

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 43 (1968)

**Artikel:** Über Potentiale, welche auf vorgegebenen Mengen verschwinden.  
**Autor:** Huber, Alfred  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-32906>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 29.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Über Potentiale, welche auf vorgegebenen Mengen verschwinden

von ALFRED HUBER, Zürich

*Meinem verehrten Lehrer und Kollegen Albert Pfluger  
zum sechzigsten Geburtstag gewidmet*

## 1. Einleitung

Sei  $K$  eine kompakte zusammenhängende Menge im reellen euklidischen Raum  $E^n$  ( $n \geq 2$ ). Sei  $\mu$  ein Radonsches Maß, dessen Träger in  $K$  enthalten ist, und sei  $U^\mu$  das Newtonsche (im Falle  $n=2$  das logarithmische) Potential von  $\mu$ . Für alle  $x \in CK$  (=Komplementärmenge von  $K$ ) ist also

$$U^\mu(x) = \int_K h(|x - y|) d\mu(y), \quad (1)$$

wobei  $h(r) = r^{2-n}$  für  $n \geq 3$ ,  $h(r) = -\log r$  für  $n=2$ . Hier bezeichnet  $|x|$  die euklidische Norm des Vektors  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ :

$$|x| = \left( \sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

*Welche kompakten zusammenhängenden Mengen  $K$  besitzen die Eigenschaft, dass auf ihnen ein Maß  $\mu \neq 0$  existiert, dessen Potential  $U^\mu$  auf  $CK$  identisch verschwindet?*

Diese Frage ist eng verknüpft mit dem Problem der gleichmässigen Approximation stetiger Funktionen durch harmonische, welches in Arbeiten von KELDYCH und LAVRENTIEFF [8], BRELOT [2, 3] und DENY [6, 7] behandelt worden ist. Die Ergebnisse der beiden letztgenannten Autoren implizieren folgende Antwort: Auf einer zusammenhängenden kompakten Menge  $K$  existiert genau dann ein Maß  $\mu \neq 0$  mit auf  $CK$  identisch verschwindendem Potential  $U^\mu$ , wenn die Menge  $CK$  in mindestens einem Punkte von  $K$  effilert<sup>1)</sup> ist.

In der vorliegenden Note wird auf anderm Wege eine andere Charakterisierung (Satz 1) hergeleitet und auf einen speziellen Mengentyp angewendet (Satz 2).

## 2. Kriterium

**SATZ 1.** *Auf einer zusammenhängenden kompakten Menge  $K$  in  $E^n$  existiert genau dann ein Maß  $\mu \neq 0$  mit der Eigenschaft, dass  $U^\mu(x) = 0$  für alle  $x \in CK$ , wenn die*

---

<sup>1)</sup> Nach der Definition von BRELOT (siehe z.B. [4, p. 82]).

*Bedingung*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left[ \max_{y \in \Omega_j} \int_{\Omega_j} g_j(x, y) dx \right] > 0 \quad (2)$$

erfüllt ist. Dabei bezeichnet  $\{\Omega_j\}$  eine monoton abnehmend gegen  $K$  konvergierende Folge von Dirichletgebieten und  $g_j$  die Greensche Funktion von  $\Omega_j$  ( $j=1, 2, 3, \dots$ ).

*Bemerkung.* Der Grenzwert in (2) existiert stets und ist nicht negativ, denn  $\{s_j\}$ , wobei

$$s_j = \max_{y \in \Omega_j} \int_{\Omega_j} g_j(x, y) dx \quad (3)$$

( $j=1, 2, 3, \dots$ ), ist eine monoton abnehmende Folge positiver Zahlen. Ausserdem ist dieser Limes unabhängig von der Wahl der Gebietsfolge  $\{\Omega_j\}$ .

LEMMA 1. Sei  $\mu$  ein reelles Maß auf  $K$  mit der Eigenschaft, dass  $U^\mu(x) = 0$  für alle  $x \in C K$ . Dann gelten die Ungleichungen

$$\int_K |U^\mu(x)| dx \leq s_j \|\mu\| \quad (4)$$

( $j=1, 2, 3, \dots$ ). Dabei bezeichnet  $\|\mu\|$  die totale Variation des Maßes  $\mu$ .

*Beweis von Lemma 1.* Sei  $\mu = \mu^+ - \mu^-$  die Jordansche Zerlegung des Maßes  $\mu$ , und sei

$$M = \{x \mid U^{\mu^+}(x) = U^{\mu^-}(x) = \infty\}.$$

Für alle  $x \in \Omega'_j = \Omega_j - M$  gilt

$$U^\mu(x) = \int_K g_j(x, y) d\mu(y) \quad (5)$$

( $j=1, 2, 3, \dots$ ). Denn die Funktion

$$x \rightarrow U^\mu(x) - \int_K g_j(x, y) d\mu(y)$$

ist – nach geeigneter Fortsetzung in die Menge  $M$  – harmonisch im Gebiete  $\Omega_j$  und nimmt die Randwerte 0 an, verschwindet also identisch. Aus (5) folgt

$$- \int_K g_j(x, y) d\mu^-(y) \leq U^\mu(x) \leq \int_K g_j(x, y) d\mu^+(y)$$

für alle  $x \in \Omega'_j$ . Da  $M$  das Lebesguesche Maß 0 besitzt, schliessen wir

$$\begin{aligned} \int_K |U^\mu(x)| dx &= \int_{\Omega_j} |U^\mu(x)| dx \\ &\leq \int_{\Omega_j} \left[ \int_K g_j(x, y) d\mu^+(y) + \int_K g_j(x, y) d\mu^-(y) \right] dx = \\ &= \int_K \left[ \int_{\Omega_j} g_j(x, y) dx \right] d\mu^+(y) + \\ &\quad + \int_K \left[ \int_{\Omega_j} g_j(x, y) dx \right] d\mu^-(y) \leq s_j \|\mu\|. \end{aligned}$$

Q.E.D.

