

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 43 (1968)

**Artikel:** Sur le maximum d'un processus aléatoire.  
**Autor:** Pelli, Tiziano  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-32913>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 29.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Sur le maximum d'un processus aléatoire

par TIZIANO PELLI

## Introduction

Soit  $X_i, i=1, 2, \dots$  une suite de variables aléatoires réelles et  $Z_n = \text{Max}_{1 \leq i \leq n} X_i$ .

De nombreuses études ont été faites sur le comportement asymptotique de  $P[Z_n < a_n x + b_n]$ , où  $a_n > 0$  et  $b_n$  sont des constantes.

Les premières recherches à ce sujet ont été effectuées pour des variables aléatoires indépendantes et identiquement réparties; les résultats obtenus ont donné une réponse complète à plusieurs problèmes (voir B. V. GNEDENKO [8], J. GEFFROY [7]). Dans les dernières années, parallèlement aux études entreprises pour des sommes de variables aléatoires normées, plusieurs auteurs ont considéré le cas où les variables  $X_i, i=1, 2, \dots$  ont une certaine dépendance entre elles et ce travail désire apporter une contribution au développement de cette théorie.

Après avoir introduit les notations indispensables (par. 1) et exposé des résultats classiques fréquemment employés par la suite (par. 2), on examine sous quelles conditions la convergence de  $P^n[X_1 < a_n x + b_n]$  vers une loi limite entraîne celle de  $P[Z_n < a_n x + b_n]$  vers la même loi, pour des processus quelconques à lois marginales identiques. Les résultats obtenus sont ensuite appliqués (par. 4) à des processus soumis à des dépendances particulières. Le même problème, cette fois pour des processus de mélange strict. stationnaires, est étudié dans le par. 5 à l'aide de méthodes employées par R. M. LOYNES dans [9].

Le par. 6 est dédié aux processus de Markov à temps discret, strict. stationnaires et satisfaisant à la condition de Doeblin: les théorèmes 1.6 et 2.6 portent sur la classe des lois limites possibles de  $P[Z_n < a_n x + b_n]$ , le théorème 3.6 est du même type de ceux démontrés dans les paragraphes précédents.

En vertu de la relation  $\text{Min}_{1 \leq i \leq n} X_i = - \text{Max}_{1 \leq i \leq n} (-X_i)$  on remarquera que toute considération faite sur le comportement asymptotique de  $Z_n$  peut être transposée sur celui de  $\text{Min}_{1 \leq i \leq n} X_i$ .

## 1. Notations

Soit  $X_i, i=1, 2, \dots$  un processus aléatoire défini dans l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathfrak{M}, P)$  et à valeurs dans l'espace des nombres réels  $R$ . On notera par  $\mathfrak{M}_j^k$ , où  $k \geq j$ , la  $\sigma$ -algèbre engendrée dans  $\Omega$  par les variables  $X_i, i=j, j+1, \dots, k$ . La variable aléatoire  $\text{Max}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , sera désignée par  $Z_n$ .

On dit qu'une fonction  $F(x)$ , définie dans  $R$ , croissante et continue à gauche, est une fonction de répartition (abr. f. de r.), si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ . Une fonction de répartition est appelée propre, s'il existe au moins un point  $x_0$ , tel que  $0 < F(x_0) < 1$ . En général on notera avec des majuscules les fonctions de répartition et avec des minuscules les fonctions quelconques. Les f. de r.  $F_i(x) = P[X_i < x]$  sont dites lois marginales du processus  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . L'ensemble des f. de r.  $F(ax + b)$  où  $a$  et  $b$  sont des constantes,  $a > 0$ , est appelé «type de la loi  $F(x)$ ».

La limite  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$  d'une suite de nombres réels  $\{a_{n_k}\}$  suivant les entiers  $n_1, n_2, \dots$  sera simplement notée  $a_{n_k} \rightarrow a$ . La notation  $a_{n_k} \uparrow a$  (respect.  $a_{n_k} \downarrow a$ ) sera réservée aux suites croissant vers « $a$ » par des valeurs strictement inférieures à « $a$ » (respect. décroissant vers « $a$ » par des valeurs strictement supérieures à « $a$ »).

$f_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  et  $f(x)$  étant des fonctions croissantes définies dans  $R$ ,  $C(f(x))$  l'ensemble de points où  $f(x)$  est continue, on écrit  $f_n(x) \xrightarrow{W} f(x)$ , lorsque  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  pour tout  $x \in C(f(x))$ . Si la convergence a lieu pour tout  $x \in R$  on notera simplement  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ .

Comme d'habitude on utilisera la notation  $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$  si  $P(B) \neq 0$  et  $P(A|B) = 0$  si  $P(B) = 0$ .

## 2. Résultats classiques

Les résultats de ce paragraphe sont bien connus (voir B. V. GNEDENKO [8], J. GEFFROY [7]); on se limitera à les énoncer.

LEMME 2.1. Soient  $F_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  une suite de f. de r.,  $a_n > 0$ ,  $\alpha_n > 0$ ,  $b_n$  et  $\beta_n$  des constantes réelles,  $G(x)$  et  $H(x)$  des f. de r. propres. Si

$$F_n(a_n x + b_n) \xrightarrow{W} H(x)$$

$$F_n(\alpha_n x + \beta_n) \xrightarrow{W} G(x)$$

alors  $H(x)$  et  $G(x)$  sont du même type.

LEMME 2.2. Soient  $F_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  une suite de f. de r. et  $G(x)$  une f. de r. propre. Si pour des constantes réelles  $a_n > 0$ ,  $b_n$ ,  $\alpha_n > 0$ , et  $\beta_n$  on a

$$F_n(a_n x + b_n) \xrightarrow{W} G(x)$$

$$F_n(\alpha_n x + \beta_n) \xrightarrow{W} G(x)$$

alors  $a_n/\alpha_n \rightarrow 1$  et  $(b_n - \beta_n)/a_n \rightarrow 0$ .

LEMME 2.3. Soient  $F_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  une suite de f. de r.,  $G(x)$  une f. de r. propre

et  $a_n > 0, b_n, \alpha_n > 0, \beta_n$  des constantes réelles. Si  $F_n(a_n x + b_n) \xrightarrow{W} G(x)$  alors les relations  $a_n/\alpha_n \rightarrow 1$  et  $(b_n - \beta_n)/a_n \rightarrow 0$  entraînent  $F_n(\alpha_n x + \beta_n) \xrightarrow{W} G(x)$ .

Soient  $X_i, i = 1, 2, \dots$  une suite de variables aléatoires indépendantes, obéissant à une même loi  $F(x)$ . On a  $P[Z_n < x] = P\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i < x]\right) = F^n(x)$ . Pour étudier dans quelles conditions  $P[Z_n < a_n x + b_n] \xrightarrow{W} G(x)$ , où  $a_n > 0$  et  $G(x)$  est une f. de r. propre, le lemme suivant est d'une grande utilité.

LEMME 2.4. Soit  $F(x)$  une f. de r.,  $G(x)$  une f. de r. propre,  $a_n > 0$  et  $b_n$  des constantes. Pour que l'on ait  $F^n(a_n x + b_n) \rightarrow G(x)$  il faut et il suffit que  $n(1 - F(a_n x + b_n)) \rightarrow -\log(G(x))$  pour tout  $x$  tel que  $G(x) \neq 0$ .

Le problème de déterminer les lois propres qu'on peut obtenir comme limite  $\xrightarrow{W}$  de  $F^n(a_n x + b_n)$  a été résolu par B. GNEDENKO [8], qui a démontré que les lois limites possibles sont du type des lois  $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \Phi_3(x)$  suivantes :

- 1)  $\Phi_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ e^{-x^\alpha} & \text{pour } x \geq 0 \end{cases}$  où  $\alpha > 0$
- 2)  $\Phi_2(x) = \begin{cases} e^{-(-x)^\alpha} & \text{pour } x < 0 \\ 1 & \text{pour } x \geq 0 \end{cases}$  où  $\alpha > 0$
- 3)  $\Phi_3(x) = e^{-e^{-x}}$  pour tout  $x$ .

S'il existe des nombres  $a_n > 0$  et  $b_n$  tels que  $F^n(a_n x + b_n) \rightarrow \Phi_k(x)$ , où  $k$  peut prendre la valeur 1, 2 ou 3, alors on dit que  $F(x)$  appartient au domaine d'attraction de  $\Phi_k(x)$ . B. GNEDENKO (loc. cit.) donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une f. de r.  $F(x)$  appartienne au domaine d'attraction de chacune des trois lois limites  $\Phi_k(x)$ . Il faut ajouter qu'une f. de r.  $F(x)$  est attirée par  $\Phi_1(x)$  (respect.  $\Phi_2(x)$ ) d'une façon plus particulière : il existe une suite  $a_n \uparrow \infty$  (respect.  $a_n \downarrow 0$ ) telle que  $F^n(a_n x) \rightarrow \Phi_1(x)$  (respect.  $F^n(a_n x + x_0) \rightarrow \Phi_2(x)$ , où  $x_0$  est une constante).

### 3. Convergence vers $\Phi_k(x)$ : cas général

Soit  $X_i, i = 1, 2, \dots$  un processus aléatoire à lois marginales identiques :  $P[X_i < x] = F(x)$  pour tout  $i = 1, 2, \dots$ . Plusieurs auteurs (voir S. M. BERMAN [2], R. M. LOYNES [9] et G. S. WATSON [13]) ont étudié le problème de déterminer dans quelles conditions la relation  $F^n(a_n x + b_n) \rightarrow \Phi_k(x)$  entraîne la convergence de  $P[Z_n < a_n x + b_n]$  vers  $\Phi_k(x)$ . Dans ce paragraphe on examine la même question.

THÉORÈME 3.1. Soit  $X_i, i = 1, 2, \dots$  un processus aléatoire à lois marginales identiques :  $P[X_i < x] = F(x)$ . Supposons que  $F^n(a_n x + b_n) \rightarrow \Phi_k(x)$ , où  $a_n > 0$  et  $b_n$  sont des constantes, alors, pour que l'on ait  $P[Z_n < a_n x + b_n] \rightarrow \Phi_k(x)$  il faut et il suffit que, pour

tout intervalle  $(x', x'')$ , où  $\Phi_k(x') > 0$  et  $\Phi_k(x'') < 1$ , il existe une suite  $u_n \downarrow 0$  telle que

$$(1/t_n) P [Z_n < a_n x + b_n] n (F(a_n x + b_n) - F(a_n(x - t_n) + b_n)) - \\ - (1/t_n) P \left( \bigcup_{i=1}^n \left( \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n [X_j < a_n x + b_n] \cap [a_n(x - t_n) + b_n \leq X_i < a_n x + b_n] \right) \right) \rightarrow 0 \quad (3.1)$$

uniformément en  $x \in (x', x'')$ , pour toute suite  $t_n \downarrow 0$  telle que  $t_n \geq u_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

Avant de commencer la démonstration on donne quelques lemmes.

