi_{2n-3}(S^{2n-7}) \\
& \pi_{2n-1}(U_{n,3}) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \pi_{2n-2}(U_{n-1,3}) \arrow[urrr] & & & \\
& & \pi_{2n-2}(S^{2n-7}) \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd}$$

montre que $U(n, 3) = U(n, 4)$ puisque $\pi_{2n-2}(S^{2n-7}) \cong 0$. On a donc $U(n, 3) = U(n, 4)$ pour tout n.

Atiyah et Todd [1] ont calculé le caractère de Chern des variétés de Stiefel complexes. Les théorèmes d'intégralité de Atiyah et Hirzebruch permettent de formuler la propriété suivante: Soit $\Sigma \alpha_i t^i$ le développement de Maclaurin de la fonction $[\log(1-t)/-t]^{-n}$. Les nombres de James $U(n, k)$ jouissent de la propriété suivante: Les produits $\mathrm{U}(n, k) \cdot \alpha_1$, $U(n, k)\alpha_2, \ldots, U(n, k)\alpha_{k-1}$ sont tous entiers.

$$\left[\frac{\log(1-t)}{-t}\right]^{-n} = 1 - \frac{n}{2} t + \frac{n(3n-5)}{24} t^2 - \frac{n(n-2)(n-3)}{48} t^3 + \cdots$$

Le théorème d'Atiyah et Todd pour $k = 4$ affirme donc:

$$U(n, 4) \cdot \frac{n}{2}, \quad U(n, 4) \cdot \frac{n(3n-5)}{24}, \quad U(n, 4) \cdot \frac{n(n-2)(n-3)}{48} \quad \text{sont entiers.}$$

$n \equiv 7 \bmod 24$

$U(7, 4) \cdot [\frac{7}{2}, \frac{14}{3}, \frac{35}{12}]$ entiers $\Rightarrow U(7, 4)$ multiple de 12.

$n \equiv 9 \bmod 24$

$U(9, 4) \cdot [\frac{9}{2}, \frac{33}{4}, \frac{63}{8}]$ entiers $\Rightarrow U(9, 4)$ multiple de 8

$n \equiv 15 \bmod 24$

$U(15, 4) \cdot [\frac{15}{2}, 25, \frac{195}{4}]$ entiers $\Rightarrow U(15, 4)$ multiple de 4

$n \equiv 17 \bmod 24$

$U(17, 4) \cdot [\frac{17}{2}, \frac{391}{12}, \frac{595}{8}]$ entiers $\Rightarrow U(17, 4)$ multiple de 24

$n \equiv 23 \bmod 24$

$U(23, 4) \cdot [\frac{23}{2}, \frac{184}{3}, \frac{805}{4}]$ entiers $\Rightarrow U(23, 4)$ multiple de 12

$n \equiv 25 \bmod 24$

$U(25, 4) \cdot [\frac{25}{2}, \frac{875}{12}, \frac{6325}{24}]$ entiers $\Rightarrow U(25, 4)$ multiple de 24

On obtient donc la tabelle suivante des valeurs de $U(n, 3)$[2]:

$n \equiv (\text{mod } 24)$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$U(n, 3)$	2	6	24	4	12	3	8	12	6	2	24	12
$n \equiv (\text{mod } 24)$	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$U(n, 3)$	4	3	24	4	6	6	8	12	12	1	24	12

Les valeurs des groupes $\pi_{2n-2}(U_{n,3})$ et $\pi_{2n-2}(U_{n,4})$ sont donc complètement connues.

RÉFÉRENCES

[1] M. F. ATIYAH and J. A. TODD: *On complex Stiefel manifolds.* Proc. Cambridge Phil. Soc. *56* (1960), 342–353.

[2] R. BOTT: *A report on the unitary group.* Diff. Geom. Proc. of Symposia A.M.S. vol. III (1961), 1–6.

[3] B. ECKMANN: *Zur Homotopietheorie gefaserter Räume.* Comment. Math. Helv. *14* (1941–42), 141–192.

[4] B. ECKMANN: *Systeme von Richtungsfeldern auf Sphären...* Comment. Math. Helv. *15* (1942–43), 1–26.

[5] B. ECKMANN and P. J. HILTON: *Composition functors and spectral sequences.* Comment. Math. Helv. *41* (3) (1966–67), 187–221.

[6] P. J. HILTON: *The Hopf invariant and homotopy groups of spheres.* Proc. Cambridge Phil. Soc. *48* (1952), 547–554.

[7] I. M. JAMES: *The intrinsic join.* Proc. London Math. Soc. (3) *8* (1958), 507–535.

[8] I. M. JAMES: *Cross-sections of Stiefel manifolds.* Proc. London Math. Soc. (3) *8* (1958), 536–547.

S. T. HU: *Homotopy Theory.* Academic Press, New York-London (1959).

H. TODA: *Composition methods in homotopy groups of spheres.* Princeton University Press (1962).

Reçu le 16 juin 1967

E.T.H. Forschungsinstitut für Mathematik, Zürich
University of British Columbia, Vancouver

[2]) Il est facile de vérifier que $U(2m+1, 3)$ est égal à $24/(m-1, 12)$. Ceci permet de simplifier quelque peu la formulation.