LEMME 3.1. Soient  $f_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  et  $f(x)$  des fonctions croissantes définies dans l'intervalle fermé  $[a, b]$  et soit  $f(x)$  continue dans le même intervalle. Si  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  pour tout  $x \in [a, b]$ , alors la convergence a lieu uniformément dans  $[a, b]$ .

La démonstration de ce lemme est élémentaire.

LEMME 3.2. Soient  $f_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  et  $f(x)$  des fonctions croissantes définies dans  $(a, b)$  et  $f(x)$  deux fois continûment différentiable dans le même intervalle. Si  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  pour tout  $x \in (a, b)$ , alors il existe une suite  $u_n \downarrow 0$  telle que

$$(f_n(x) - f_n(x - t_n))/t_n \rightarrow f'(x) \quad (3.2)$$

uniformément en  $x \in [a', b']$ , pour toute suite  $t_n \downarrow 0$  pour laquelle  $t_n \geq u_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , où  $[a', b']$  est un intervalle fermé quelconque contenu dans  $(a, b)$ .

Démonstration. En vertu des hypothèses faites on a

$$|(f(x) - f(x - t_n))/t_n - f'(x)| \leq A t_n \quad (3.3)$$

quel que soit  $x \in [a', b']$ , où  $A$  est une constante finie.

D'après le lemme 3.1  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  uniformément en  $x$  pour tout intervalle fermé contenu dans  $(a, b)$ ; il s'ensuit qu'on peut trouver une suite  $u_n \downarrow 0$  telle que  $(|f_n(x) - f(x)| + |f_n(x - t_n) - f(x - t_n)|)/t_n$  tend vers 0 uniformément en  $x \in [a', b']$ , pour toute suite  $t_n \downarrow 0$  telle que  $t_n \geq u_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Si on observe que

$$(f_n(x) - f_n(x - t_n))/t_n = (f_n(x) - f(x) + f(x) - f(x - t_n) + \\ + f(x - t_n) - f_n(x - t_n))/t_n$$

alors, de (3.3) on obtient (3.2) et le lemme est démontré.

LEMME 3.3. Soient  $H_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  des  $f$ . de  $r$ . Supposons que pour toute suite  $t_n \downarrow 0$  on ait

$$H_n(x + t_n) - H_n(x - t_n) \rightarrow 0 \quad (3.4)$$

pour tout  $x \in (a, b)$ , alors la relation  $H_n(x) \xrightarrow{w} h(x)$  entraîne la continuité de  $h(x)$  dans  $(a, b)$ .

Démonstration. Soit  $x$  un point quelconque de  $(a, b)$ . On considère une suite  $a_n \downarrow 0$

telle que  $x + a_n$  et  $x - a_n$  soient des points de continuité de la fonction  $h(x)$  pour tout  $n = 1, 2, \dots$  et on définit une suite  $k_n \uparrow \infty$  ayant la propriété suivante :

$$|H_{k_n}(x + a_n) - h(x + a_n)| + |H_{k_n}(x - a_n) - h(x - a_n)| \rightarrow 0.$$

Si on écrit

$$h(x + a_n) - h(x - a_n) = h(x + a_n) - H_{k_n}(x + a_n) + H_{k_n}(x + a_n) - H_{k_n}(x - a_n) + H_{k_n}(x - a_n) - h(x - a_n)$$

alors de (3.4) on obtient que

$$h(x + a_n) - h(x - a_n) \rightarrow 0. \tag{3.5}$$

La fonction  $h(x)$  étant croissante et le point  $x \in (a, b)$  quelconque, la relation (3.5) entraîne la continuité de  $h(x)$  dans  $(a, b)$ .

LEMME 3.4. Soit  $H_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  une suite de  $f$  de  $r$  telle que  $H_n(x)$  converge vers une fonction  $h(x)$  pour tout  $x \in [a, b]$ . Supposons que  $h(x)$  soit continue dans  $[a, b]$  et qu'il existe une suite  $u_n \downarrow 0$  telle que, pour toute suite  $t_n \downarrow 0$ , où  $t_n \geq u_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , l'on ait

$$(H_n(x) - H_n(x - t_n))/t_n \rightarrow g(x) \tag{3.6}$$

$$(H_n(x + t_n) - H_n(x))/t_n \rightarrow g(x) \tag{3.6'}$$

quel que soit  $x \in [a, b]$ , où  $g(x)$  est une fonction définie dans  $[a, b]$ , alors la fonction limite  $h(x)$  est dérivable dans  $(a, b)$  et on a

$$h'(x) = g(x)$$

pour tout  $x \in (a, b)$ .

*Démonstration.* La fonction limite  $h(x)$  étant continue dans  $[a, b]$ , d'après le lemme 3.1, il existe une suite  $s_n \downarrow 0$ , telle que, pour toute suite  $t_n \downarrow 0$ , où  $t_n \geq s_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , la relation

$$(|H_n(x) - h(x)| + |H_n(x + t_n) - h(x + t_n)| + |H_n(x - t_n) - h(x - t_n)|)/t_n \rightarrow 0 \tag{3.7}$$

est vérifiée pour tout  $x \in (a, b)$ .

On considère une suite  $r_m \downarrow 0$  et une suite  $n_m \uparrow \infty$  telle que pour  $m = 1, 2, \dots$   $\text{Max}(u_{n_m}, s_{n_m}) \leq r_m$ . Si on écrit

$$(h(x + r_m) - h(x))/r_m = (h(x + r_m) - H_{n_m}(x + r_m) + H_{n_m}(x + r_m) - H_{n_m}(x) + H_{n_m}(x) - h(x))/r_m$$

et

$$(h(x) - h(x - r_m))/r_m = (h(x) - H_{n_m}(x) + H_{n_m}(x) - H_{n_m}(x - r_m) + H_{n_m}(x - r_m) - h(x - r_m))/r_m,$$

de (3.6), (3.6') et (3.7) on obtient

$$(h(x + r_m) - h(x))/r_m \rightarrow g(x) \quad (3.8)$$

et

$$(h(x) - h(x - r_m))/r_m \rightarrow g(x) \quad \text{pour tout } x \in (a, b). \quad (3.8')$$

La fonction  $h(x)$  étant croissante et la suite  $r_m \downarrow 0$  ayant été choisie d'une façon arbitraire, les relations (3.8) et (3.8') entraînent l'identité  $h'(x) = g(x)$  pour tout  $x \in (a, b)$ .

*Démonstration du théorème 3.1.*

a) La condition (3.1) est nécessaire.

On pose  $G_n(a_n x + b_n) = P[Z_n < a_n x + b_n]$ . En vertu du lemme 3.2 appliqué à la suite  $G_n(a_n x + b_n)$  et à la fonction limite  $\Phi_k(x)$ , il existe des nombres  $s_n \downarrow 0$ , tels que, pour toute suite  $t_n \downarrow 0$ , où  $t_n \geq s_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  on a  $(G_n(a_n x + b_n) - G_n(a_n(x - t_n) + b_n))/t_n \rightarrow \Phi'_k(x)$  uniformément en  $x \in (x', x'')$ . Si on écrit

$$\begin{aligned} G_n(a_n x + b_n) - G_n(a_n(x - t_n) + b_n) &= \\ &= P\left(\bigcup_{i=1}^n \left(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n [X_j < a_n x + b_n] \cap [a_n(x - t_n) + b_n \leq X_i < a_n x + b_n]\right)\right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

il en résulte

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n \left(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n [X_j < a_n x + b_n] \cap [a_n(x - t_n) + b_n \leq X_i < a_n x + b_n]\right)\right)/t_n \rightarrow \Phi'_k(x) \quad (3.10)$$

uniformément en  $x \in (x', x'')$ . D'après le lemme 2.4 on a  $-n(1 - F(a_n x + b_n)) \rightarrow \log(\Phi_k(x))$  pour tout  $x$  tel que  $\Phi_k(x) \neq 0$ . On applique de nouveau le lemme 3.2 à la suite de fonctions  $-n(1 - F(a_n x + b_n))$  et à la fonction limite  $\log(\Phi_k(x))$  pour un intervalle  $(a, b)$ , tel que  $[x', x''] \subset (a, b)$  et  $\Phi_k(x) > 0$  pour tout  $x \in [a, b]$ . Il s'ensuit qu'on peut trouver une suite  $v_n \downarrow 0$ , telle que

$$n(F(a_n x + b_n) - F(a_n(x - t_n) + b_n))/t_n \rightarrow \Phi'_k(x)/\Phi_k(x) \quad (3.11)$$

uniformément en  $x \in (x', x'')$ , pour toute suite  $t_n \downarrow 0$ , où  $t_n \geq v_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Si on observe qu'en raison du lemme 3.1 on a  $G_n(a_n x + b_n) \rightarrow \Phi_k(x)$  uniformément en  $x \in (x', x'')$ , de (3.11) on déduit que

$$n(F(a_n x + b_n) - F(a_n(x - t_n) + b_n)) G_n(a_n x + b_n)/t_n \rightarrow \Phi'_k(x) \quad (3.12)$$

uniformément en  $x \in (x', x'')$ , pour toute suite  $t_n \downarrow 0$ , telle que  $t_n \geq v_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Si on pose  $u_n = \text{Max}(s_n, v_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  des relations (3.10) et (3.12) on obtient que la condition (3.1) est nécessaire.

b) La condition (3.1) est suffisante.

En vertu du théorème de compacité faible des f. croissantes à val. dans  $[0, 1]$ , il

suffit de démontrer que, pour toute sous-suite d'indices  $n_k \uparrow \infty$ , telle que  $G_{n_k}(a_{n_k}x + b_{n_k})$  converge  $\xrightarrow{W}$  vers une fonction limite  $g(x)$ , on a  $g(x) = \Phi_k(x)$ .

Comme dans la première partie de la démonstration du théorème, on voit que la convergence de  $F^n(a_nx + b_n)$  vers  $\Phi_k(x)$  entraîne l'existence d'une suite  $v_n \downarrow 0$ , telle que la relation (3.11) est vérifiée uniformément en  $x \in (x', x'')$ , pour toute suite  $t_n \downarrow 0$ , où  $t_n \geq v_n, n = 1, 2, \dots$ . De la relation (3.9) et de la condition (3.1) on déduit que

$$(G_n(a_nx + b_n) - G_n(a_n(x - t_n) + b_n))/t_n - \Phi'_k(x) G_n(a_nx + b_n)/\Phi_k(x) \rightarrow 0 \quad (3.13)$$

uniformément en  $x \in (x', x'')$ , pour toute suite  $t_n \downarrow 0$ , telle que  $t_n \geq \text{Max}(u_n, v_n), n = 1, 2, \dots$ . Les fonctions  $G_n(a_nx + b_n)$  étant croissantes et les nombres  $a_n$  positifs, de (3.13) il résulte que pour toute suite  $t_n \downarrow 0$  on a

$$G_n(a_n(x + t_n) + b_n) - G_n(a_n(x - t_n) + b_n) \rightarrow 0 \quad (3.14)$$

quel que soit  $x \in (x', x'')$ .

Soit une sous-suite  $n_k, k = 1, 2, \dots$  telle que  $G_{n_k}(a_{n_k}x + b_{n_k}) \xrightarrow{W} g(x)$ . En vertu de la relation (3.14) on peut appliquer le lemme 3.3 à la suite de f. de r.  $G_{n_k}(a_{n_k}x + b_{n_k}), k = 1, 2, \dots$  et à la fonction limite  $g(x)$ . On obtient que  $g(x)$  est continue dans l'intervalle  $(x', x'')$ . D'après le lemme 3.1 et de la relation (3.13), on déduit que pour toute suite  $t_{n_k} \downarrow 0$ , telle que  $t_{n_k} \geq \text{Max}(u_{n_k}, v_{n_k}), k = 1, 2, \dots$  les relations

$$(G_{n_k}(a_{n_k}x + b_{n_k}) - G_{n_k}(a_{n_k}(x - t_{n_k}) + b_{n_k}))/t_{n_k} \rightarrow \Phi'_k(x) g(x)/\Phi_k(x) \quad (3.15)$$

et

$$(G_{n_k}(a_{n_k}(x + t_{n_k}) + b_{n_k}) - G_{n_k}(a_{n_k}x + b_{n_k}))/t_{n_k} \rightarrow \Phi'_k(x) g(x)/\Phi_k(x) \quad (3.15')$$

sont vérifiées pour tout  $x \in [y', y'']$ , ou  $[y', y'']$  est un intervalle quelconque contenu dans  $(x', x'')$ .

Les relations (3.15) et (3.15') étant satisfaites, on peut appliquer le lemme 3.4 à la suite de f. de r.  $G_{n_k}(a_{n_k}x + b_{n_k})$  et à la fonction limite  $g(x)$ . Il en résulte que  $g(x)$  est dérivable dans  $(y', y'')$  et qu'elle satisfait à l'équation différentielle

$$g'(x) = \Phi'_k(x) g(x)/\Phi_k(x) \quad \text{quel que soit } x \in (y', y''). \quad (3.16)$$

Soit  $x_k = \inf \{x : \Phi_k(x) = 1\}$  et  $y_k = \{\sup x : \Phi_k(x) = 0\}$ . D'après la condition (3.1), l'équation différentielle (3.16) doit être satisfaite dans chaque intervalle  $[y', y''] \subset (y_k, x_k)$ ; il en résulte que

$$g'(x) = \Phi'_k(x) g(x)/\Phi_k(x) \quad \text{quel que soit } x \in (y_k, x_k). \quad (3.17)$$

Si on observe que  $G_n(a_nx + b_n) \geq 1 - n(1 - F(a_nx + b_n))$ , en raison du lemme 2.4 on obtient  $\lim_{x \rightarrow x_k} g(x) = 1$ ; de (3.17) il s'ensuit que  $g(x)$  doit être égale à  $\Phi_k(x)$  pour tout  $x \in (y_k, x_k)$ . La fonction  $g(x)$  étant croissante on a  $g(x) = \Phi_k(x)$  pour tout  $x$ . La démonstration du théorème est ainsi terminée.

REMARQUE. La condition (3.1) est équivalente à la suivante:

$$(1/t_n) \sum_{i=1}^n P(B_n^i(x)) \{P([a_n(x-t_n) + b_n \leq X_i < a_n x + b_n] | B_n^i(x)) - (F(a_n x + b_n) - F(a_n(x-t_n) + b_n))\} - f(n, x) \rightarrow 0 \quad (3.18)$$

uniformément en  $x \in (x', x'')$ , pour toute suite  $t_n \downarrow 0$ , telle que  $t_n \geq u_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , où

$$B_n^i(x) = \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n [X_j < a_n x + b_n]$$

et

$$f(n, x) = 1/t_n \sum_{i=1}^n P([a_n(x-t_n) + b_n \leq X_i < a_n x + b_n] \cap B_n^i(x)) - 1/t_n P\left(\bigcup_{i=1}^n (B_n^i(x) \cap [a_n(x-t_n) + b_n \leq X_i < a_n x + b_n])\right). \quad (3.19)$$

Si on observe que pour toute suite finie d'ensembles  $A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  on a

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) - P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{j=1}^{n-1} P(A_j \cap A_{j+1}) + \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-k-1} P\left(A_j \cap \left(\bigcap_{h=1}^k A_{j+h}^c\right) \cap A_{j+k+1}\right),$$

alors on peut écrire

$$\begin{aligned} f(n, x) &= 1/t_n \sum_{j=1}^{n-1} P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{j-1} [X_i < a_n x + b_n]\right) \cap [a_n(x-t_n) + b_n \leq X_j < a_n x + b_n] \cap \right. \\ &\quad \left. \cap [a_n(x-t_n) + b_n \leq X_{j+1} < a_n x + b_n] \cap \left(\bigcap_{i=j+2}^n [X_i < a_n x + b_n]\right)\right) + \\ &\quad + 1/t_n \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-k-1} P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{j-1} [X_i < a_n x + b_n]\right) \cap [a_n(x-t_n) + b_n \leq X_j < a_n x + b_n] \cap \right. \\ &\quad \left. \cap \left(\bigcap_{h=1}^k [X_{h+j} < a_n(x-t_n) + b_n]\right) \cap [a_n(x-t_n) + b_n \leq X_{j+k+1} < a_n x + b_n] \cap \right. \\ &\quad \left. \cap \left(\bigcap_{i=j+k+2}^n [X_i < a_n x + b_n]\right)\right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

#### 4. Applications du théorème 3.1

Soit  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  un processus aléatoire ayant la propriété suivante:

$$\sup |P(A \cap B_1 \cap B_2) - P(A)P(B_1 \cap B_2)| \leq \alpha(n) \quad (4.1)$$

où:  $\alpha(n) \downarrow 0$  et le supremum est pris sur tous les ensembles

$$A \in \mathfrak{M}_i^i, \quad B_1 \in \mathfrak{M}_1^{i-n}, \quad B_2 \in \mathfrak{M}_{i+n}^\infty \quad \text{et sur tout } i = n+1, n+2, \dots$$

Des exemples pourraient facilement le montrer, la condition (4.1) qui vient d'être introduite est bien plus générale que la condition de mélange uniformément forte (voir LOYNES [9]).

**THÉORÈME 4.1.** *Soit  $X_i, i = 1, 2, \dots$  un processus aléatoire à lois marginales identiques,  $P[X_i < x] = F(x)$ , ayant la propriété (4.1) et tel que  $n\alpha(n) \rightarrow 0$ . Supposons que  $F^n(a_n x + b_n) \rightarrow \Phi_k(x)$ , alors pour que  $P[Z_n < a_n x + b_n] \rightarrow \Phi_k(x)$ , il faut et il suffit que, pour tout intervalle  $(x', x'')$ , il existe des entiers  $m_n \uparrow \infty$  et des nombres  $u'_n \downarrow 0$ , tels que*

$$m_n/n \rightarrow 0, \quad n\alpha(m_n) \rightarrow 0 \tag{4.2}$$

$$(1/t_n) \sum_{i=m_n+2}^{n-m_n-2} P([a_n(x-t_n) + b_n \leq X_i < a_n x + b_n] \cap \left( \bigcup_{\substack{j \in I(m_n, i)^c \\ j \neq i}} [X_j \geq a_n x + b_n] \right) \cap \bigcap_{j \in I(m_n, i)} [X_j < a_n x + b_n]) \rightarrow 0 \tag{4.3}$$

$$f(n, x) \rightarrow 0 \tag{4.4}$$

uniformément en  $x \in (x', x'')$ , pour toute suite  $t_n \downarrow 0$ , telle que  $t_n \geq u'_n, n = 1, 2, \dots$ , où l'intervalle  $(x', x'')$  a la même signification que dans le théorème 3.1, où  $I(m_n, i) = [1, -m_n + i) \cup (i + m_n + 1, n]$ ,  $i = m_n + 2, \dots, n - m_n - 2$  et où la fonction  $f(n, x)$  est définie par la relation (3.19).

*Démonstration.* Il suffit de démontrer que, pour le processus considéré, la condition (3.1) est équivalente aux conditions (4.2), (4.3) et (4.4).

D'après les hypothèses faites sur la fonction  $\alpha(n)$ , il s'ensuit qu'on peut donner des entiers  $m_n \uparrow \infty$  et des nombres  $s_n \downarrow 0$ , tels que

$$m_n/n \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad n\alpha(m_n)/s_n \rightarrow 0. \tag{4.5}$$

En vertu du lemme 2.4 on a

$$P\left(\bigcap_{j \in I(m_n, i)} [X_j < a_n x + b_n]\right) - P[Z_n < a_n x + b_n] \rightarrow 0 \tag{4.6}$$

uniformément en  $x \in (x', x'')$  et en  $i \in [m_n + 1, n - m_n - 1]$ . Soit une suite  $v_n \downarrow 0$  ayant la même signification que dans la démonstration du théorème 3.1; en raison de la propriété (4.1), des relations (4.5) et (4.6) on obtient

$$(1/t_n) \sum_{i=m_n+1}^{n-m_n-1} P\left([a_n(x-t_n) + b_n \leq X_i < a_n x + b_n] \cap \bigcap_{j \in I(m_n, i)} [X_j < a_n x + b_n]\right) - (1/t_n) P[Z_n < a_n x + b_n] n(F(a_n x + b_n) - F(a_n(x-t_n) + b_n)) \rightarrow 0 \tag{4.7}$$

uniformément en  $x \in (x', x'')$ , pour toute suite  $t_n \downarrow 0$  telle que  $t_n \geq \text{Max}(s_n, v_n), n = 1, 2, \dots$

Si on pose  $u'_n = \text{Max}(u_n, v_n, s_n)$ , de (3.1) et de (4.7) il résulte que

$$(1/t_n) \sum_{i=m_n+1}^{n-m_n-1} P\left([a_n(x-t_n) + b_n \leq X_i < a_n x + b_n] \cap \bigcap_{j \in I(m_n, i)} [X_j < a_n x + b_n]\right) - \\ - (1/t_n) P\left(\bigcup_{i=1}^n \left(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n [X_j < a_n x + b_n] \cap [a_n(x-t_n) + b_n \leq X_i < a_n x + b_n]\right)\right) \rightarrow 0 \quad (4.8)$$

uniformément en  $x \in (x', x'')$ , pour toute suite  $t_n \downarrow 0$  telle que  $t_n \geq u'_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$

La validité de (4.8) entraîne celle de (4.3) et de (4.4). D'autre part si les conditions (4.3) et (4.4) sont vérifiées, la relation (4.8) l'est également. Si on pose  $u_n = \text{Max}(u'_n, s_n, v_n)$  de (4.8) et (4.7) on obtient (3.1). La démonstration est ainsi terminée.

Soit  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  un processus aléatoire tel que, pour tous ensembles  $A_1 \in \mathfrak{M}_i^i$ ,  $A_2 \in \mathfrak{M}_j^j$ ,  $B_1 \in \mathfrak{M}_1^{i-n}$ ,  $B_2 \in \mathfrak{M}_{j+n}^\infty$ , où  $i \leq j$  et  $i = n+1, n+2, \dots$ , l'on ait

$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \alpha(n)P(A)P(B) \quad (4.9)$$

quel que soit  $n \geq N$ , où  $N$  est un nombre entier positif fini et où la fonction  $\alpha(n) \downarrow 0$  est indépendante de  $A = A_1 \cap A_2$ ,  $B = B_1 \cap B_2$ ,  $i, j$ .

Pour un processus satisfaisant à (4.9) on peut donner une condition nécessaire et suffisante simple pour que  $P[Z_n < a_n x + b_n] \rightarrow \Phi_k(x)$ .

**THÉORÈME 4.2.** Soit  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  un processus aléatoire ayant la propriété (4.9) et tel que  $P([X_j < x] \cap [X_{j+h} < x])$  ne dépend pas de  $j = 1, 2, \dots$  pour tout  $h = 1, 2, \dots$ . Supposons que  $F^n(a_n x + b_n) \rightarrow \Phi_k(x)$ , où  $a_n > 0$ , alors pour que l'on ait  $P[Z_n < a_n x + b_n] \rightarrow \Phi_k(x)$ , il faut et il suffit que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P([X_1 \geq x] \cap [X_h \geq x]) / P[X_1 \geq x] = 0 \quad (4.10)$$

pour tout  $h = 2, \dots$ , où  $x_0 = \inf\{x : F(x) = 1\}$ .

*Démonstration.* On démontre que, pour le processus considéré, la condition (4.10) est équivalente à la condition (3.1).

a) La condition (4.10) est nécessaire.

En vertu de la propriété (4.9), de même que dans la démonstration du théorème 4.1 on démontre que, pour toute suite  $m_n \uparrow \infty$ , telle que  $m_n/n \rightarrow 0$ , on a

$$(1/t_n) \sum_{i=m_n+2}^{n-m_n-2} P\left([a_n(x-t_n) + b_n \leq X_i < a_n x + b_n] \cap \bigcap_{j \in I(m_n, i)} [X_j < a_n x + b_n]\right) - \\ - (1/t_n) P[Z_n < a_n x + b_n] n(F(a_n x + b_n) - F(a_n(x-t_n) + b_n)) \rightarrow 0 \quad (4.11)$$

uniformément en  $x \in (x', x'')$ , pour toute suite  $t_n \downarrow 0$ , telle que  $t_n \geq v_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , où l'intervalle  $I(m_n, i)$  et la suite  $v_n \downarrow 0$  ont la même signification que dans la démonstration

du théorème précédent. En raison des hypothèses faites, de (4.11) et de (3.1) on obtient

$$(n/t_n)P([\![X_1 \geq a_n x + b_n]\!] \cap [\![X_h \geq a_n x + b_n]\!]^c \cap [\![X_1 \geq a_n(x - t_n) + b_n]\!] \cap [\![X_h \geq a_n(x - t_n) + b_n]\!] \rightarrow 0 \quad (4.12)$$

uniformément en  $x \in (x', x'')$ , pour toute suite  $t_n \downarrow 0$ , telle que  $t_n \geq \text{Max}(u_n, v_n)$  et quel que soit  $h=2, 3, \dots$ . De (3.11) on déduit qu'il existe un nombre entier  $L < \infty$  tel que

$$F(a_n x + b_n) - F(a_n(x - v_n) + b_n) > 0, \quad \forall n \geq L. \quad (4.13)$$

De (3.11), (4.12) et (4.13) il s'ensuit que

$$P([\![X_1 \geq a_n x + b_n]\!] \cap [\![X_h \geq a_n x + b_n]\!]^c \cap [\![X_1 \geq a_n(x - t_n) + b_n]\!] \cap [\![X_h \geq a_n(x - t_n) + b_n]\!] (1/(F(a_n x + b_n) - F(a_n(x - t_n) + b_n))) \rightarrow 0 \quad (4.14)$$

uniformément en  $x \in (x', x'')$ , pour toute suite  $t_n \downarrow 0$ , telle que  $t_n \geq \text{Max}(u_n, v_n)$  et quel que soit  $h=2, 3, \dots$ .

Pour un point  $x \in (x', x'')$  la relation  $F^n(a_n x + b_n) \rightarrow \Phi_k(x)$  entraîne la convergence des suites  $a_n x + b_n$  et  $a_n(x - t_n) + b_n$ ,  $n=1, 2, \dots$  vers  $x_0$ , telle que  $a_n x + b_n < x_0$  pour tout  $n \geq L'$ , où  $L'$  est un entier suffisamment grand. Soit un nombre entier  $M \geq \text{Max}(L, L')$ . On considère une suite  $n_j, j=1, 2, \dots$  définie de la façon suivante:

$$n_1 = M, \quad n_j = \text{Min} \{n: n \geq n_{j-1}, a_n(x - v'_n) + b_n \geq a_{n_{j-1}} x + b_{n_{j-1}}\}, \\ \text{où } v'_n = \text{Max}(u_n, v_n) \quad (4.15)$$

Soient des nombres  $q_{n_j}, j=2, 3, \dots$ , tels que

$$a_{n_j}(x - q_{n_j}) + b_{n_j} = a_{n_{j-1}} x + b_{n_{j-1}} \quad (4.16)$$

De (4.15) et (4.16) on a

$$a_{n_{j-1}}(x - v'_{n_{j-1}}) + b_{n_{j-1}} \leq a_{n_j}(x - q_{n_j}) + b_{n_j} \quad (4.17)$$

En raison du lemme 2.2 il résulte que  $a_n/a_{n+1} \rightarrow 1$  et que  $(b_{n+1} - b_n)/a_n \rightarrow 0$ ; de (4.15) et (4.17) on obtient

$$q_{n_j} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad q_{n_j} \geq v'_{n_j}, \quad j = 2, 3, \dots \quad (4.18)$$

On pose

$$A_{n_j} = [a_{n_j}(x - q_{n_j}) + b_{n_j} \leq X_1 < a_{n_j} x + b_{n_j}]$$

et

$$B_{n_j} = ([a_{n_j} x + b_{n_j} \leq X_1] \cap [a_{n_j} x + b_{n_j} \leq X_h])^c \cap \\ \cap [a_{n_j}(x - q_{n_j}) + b_{n_j} \leq X_1] \cap [a_{n_j}(x - q_{n_j}) + b_{n_j} \leq X_h]$$

pour un entier  $h \geq 2$  déterminé. De (4.16) il s'ensuit que

$$\sum_{j=2}^{\infty} A_{n_j} = [a_M x + b_M \leq X_1 < x_0] \quad (4.19)$$

et

$$\sum_{j=2}^{\infty} B_{n_j} = [a_M x + b_M \leq X_1 < x_0] \cap [a_M x + b_M \leq X_h < x_0]$$

Pour les probabilités  $P(A_{n_j})$  et  $P(B_{n_j})$  on obtient facilement l'inégalité suivante:

$$\sum_{j=2}^{\infty} P(B_{n_j}) / \sum_{j=2}^{\infty} P(A_{n_j}) \leq \sup_{j \geq 2} (P(B_{n_j}) / P(A_{n_j})) \quad (4.20)$$

En raison de (4.14), de (4.18) et de (4.19), l'inégalité (4.20) entraîne la relation

$$P([a_M x + b_M \leq X_1 < x_0] \cap [a_M x + b_M \leq X_h < x_0]) / (F(x_0) - F(a_M x + b_M)) \rightarrow 0 \quad (4.21)$$

quand  $M \uparrow \infty$ , pour un point quelconque  $x \in (x', x'')$  et quel que soit  $h = 2, 3, \dots$ . Une application simple du lemme 2.4 permet d'obtenir (4.10) de (4.21). La première partie de la démonstration est ainsi terminée.

b) La condition (4.10) est suffisante.

Si (4.10) est vérifiée, alors on peut donner des nombres entiers  $m_n \uparrow \infty$  et une suite  $w_n \downarrow 0$ , tels que

$$(1/t_n) \sum_{i=m_n+1}^{n-m_n-1} P([a_n(x-t_n) + b_n \leq X_i < a_n x + b_n] \cap \bigcup_{\substack{j=i-m_n \\ j \neq i}}^{i+m_n+1} [X_j \geq a_n x + b_n]) \rightarrow 0$$

uniformément en  $x \in (x', x'')$ , pour toute suite  $t_n \downarrow 0$ , telle que  $t_n \geq w_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Si on choisit  $u_n = \text{Max}(w_n, v_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , où la suite  $v_n \downarrow 0$  a la signification habituelle, alors, en vertu de la propriété (4.9) et du lemme 2.4, de (4.22) on obtient

$$(1/t_n) \sum_{i=1}^n P([a_n(x-t_n) + b_n \leq X_i < a_n x + b_n] \cap \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n [X_j < a_n x + b_n]) - (1/t_n) n (F(a_n x + b_n) - F(a_n(x-t_n) + b_n)) P[Z_n < a_n x + b_n] \rightarrow 0 \quad (4.23)$$

uniformément en  $x \in (x', x'')$ , pour toute suite  $t_n \downarrow 0$ , où  $t_n \geq u_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . En raison de la propriété (4.9), pour toute suite  $t_n \downarrow 0$ , telle que  $t_n \geq u_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  la fonction  $f(n, x)$  tend vers 0 uniformément en  $x \in (x', x'')$ ; de (4.23) il s'ensuit que la relation (3.1) est vérifiée. La condition (4.10) est donc aussi suffisante et le théorème 4.1 est ainsi complètement démontré.

## 5. Convergence vers $\Phi_k(x)$ : condition de mélange

Soit  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  un processus aléatoire strictement stationnaire soumis à la condition de mélange uniformément forte, à savoir:

$$\sup |P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \alpha(n) \quad (5.1)$$

où  $\alpha(n) \downarrow 0$  et où le supremum est pris sur tout ensemble  $A \in \mathfrak{M}_1^k$  et  $B \in \mathfrak{M}_{k+n}^\infty$ ,  $k=1, 2, \dots$

M. ROSENBLATT [12], IBRAGIMOV et d'autres auteurs ont étudié le comportement asymptotique de  $P[S_n < a_n x + b_n]$ ,  $S_n$  indiquant la somme  $X_1 + X_2 + \dots + X_n$  et  $a_n > 0$  et  $b_n$  étant des constantes. R. M. LOYNES [9] a considéré le problème correspondant pour la variable  $Z_n$ . Il a démontré que les lois limites possibles sont du type de  $\Phi_1(x)$ ,  $\Phi_2(x)$  et  $\Phi_3(x)$ . Dans ce paragraphe on se pose la même question que dans les deux précédents pour des processus satisfaisant à la condition de mélange uniformément forte. Les résultats obtenus dérivent directement des méthodes employées par R. M. LOYNES (loc. cit.).

**THÉORÈME 5.1.** *Soit  $X_i$ ,  $i=1, 2, \dots$  un processus aleatoire strictement stationnaire ayant la propriété (5.1), et  $g(n)$  une fonction définie et à valeurs dans les nombres entiers telle que*

$$g(n)/n \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \alpha(g(n)) n/g(n) \rightarrow 0. \tag{5.2}$$

*Supposons que  $F^n(a_n x + b_n) \rightarrow \Phi_k(x)$ , alors pour que l'on ait  $P[Z_n < a_n x + b_n] \rightarrow \Phi_k(x)$  la condition suivante est nécessaire et suffisante:*

$$\begin{aligned} n P([X_1 \geq a_n x + b_n] \cap [X_2 \geq a_n x + b_n]) + \\ + (n/g(n)) \sum_{j=0}^{g(n)} (g(n) - j) P([X_1 \geq a_n x + b_n] \cap \\ \cap \bigcap_{k=2}^{2+j} [X_k < a_n x + b_n] \cap [X_{j+3} \geq a_n x + b_n]) \rightarrow 0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

pour tout  $x$ , où  $\Phi_k(x) > 0$ .

*Démonstration.* En vertu des hypothèses faites il existe une fonction  $g(n)$  satisfaisant à (5.2) et telle que

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i < a_n x + b_n]\right) - \left(P\bigcap_{i=1}^{g(n)} [X_i < a_n x + b_n]\right)^{n/g(n)} \rightarrow 0. \tag{5.4}$$

Si l'on observe que d'après le lemme 2.4, pour tout  $x$ , où  $\Phi_k(x) > 0$ , on a

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{g(n)} [X_i \geq a_n x + b_n]\right) \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad (n/g(n)) P\left(\bigcup_{i=1}^{g(n)} [X_i \geq a_n x + b_n]\right) < C < \infty$$

pour tout  $n$ , alors de (4.5) on obtient

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i < a_n x + b_n]\right) - \exp\left(-n P\left(\bigcup_{i=1}^{g(n)} [X_i \geq a_n x + b_n]\right)/g(n)\right) \rightarrow 0 \tag{5.5}$$

pour tout  $x$  tel que  $\Phi_k(x) > 0$ . Il en résulte que  $P[Z_n < a_n x + b_n] \rightarrow \Phi_k(x)$  si et seulement si

$$(n/g(n)) \sum_{i=1}^{g(n)} P[X_i \geq a_n x + b_n] - (n/g(n)) P\left(\bigcup_{i=1}^{g(n)} [X_i \geq a_n x + b_n]\right) \rightarrow 0 \tag{5.6}$$

pour tout  $x$  tel que  $\Phi_k(x) > 0$ .

Le processus aléatoire considéré étant strictement stationnaire de (5.6) il s'ensuit que la condition (5.3) est bien nécessaire et suffisante.

Si à la place d'un processus ayant la propriété (5.1) on considère un processus strict. stationnaire \*-mélange, voir [4], alors, à l'aide du théorème 5.1 on démontre aisément que (4.10) est une condition nécessaire et suffisante pour que la relation  $F^n(a_n x + b_n) \rightarrow \Phi_k(x)$  entraîne la convergence de  $P[Z_n < a_n x + b_n]$  vers  $\Phi_k(x)$ . Pour des processus de ce type la résolution du problème posé est donc beaucoup plus simple que pour les processus considérés dans le théorème 4.2, mais il faut ajouter que la condition \*-mélange est bien plus forte que la condition (4.9).

Un processus  $m$ -dépendant étant aussi \*-mélange, de (4.10) on déduit immédiatement que la condition de G. S. WATSON [13] est nécessaire et suffisante, ce qui avait déjà été démontré par NEWELL [11].

## 6. Lois limites pour un processus de Markov

Les travaux dédiés à l'étude des lois qui peuvent intervenir comme limite  $\xrightarrow{w}$  de  $P[Z_n < a_n x + b_n]$  dans le cas d'un processus de Markov, sont fort peu nombreux (voir S. M. BERMAN [2] et R. COGBURN [5] pour des processus à temps discret, G. F. NEWELL [10] et S. M. BERMAN [3] pour des processus à temps continu). Dans ce paragraphe on démontre quelques résultats obtenus à ce sujet.

Soit  $X_i, i=1, 2, \dots$  un processus de Markov strictement stationnaire, défini par une probabilité de transition  $p(x, A)$  et par une probabilité initiale  $p(A)$ , où  $x$  est un point de  $R$  et  $A$  un élément de la  $\sigma$ -algèbre  $\beta(R)$  des ensembles de Borel de  $R$ . Si  $A_i, i=1, 2, \dots, n$  sont des ensembles appartenant à  $\beta(R)$  alors, pour un tel processus, on a

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i \in A_i]\right) = \int_{A_1} p(dx_1) \int_{A_2} p(x_1, dx_2) \dots \int_{A_n} p(x_{n-1}, dx_n).$$

Si le processus considéré satisfait à la condition de Doeblin (voir DOOB [6], pp. 192-221), alors on peut démontrer qu'il existe un nombre fini d'ensembles invariants  $E_a, a=1, 2, \dots, d$ , décomposés dans un nombre fini de classes cycliques  ${}_a C_\alpha, \alpha=1, 2, \dots, d_a, a=1, 2, \dots, d$ . Sans porter atteinte à la généralité on peut supposer que  $p(E_a) > 0$  pour tout  $a=1, 2, \dots, d$ , alors on a

$$p\left(\bigcup_{a=1}^d E_a\right) = 1, \quad p(E_a \cap E_b) = 0$$

pour tout  $a \neq b$  et  $p({}_a C_\alpha \cap {}_a C_\beta) = 0$  pour tout  $\alpha \neq \beta$ , quel que soit  $a=1, 2, \dots, d$ . Soit

$$p^{(m)}(x, A) = \int_R p(x, dx_1) \int_R p(x_1, dx_2) \dots \int_R p(x_{m-2}, dx_{m-1}) \int_A p(x_{m-1}, dx_m)$$

et

$$p^{(1)}(x, A) = p(x, A).$$

D'après les hypothèses faites on peut démontrer (voir DOOB [6], pp. 190–221) qu'il existe une constante positive  $C$  telle que

$$\left| (1/n) \sum_{m=1}^n p^{(m)}(x, A) - p(A|E_a) \right| \leq C/n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.1)$$

pour tout ensemble  $A \in \beta(R)$  et quel que soit  $x \in E_a, a = 1, 2, \dots, d$ .

On considère d'abord des processus à un seul ensemble invariant.

**THÉOREME 6.1.** *Soit  $X_i, i = 1, 2, \dots$  un processus de Markov strictement stationnaire, satisfaisant à la condition de Doeblin et avec un seul ensemble invariant. Supposons que  $a_n > 0$  et  $b_n$  soient des constantes, alors la classe des lois propres qui peuvent intervenir comme limite  $\xrightarrow{W}$  de  $P[Z_n < a_n x + b_n]$  est la même que dans le cas de l'indépendance.*

Avant de commencer la démonstration on donne les deux lemmes suivants:

**LEMME 6.1.** *Soit  $X_i, i = 1, 2, \dots$  un processus de Markov strictement stationnaire satisfaisant à la condition de Doeblin et  $f_n, n = 1, 2, \dots$  une suite de fonctions déf. dans  $R$ , mesurables  $\beta(R)$  et unif. limitées,  $|f_n| \leq M, n = 1, 2, \dots$ . Si  $q_n \uparrow \infty$  est une suite de nombres entiers, alors on a l'inégalité:*

$$\left| (1/q_n) \sum_{i=1}^{q_n} \int_A p^{(i)}(x_1, dx_{i+1}) f_n(x_{i+1}) - (1/p(E_a)) \int_{A \cap E_a} p(dx_1) f_n(x_1) \right| \leq 2CM/q_n \quad (6.2)$$

quel que soit  $x_1 \in E_a$ , pour tout ensemble de Borel  $A \in \beta(R)$  et chaque  $a$ .

La démonstration de ce lemme est très peu différente de celle du lemme 7.2 de [6], p. 224.

**LEMME 6.2.** *Soit  $X_i, i = 1, 2, \dots$  un processus identique à celui considéré dans le lemme 6.1. Supposons que pour une suite de nombres  $y_n, n = 1, 2, \dots$  et pour un indice déterminé  $a$  on ait*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P([X_1 < y_n] | [X_1 \in E_a]) < 1 \quad (6.3)$$

alors pour toute suite de nombres entiers  $m_n \uparrow \infty$  on a

$$P([Z_{m_n} < y_n] | [X_1 \in E_a]) \rightarrow 0. \quad (6.4)$$

*Démonstration.* Considérons une suite de nombres entiers  $q_n \uparrow \infty$  telle que  $q_n/n \rightarrow 0$ . On peut écrire:

$$P([Z_{m_n} < y_n] \cap [X_1 \in E_a]) \leq \int_{E_a} p(dx_1) (1/q_n) \sum_{i_1=1}^{q_n} \int_{-\infty}^{y_n} p^{(i_1)}(x_1, dx_{i_1+1})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x_{i_1+1}, dx_{i_1+2}) \dots (1/q_n) \sum_{i_2=1}^{q_n} \int_{-\infty}^{y_n} p^{(i_2)}(x_{q_n+1}, dx_{q_n+1+i_2})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x_{q_n+1+i_2}, dx_{q_n+2+i_2}) \dots (1/q_n) \sum_{i_{r_n}=1}^{q_n} p^{(i_{r_n})}(x_{q_n(r_n-1)+1}, (-\infty, y_n))$$

où  $r_n = [m_n/q_n]$ . En vertu de (6.1) il en résulte que

$$P([Z_{m_n} < y_n] \cap [X_1 \in E_a]) \leq (P([X_1 < y_n] \cap [X_1 \in E_a]) + C/q_n)^{r_n} \quad (6.5)$$

De (6.5) et (6.3) on obtient immédiatement (6.4).

*Démonstration du théorème 6.1.* Si  $P[Z_n < a_n x + b_n] \xrightarrow{W} G(x)$ , où  $G(x)$  est une f. de r. propre et si  $x^*$  est un point tel que  $G(x^* - 0) > 0$ , alors en raison du lemme 6.2,  $P[X_1 \geq a_n x + b_n] \rightarrow 0$  pour tout  $x \geq x^*$ . Supposons que  $j$  soit un nombre entier positif et  $q_n \uparrow \infty$  une suite d'entiers telle que  $q_n \leq n-1$  et  $P[X_1 \geq a_n x + b_n] q_n \rightarrow 0$ , alors on a la relation suivante:

$$P[Z_{n_j} < a_n x + b_n] - \int_R p(dx_1) (1/q_n) \sum_{i_1=1}^{q_n} \int_{A_n(x)} p^{(i_1)}(x_1, dx_{i_1+1}) \int_{A_n(x)} p(x_{i_1+1}, x_{i_1+2}) \dots$$

$$\dots \int_{A_n(x)} p(x_{n-q_n+i_1}, dx_{n-q_n+i_1+1}) \int_R p(x_{n-q_n+i_1+1}, dx_{n-q_n+i_1+2}) \dots$$

$$\dots (1/q_n) \sum_{i_2=1}^{q_n} \int_{A_n(x)} p^{(i_2)}(x_n, dx_{n+i_2}) \int_{A_n(x)} \dots \int_R p(x_{2n-q_n+i_2+1}, dx_{2n-q_n+i_2+2}) \dots$$

$$\dots (1/q_n) \sum_{i_j=1}^{q_n} \int_{A_n(x)} p^{(i_j)}(x_{n(j-1)}, dx_{n(j-1)+i_j}) \times$$

$$\int_{A_n(x)} \dots \int_{A_n(x)} p(x_{nj-q_n+i_j}, dx_{nj-q_n+j+1}) \rightarrow 0, \quad (6.6)$$

où  $A_n(x) = (-\infty, a_n x + b_n)$ . En vertu du lemme 6.1 on obtient  $P[Z_{n_j} < a_n x + b_n] \rightarrow G^j(x)$  en tout point de continuité de  $G(x)$  tel que  $x \geq x^*$ .  $G(x)$  étant une f. de r., on en déduit que

$$P[Z_{n_j} < a_n x + b_n] \xrightarrow{W} G^j(x). \quad (6.8)$$

D'après le lemme 2.1, de (6.8) nous pouvons conclure que pour tout  $j=1, 2, \dots$ , il existe des constantes  $\alpha_j$  et  $\beta_j$  telles que

$$G^j(\alpha_j x + \beta_j) = G(x). \quad (6.9)$$

Cette équation fonctionnelle étant la même que dans le cas de l'indépendance le théorème est démontré.

Si le nombre d'ensembles invariants du processus considéré est plus grand que 1, nous nous limiterons à l'étude d'un problème restreint. Nous supposons que pour tout nombre entier  $r \geq 1$  et pour des constantes  $a_n > 0$  et  $b_n$ ,  $n = 2, 2, \dots$ , l'on ait

$$P[Z_{nr} < a_n x + b_n] \xrightarrow{W} G_r(x) \tag{6.10}$$

où les  $G_r(x)$  sont des f. de r. propres. D'après le lemme 2.1, les lois  $G_r(x)$ ,  $r = 1, 2, \dots$ , doivent alors être du même type.

Nous nous poserons donc la question de déterminer la classe des types limites possibles.

Soient  $c_a > 0$  et  $t_a$ ,  $a = 1, 2, \dots, d$ , des constantes; il est facile de voir que chaque fonction de la forme

$$\sum_{a=1}^d c_a \in(x - t_a), \quad \text{où} \quad \in(x - t_a) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leq t_a \\ 1 & \text{pour } x > t_a \end{cases} \quad \text{et} \quad \sum_{a=1}^d c_a = 1$$

peut être obtenue comme fonction limite. Le cas intéressant à étudier est donc celui où on exclut toute fonction de cette forme. Les types de f. de r. qui n'appartiennent pas à cette classe seront appelés «types propres».

**THÉORÈME 6.2.** *Soit l'ensemble des processus de Markov strictement stationnaires, satisfaisant à la condition de Doeblin et ayant d'ensembles invariants. La classe des types propres limites de  $P[Z_{nr} < a_n x + b_n]$ ,  $r = 1, 2, \dots$  est celle engendrée par les f. de r. suivantes:*

$$\sum_{a=1}^{d'} c_a (\Phi_1(x))^{s_a} + \sum_{a=d'+1}^d c_a \in(x) \tag{6.11}$$

$$\sum_{a=1}^{d'} c_a (\Phi_2(x))^{s_a} + \sum_{a=d'+1}^d c_a \in(x) \tag{6.12}$$

$$\sum_{a=1}^d c_a (\Phi_3(x))^{s_a} \tag{6.13}$$

où  $d' \geq 1$ , où  $s_a > 0$  et  $c_a > 0$ ,  $\sum_{a=1}^d c_a = 1$ , sont des constantes et où l'exposant  $\alpha$ , intervenant dans les fonctions  $\Phi_1(x)$  et  $\Phi_2(x)$ , ne dépend pas de l'indice  $a$ .

*Démonstration.* Considérons un processus déterminé  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Les probabilités conditionnelles  $P([Z_n < a_n x + b_n] | [X_1 \in E_a])$  (notées par la suite avec  $P_a[Z_n < a_n x + b_n]$  étant des f. de r., d'après le théorème de compacité faible des fonctions croissantes à valeurs dans  $[0, 1]$ , on peut trouver une suite de nombres entiers  $n_k \uparrow \infty$  telle que

$$P_a[Z_{n_k} < a_{n_k} x + b_{n_k}] \xrightarrow{W} H_a(x) \tag{6.14}$$

pour tout  $a = 1, 2, \dots, d$ . En vertu des lemmes 6.1 et 6.2 et à l'aide d'une relation semblable à (6.6), de (6.14) il s'ensuit que  $P_a[Z_{n_k} < a_{n_k} x + b_{n_k}] \xrightarrow{W} H_a^j(x)$  pour tout

$a = 1, 2, \dots, d$  et tout  $j = 1, 2, \dots$ ; cette relation pouvant facilement être étendue à tout nombre rationnel  $j > 0$ , il en résulte que

$$P[Z_{[n_k j]} < a_{n_k} x + b_{n_k}] \xrightarrow{W} \sum_{a=1}^d p(E_a) H_a^j(x) \quad (6.15)$$

pour tout nombre rationnel  $j > 0$ . Les fonctions  $\sum_{a=1}^d p(E_a) H_a(x)$  et  $\sum_{a=1}^d p(E_a) H_a^j(x)$  étant d'un type propre, en vertu du lemme 2.1 on peut trouver des constantes  $\alpha_j > 0$  et  $\beta_j$  telles que

$$\sum_{a=1}^d p(E_a) H_a^j(\alpha_j x + \beta_j) = \sum_{a=1}^d p(E_a) H_a(x) \quad (6.16)$$

pour tout nombre rationnel  $j > 0$ .

D'après le lemme 2.2, à partir de (6.15) et de (6.16) on obtient

$$a_{n_k} \alpha_j / a_{[n_k j]} \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad (b_{[n_k j]} - a_{n_k} \alpha_j - b_{n_k}) / a_{[n_k j]} \rightarrow 0 \quad (6.17)$$

Soit  $r$  un nombre entier positif, de (6.15) on a

$$P[Z_{[n_k j]r} < a_{n_k} x + b_{n_k}] \xrightarrow{W} \sum_{a=1}^d p(E_a) H_a^{jr}(x) \quad (6.18)$$

En vertu du lemme 2.3, de (6.17) on déduit que

$$P[Z_{[n_k j]r} < a_{[n_k j]} x + b_{[n_k j]}] \xrightarrow{W} \sum_{a=1}^d p(E_a) H_a^{jr}(\alpha_j x + \beta_j) \quad (6.19)$$

D'autre part de (6.10) et (6.15) on obtient

$$\sum_{a=1}^d p(E_a) H_a^r(x) = G_r(x) \quad (6.20)$$

Enfin de (6.10) et de (6.20) il résulte que

$$\sum_{a=1}^d p(E_a) (H_a^{jr}(\alpha_j x + \beta_j) - H_a^r(x)) = 0 \quad (6.21)$$

pour tout nombre rationnel  $j > 0$  et tout entier  $r \geq 1$ .

Toute fonction de répartition d'un type propre intervenant comme limite  $\xrightarrow{W}$  de  $P[Z_n < a_n x + b_n]$  doit donc satisfaire à l'équation fonctionnelle (6.21).

On peut distinguer trois cas :

1) Il existe un nombre rationnel  $j > 1$  tel que  $\alpha_j < 1$  (dorénavant on notera  $\alpha_j = \alpha(j)$ ).

Dans ce cas, d'après la relation (6.21), à l'aide de méthodes peu différentes de celles employées par GNEDENKO dans [8], pp. 432–433, on obtient ( $j$  indiquera tou-

jours un nombre rationnel):

$$\alpha(j) < 1 \quad \text{et} \quad \beta(j)/(1 - \alpha(j)) = \text{const.} \quad \text{pour tout } j > 1 \quad (6.22)$$

$$0 < G_1(x) < 1 \quad \text{pour tout } x < \beta(j)/(1 - \alpha(j)) \quad (6.23)$$

et

$$G_1(\beta(j)/(1 - \alpha(j))) = 1 \quad \text{pour tout } j > 1. \quad (6.24)$$

Soient  $p$  et  $q$  des nombres entiers. En vertu de la relation (6.21) et à l'aide du lemme 2.2 on trouve

$$\alpha(p/q) = \alpha(p)/\alpha(q) \quad \text{et} \quad \beta(p/q) = (\beta(p) - \beta(q))/\alpha(q) \quad (6.25)$$

De (6.22), de (6.24) et de (6.25) il résulte que

$$\alpha(j) > 1 \quad \text{pour tout } j < 1 \quad (6.26)$$

et

$$\beta(j)/(1 - \alpha(j)) = \text{const.} \quad \text{pour tout } j. \quad (6.27)$$

Si on pose

$$\bar{H}_a(x) = H_a(x + \beta(j)/(1 - \alpha(j))) \quad \text{et} \quad \bar{G}_1(x) = \sum_{a=1}^d p(E_a) \bar{H}_a(x) \quad (6.28)$$

de (6.27) et (6.24) il s'ensuit que

$$\bar{G}_1(0) = 1 \quad \text{et} \quad 0 < \bar{G}_1(x) < 1 \quad \text{pour tout } x \in (-\infty, 0). \quad (6.29)$$

En outre, des relations (6.21) et (6.28) on déduit que les fonctions  $\bar{H}_a(x)$  doivent satisfaire à l'équation fonctionnelle suivante:

$$\sum_{a=1}^d p(E_a) (\bar{H}_a^{j^r}(\alpha(j)x) - \bar{H}_a^r(x)) = 0 \quad (6.30)$$

pour tout nombre rationnel  $j > 0$  et tout entier  $r \geq 1$ . On démontre à présent que la fonction  $\bar{G}_1(x)$  est continue dans l'intervalle  $(-\infty, 0)$ . Supposons le contraire: il existe alors un point  $y \in (-\infty, 0)$  tel que  $0 < \bar{G}_1(y) < 1$  et  $\bar{G}_1(y) - \bar{G}_1(y-0) > 0$ ; d'autre part on peut trouver un  $j^* > 1$  de façon que

$$\sum_{a=1}^d p(E_a) \bar{H}_a^{j^*}(y) > \bar{G}_1(y-0) \quad (6.31)$$

mais d'après (6.22) on a  $\bar{G}_1(y/\alpha(j^*)) \leq \bar{G}_1(y-0)$ , de (6.30) il s'ensuit que

$$\bar{G}_1(y/\alpha(j^*)) = \sum_{a=1}^d p(E_a) \bar{H}_a^{j^*}(y) \leq \bar{G}_1(y-0),$$

cette relation étant en contradiction avec (6.31), la fonction  $\bar{G}_1(x)$  est bien continue dans  $(-\infty, 0)$ .

A l'aide des relations (6.22)–(6.27) et en raison de l'équation (6.30), on démontre

facilement que la fonction  $\alpha(j)$  peut être étendue univoquement à une fonction définie en tout point  $x \in (-\infty, 0)$ , continue et décroissante dans cet intervalle, telle que  $\alpha(x) \downarrow 0$  pour  $x \uparrow \infty$  et  $\alpha(x) \uparrow \infty$  pour  $x \downarrow 0$ .

Soit un point fixé  $z \in (-\infty, 0)$ . Supposons que pour les indices  $a_1, a_2, \dots, a_{d^*}$ , où  $d^* \leq d$ , l'on ait  $\bar{H}_{a_i}(z) = \text{Max}_{1 \leq a \leq d} \bar{H}_a(x)$  pour tout  $i = 1, 2, \dots, d^*$ , alors la relation (6.30) et les considérations faites sur la fonction  $\alpha(j)$  impliquent que, pour tout point  $x \in (-\infty, 0)$ , le nombre d'indices  $a_i$ , tels que  $\text{Max}_{1 \leq a \leq d} \bar{H}_a(x) = \bar{H}_{a_i}(x)$  ne dépend pas de  $x$  et est égal à  $d^*$ . De la continuité de  $\bar{G}_1(x)$  on déduit que ces indices sont les mêmes pour tout  $x$ ; en vertu de (6.30) il s'ensuit que

$$\bar{H}_{a_i}(x) = \bar{H}_{a_i}^j(\alpha(j)x) \quad \text{pour tout } i = 1, 2, \dots, d^*. \quad (6.32)$$

Etant donné que de (6.30) et de (6.32) on a

$$\sum_{i=d^*+1}^d p(E_{a_i}) (\bar{H}_{a_i}^{j'}(\alpha(j)x) - \bar{H}_{a_i}^{j'}(x)) = 0,$$

il nous est permis de conclure que

$$\bar{H}_a(x) = \bar{H}_a^j(\alpha(j)x) \quad (6.33)$$

pour tout indice  $a = 1, 2, \dots, d$  et tout nombre rationnel  $j > 0$ .

Il est connu (B. V. GNEDENKO [8]), que les seules f. de r.  $\bar{H}(x)$  satisfaisant aux relations (6.33) et (6.29) sont celles de la forme  $\Phi_2^s(x)$  et  $\epsilon(x)$ ,  $s > 0$  étant une constante.

Comme  $\bar{G}_1(x)$  est une f. de r. propre, il en résulte que

$$\bar{G}_1(x) = \sum_{i=1}^{d'} p(E_{a_i}) (\Phi_2(x))^{s_{a_i}} + \sum_{i=d'+1}^d p(E_{a_i}) \epsilon(x), \quad \text{où } d' \geq 1 \quad (6.34)$$

On remarquera que la constante  $\alpha$  intervenant dans  $\Phi_2(x)$ , voir paragraphe 2, est indépendante de l'indice  $a_i$ .

2) Il existe un nombre rationnel  $j > 1$  tel que  $\alpha(j) > 1$ . De même que dans le premier cas on démontre alors que:

- Le quotient  $\beta(j)/(1-\alpha(j))$  ne dépend pas de  $j > 0$ .
- La fonction  $G_1(x)$  est continue et telle que  $0 < G_1(x) < 1$ , pour tout  $x \in (\beta(j)/(1-\alpha(j)), \infty)$  et  $G_1(\beta(j)/(1-\alpha(j)) - 0) = 0$ .
- La fonction  $\alpha(j)$  peut être étendue univoquement à une fonction  $\alpha(x)$ , définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , continue, croissante et telle que  $\alpha(x) \downarrow 0$  pour  $x \downarrow 0$  et  $\alpha(x) \uparrow \infty$  pour  $x \uparrow \infty$ .

Si on pose  $\bar{H}_a(x) = H_a(x + \beta(j)/(1-\alpha(j)))$  pour tout  $a = 1, 2, \dots, d$  et  $\bar{G}_1(x) = \sum_{a=1}^d p(E_a) \bar{H}_a(x)$ , alors, comme dans le premier cas, on démontre que la relation  $\bar{H}_a(x) = \bar{H}_a^j(\alpha(j)x)$  doit être vérifiée pour tout nombre rationnel  $j > 0$  et tout indice  $a = 1, 2, \dots, d$ .

La fonction  $\bar{G}_1(x)$  étant propre, dans ce cas on peut conclure que

$$\bar{G}_1(x) = \sum_{i=1}^{d'} p(E_{a_i}) (\Phi_1(x))^{s_{a_i}} + \sum_{i=d'+1}^d p(E_{a_i}) \in(x), \quad \text{où } d' \geq 1. \quad (6.35)$$

3) Il existe un nombre rationnel  $j > 1$  tel que  $\alpha(j) = 1$ . En raison des considérations faites dans les deux premiers cas alors on déduit immédiatement que  $\alpha(j) = 1$  pour tout  $j > 0$ . La f. de r.  $\bar{G}_1(x)$  étant d'un type propre, à l'aide d'argumentations analogues à celles qui viennent d'être employées, on obtient que

$$\bar{G}_1(x) = \sum_{a=1}^d p(E_a) (\Phi_3(x))^{s_a}. \quad (6.36)$$

Les probabilités  $p(E_a)$  étant arbitraires, pourvu que  $\sum_{a=1}^d p(E_a) = 1$  et  $p(E_a) > 0$ , il nous reste à démontrer que les f. de r. définies par les relations (6.11)–(6.13) peuvent effectivement intervenir comme limite  $\xrightarrow{W}$  de  $P[Z_n < a_n x + b_n]$ , quand  $P[Z_{nr} < a_n x + b_n] \xrightarrow{W} G_r(x)$ .

Soient des ensembles  $E_a \in \beta(R)$  telles que

a) Chaque  $E_a$  est dense dans  $R$ ,  $a = 1, 2, \dots, d$

b)  $E_a \cap E_b = 0$  si  $a \neq b$  et  $\sum_{a=1}^d E_a = R$ .

Nous considérons un processus de Markov défini de la façon suivante:

$$p(x, [y_1, y_2)) = (\Phi_2(y_2, \alpha))^{s_a} - (\Phi_2(y_1, \alpha))^{s_a}, \quad \forall x \in E_a, \quad a = 1, 2, \dots, d'.$$

$$p(x, [y_1, y_2)) = \Phi_2(y_2, \alpha - \delta) - \Phi_2(y_1, \alpha - \delta), \quad \forall x \in E_a, \quad a = d' + 1, \dots, d.$$

quel que soit l'intervalle  $[y_1, y_2)$ , où  $s_a > 0$ ,  $a = 1, 2, \dots, d'$ , sont des constantes et où  $\alpha$  et  $\alpha - \delta$ ,  $0 < \delta < \alpha$ , indiquent les exposants intervenant dans  $\Phi_2(x)$ .

$$p([y_1, y_2) \cap E_a) = \begin{cases} c_a (\Phi_2(y_2, \alpha))^{s_a} - c_a (\Phi_2(y_1, \alpha))^{s_a} & \forall a = 1, 2, \dots, d' \\ c_a \Phi_2(y_2, \alpha - \delta) - c_a \Phi_2(y_1, \alpha - \delta) & \forall a = d' + 1, \dots, d \end{cases}$$

où les  $c_a$  sont des constantes positives telles que  $\sum_{a=1}^d c_a = 1$ . Le processus qui vient d'être défini est strictement stationnaire et satisfait à la condition de Doeblin. Si on pose  $a_n = 1/n^{1/\alpha}$  et  $b_n = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$  alors on a

$$P[Z_{nr} < a_n x + b_n] \xrightarrow{W} \sum_{a=1}^{d'} c_a (\Phi_2(x))^{s_{ar}} + \sum_{a=d'+1}^d c_a \in(x), \quad \forall r = 1, 2, \dots$$

De la même façon on peut construire des processus, dont  $P[Z_{nr} < a_n x + b_n]$  converge vers les f. de r. limites considérées dans les deux autres cas. La classe de types limites possibles est donc bien celle définie par les f. de r. (6.11)–(6.13). Le théorème est ainsi complètement démontré.

COROLLAIRE. Soit  $X_i, i=1, 2, \dots$  un processus de Markov strictement stationnaire et satisfaisant à la condition de Doeblin. Supposons que pour tout  $r=1, 2, \dots$  l'on ait  $P[Z_{nr} < a_n x + b_n] \xrightarrow{W} G_r(x)$ , où  $G_r(x)$  est une f. de r. d'un type propre, alors les relations suivantes sont vérifiées:

$$P_{a_i}[Z_n < a_n x + b_n] \rightarrow (\Phi_k(\gamma x + \nu))^{s_{a_i}} \quad \forall i = 1, 2, \dots, d' \quad (6.37)$$

$$P_{a_i}[Z_n < a_n x + b_n] \xrightarrow{W} \in(\gamma x + \nu), \quad \forall i = d' + 1, \dots, d \quad (6.37')$$

où  $\nu, \gamma > 0$  et  $s_{a_i} > 0$  sont des constantes,  $1 \leq d' \leq d$  pour  $k=1, 2$  et  $d'=0$  pour  $k=3$ , ( $\{a_i\}$  indique une permutation des nombres entiers  $1, 2, \dots, d$ ).

On considère d'abord le lemme suivant:

LEMME 6.3. Soit  $\{c_n\}$  une suite de nombres réels. Si pour toute sous-suite convergente  $\{c_n\}$ ,  $\{c_{n_j+1}\}$  converge vers la même limite, alors tous les points compris entre deux points d'accumulation de  $c_n, n=1, 2, \dots$  sont aussi des points d'accumulations de la suite considérée.

La démonstration de ce lemme est élémentaire.

Démonstration du corollaire. D'après le lemme 6.2 on déduit que

$$P[Z_n < a_{n+1} x + b_{n+1}] - P[Z_{n+1} < a_{n+1} x + b_{n+1}] \rightarrow 0. \quad (6.38)$$

En vertu du lemme 2.2 il en résulte que

$$a_{n+1}/a_n \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad (b_{n+1} - b_n)/a_n \rightarrow 0. \quad (6.39)$$

En raison des lemmes 2.3 et 6.2 et de la relation (6.39), pour toute suite d'indices  $n_j \rightarrow \infty$  tels que

$$\begin{aligned} P_{a_n}[Z_{n_j} < a_{n_j} x + b_{n_j}] &\rightarrow (\Phi_k(\gamma x + \nu))^{s_{a_i}}, \quad i = 1, 2, \dots, d', \quad h = 1, 2, \dots, d' \\ P_{a_n}[Z_{n_j} < a_{n_j} x + b_{n_j}] &\xrightarrow{W} \in(\gamma x + \nu), \quad i = d' + 1, \dots, d, \quad h = d' + 1, \dots, d. \end{aligned} \quad (6.40)$$

on a

$$\begin{aligned} P_{a_n}[Z_{n_j+1} < a_{n_j+1} x + b_{n_j+1}] &\rightarrow (\Phi_k(\gamma x + \beta))^{s_{a_i}}, \quad i = 1, 2, \dots, d' \quad h = 1, 2, \dots, d' \\ P_{a_n}[Z_{n_j+1} < a_{n_j+1} x + b_{n_j+1}] &\xrightarrow{W} (\gamma x + \beta), \quad i = 1 + d', \dots, d \quad h = d' + 1, \dots, d. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Le nombre de fonction limites étant plus petit ou égal à  $d$ , de (6.40) et (6.41) une application directe du lemme 6.3 nous permet de conclure que les relations (6.37) et (6.37') doivent être vérifiées.

On démontre encore un théorème analogue à ceux considérés dans les paragraphes précédents.

**THÉORÈME 6.3.** Soit  $X_i, i=1, 2, \dots$  un processus de Markov strictement stationnaire et satisfaisant à la condition de Doeblin. Supposons que  $P_a^n[X_1 < a_n x + b_n] \rightarrow (\Phi_k(x))^{s_a}$  pour tout  $a=1, 2, \dots, d$ , où  $s_a > 0$  indiquent des constantes, alors, pour que

$$P[Z_n < a_n x + b_n] \rightarrow \sum_{a=1}^d p(E_a) (\Phi_k(x))^{s_a}$$

il faut et il suffit qu'il existe une suite de nombres entiers  $m_n \uparrow \infty$  tels que  $m_n/n \rightarrow 0$ ,  $n/m_n^2 \rightarrow 0$  et

$$n P([X_1 \geq a_n x + b_n] \cap [X_2 \geq a_n x + b_n]) + (n/m_n) \sum_{j=0}^{m_n} (m_n - j) \times \\ \times P\left([X_1 \geq a_n x + b_n] \cap \bigcap_{k=2}^{2+j} [X_k < a_n x + b_n] \cap [X_{j+3} \geq a_n x + b_n]\right) \rightarrow 0 \quad (6.42)$$

pour tout  $x$  tel que  $\Phi_k(x) > 0$ .

*Démonstration.* On considère une suite  $m_n \uparrow \infty$  telle que  $m_n/n \rightarrow 0$  et  $n/m_n^2 \rightarrow 0$ . En raison des lemmes 6.1 et 2.4 et à l'aide d'une relation semblable à (6.6) on obtient

$$P_a[Z_n < a_n x + b_n] - (P_a[Z_{m_n} < a_n x + b_n])^{n/m_n} \rightarrow 0 \quad \forall a = 1, 2, \dots, d.$$

Pour que

$$P[Z_n < a_n x + b_n] \rightarrow \sum_{a=1}^d p(E_a) (\Phi_k(x))^{s_a}$$

il est donc nécessaire et suffisant que

$$\sum_{a=1}^d p(E_a) P_a^n[X_1 < a_n x + b_n] - \sum_{a=1}^d p(E_a) (P_a[Z_{m_n} < a_n x + b_n])^{n/m_n} \rightarrow 0 \quad (6.43)$$

mais en raison du lemme 2.4 la relation (6.43) est équivalente à

$$(n/m_n) \sum_{a=1}^d \left( \sum_{i=1}^{m_n} P_a[X_i \geq a_n x + b_n] - P_a\left(\bigcup_{i=1}^{m_n} [X_i \geq a_n x + b_n]\right) \right) \rightarrow 0. \quad (6.44)$$

Le processus considéré étant strictement stationnaire, de (6.44) il s'ensuit que la condition (6.42) est bien nécessaire et suffisante.

**COROLLAIRE.** Si le processus de Markov considéré dans le théorème 6.3 n'a pas de sous-classes cycliques, la condition (6.42) est vérifiée si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P([X_1 \geq x] \cap [X_j \geq x]) / P[X_1 \geq x] = 0 \quad (6.45)$$

pour tout  $j=2, \dots$ , où  $x_0 = \inf\{x: P[X_1 \geq x] = 1\}$ .

*Démonstration.* Si (6.42) est vérifiée, alors de (6.44) on obtient

$$P([X_1 \geq a_n x + b_n] \cap [X_j \geq a_n x + b_n]) / P[X_1 \geq a_n x + b_n] \rightarrow 0 \quad \forall j = 2, \dots$$

et une simple application du lemme 2.4 nous permet de conclure que la relation (6.45) doit être aussi vérifiée.

Inversement si la condition (6.45) est satisfaite, alors il existe une suite de nombres entiers  $q_n \uparrow \infty$  telle que

$$n \sum_{j=1}^{q_n} P([X_1 \geq a_n x + b_n] \cap [X_j \geq a_n x + b_n]) \rightarrow 0. \quad (6.46)$$

Si l'on observe (voir [6], p. 208) que l'expression intervenant dans (6.42) est majorisée par

$$n \sum_{j=1}^{q_n} P([X_1 \geq a_n x + b_n] \cap [X_j \geq a_n x + b_n]) + (n/m_n) \sum_{j=q_n}^{m_n} (m_n - j) (A/n^2 + B \varrho^j/n)$$

où  $A, B, 0 \leq \varrho < 1$  sont des constantes; de (6.46) on obtient immédiatement que la relation (6.42) doit être vérifiée.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BERMAN, S. M., *Limiting distribution of the maximum term in sequences of dependent random variables*, Ann. Math. Statist. 33 (1962), 894–908.
- [2] BERMAN, S. M., *Limit theorems for the maximum term in stationary sequences*, Ann. Math. Statist. 35 (1964), 502–516.
- [3] BERMAN, S. M., *Limiting distribution of the maximum of a diffusion process*, Ann. Math. Statist. 35 (1964), 319–329.
- [4] BLUM, J. R., HANSON, D. L. and KOOPMANS, L. H., *On the strong law of the large numbers for a class of stochastic processes*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete 2 (1963), 1–11.
- [5] COGBURN, R., *Asymptotic properties of stationary sequences*, Univ. of Calif. Publications in Statistics, 3 (1960), No. 3, 99–146.
- [6] DOOB, J. L., *Stochastic Processes* (John Wiley and Sons, Inc., New York 1953).
- [7] GEFFROY, J., *Contribution à la théorie des valeurs extrêmes*, Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 7 (1958), 37–121; 8, 123–184.
- [8] GNEDENKO, B. V., *Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire*, Ann. Math. 44 (1943), 423–453.
- [9] LOYNES, R. M., *Extreme values in uniformly mixing stationary stochastic processes*, Ann. Math. Statist. 36 (1965), 993–999.
- [10] NEWELL, G. F., *Asymptotic extreme value distribution for one-dimensional diffusion processes*, J. Math. Mech. 11 (1964), 481–496.
- [11] NEWELL, G. F., *Asymptotic extremes for  $m$ -dependent random variables*, Ann. Math. Statist. 35 (1964), 1322–1325.
- [12] ROSENBLATT, M., *A central limit theorem and a strong mixing condition*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 42 (1956), 43–47.
- [13] WATSON, G. S., *Extreme values in samples from  $m$ -dependent stationary stochastic processes*, Ann. Math. Statist. 25 (1954), 798–800.

Reçu le 31 mars 1967