*Beweis von Satz 1.* Wir dürfen uns auf reelle Maße beschränken.

I. Sei  $\lim_{j \rightarrow \infty} s_j = 0$ . Aus Lemma 1 schliessen wir, dass  $U^\mu = 0$  fast überall in  $E^n$  (d.h. bis auf eine Ausnahmemenge vom Lebesgueschen Mass 0). Daraus folgt  $\mu = 0$ .

II. Sei  $\lim_{j \rightarrow \infty} s_j = s > 0$ . Wir wählen zunächst  $y_j \in \Omega_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ) derart, dass

$$\int_{\Omega_j} g_j(x, y_j) dx = s_j. \tag{6}$$

Ferner sei  $\lambda$  eine Zahl mit der Eigenschaft, dass  $0 < \lambda < d$  und

$$\omega_n \int_0^\lambda (h(r) - h(d)) r^{n-1} dr < \frac{s}{3}, \tag{7}$$

wobei  $d$  den Durchmesser der Menge  $K$  und  $\omega_n$  die Oberfläche der  $(n-1)$ -dimensionalen Einheitssphäre bezeichnet.

Nun betrachten wir das Maß  $\mu_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ), dessen Potential durch

$$U^{\mu_j}(x) = \begin{cases} \min(g_j(x, y_j), h(\lambda) - h(d)) & \text{für } x \in \Omega_j, \\ 0 & \text{für } x \in C\Omega_j, \end{cases}$$

definiert wird. Sei  $\mu_j = \mu_j^+ - \mu_j^-$  seine Jordansche Zerlegung. Das Maß  $\mu_j^+$  besitzt als Träger die Niveauläche  $\{x | g_j(x, y_j) = h(\lambda) - h(d)\}$ , und  $\mu_j^-$  liegt auf dem Rande von  $\Omega_j$ . Es gilt  $\|\mu_j^+\| = \|\mu_j^-\| = 1$ , also  $\|\mu_j\| = 2$  für alle  $j$ .

Für die Greensche Funktion  $g_j$  gilt die Abschätzung

$$g_j(x, y) < h(|x - y|) - h(d), \tag{8}$$

denn  $\Omega_j \subset \{x | |x - y| < d\}$  für alle  $y \in \Omega_j$ .

Unter Anwendung von (6), (7) und (8) folgt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_j} U^{\mu_j}(x) dx &> \int_{\Omega_j} g_j(x, y_j) dx - \int_{\Delta_j} g_j(x, y_j) dx \geq \\ &\geq s_j - \int_{\Omega_j \cap \{x \mid |x - y_j| < \lambda\}} (h(|x - y_j|) - h(d)) dx \geq \\ &\geq s_j - \int_0^\lambda (h(r) - h(d)) \omega_n r^{n-1} dr \geq s_j - \frac{s}{3}, \end{aligned}$$

wobei  $\Delta_j = \{x \in \Omega_j \mid g_j(x, y_j) \geq h(\lambda) - h(d)\}$ . Für genügend grosse Werte von  $j$  gilt also

$$\int_{\Omega_j} U^{\mu_j}(x) dx > \frac{s}{3}. \quad (9)$$

Die Folge  $\{\mu_j\}$  ( $j=1, 2, 3, \dots$ ) enthält eine Teilfolge  $\{\mu_{j_k}\}$ , welche schwach gegen ein Maß  $\mu$  auf  $K$  konvergiert. Wir dürfen annehmen, dass fast überall in  $E^n$  die Limesbeziehung

$$\lim_{k \rightarrow \infty} U^{\mu_{j_k}}(x) = U^\mu(x) \quad (10)$$

erfüllt ist. Denn ein Satz von DENY [5] sagt aus, dass man dies jedenfalls durch nochmaligen Uebergang auf eine Teilfolge erreichen kann. Damit folgt:

(a) Für fast alle  $x \in CK$  gilt  $U^\mu(x) = 0$ . Da aber  $U^\mu$  auf  $CK$  stetig ist, folgt  $U^\mu(x) = 0$  für alle  $x \in CK$ .

(b) Unter Anwendung des Lebesgueschen Grenzwertsatzes schliessen wir aus (9) und (10), dass

$$\int_{E^n} U^\mu(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E^n} U^{\mu_{j_k}}(x) dx \geq \frac{s}{3} > 0.$$

Also ist  $\mu \neq 0$ . Damit ist Satz 1 bewiesen.

### 3. Eine Anwendung

**SATZ 2.** Sei  $\{D_k\}$  ( $k=1, 2, 3, \dots$ ) eine Folge von offenen Kreisscheiben mit folgenden Eigenschaften: (a)  $D_k \cap D_j = \emptyset$  für  $k \neq j$ ; (b)  $D_k \subset E = \{z \mid |z| \leq 1\}$  für alle  $k$ . Es bezeichne  $r_k$  den Radius von  $D_k$ . Ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \log r_k \right|^{-1} < \infty, \quad (11)$$

so gibt es auf der Menge  $K = E - \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$  ein Maß  $\mu \neq 0$ , dessen Potential  $U^\mu$  auf  $CK$  identisch verschwindet.

ZUSATZ. Wird die Bedingung (11) abgeschwächt in

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_k < \infty, \quad (12)$$

so braucht ein solches Maß nicht mehr zu existieren.

*Bemerkung.* Erfüllt  $K$  die Bedingung (12), so gibt es eine *Distribution erster Ordnung* (Dipolbelegung)  $T \neq 0$  mit in  $K$  enthaltenem Träger und der Eigenschaft, dass  $U^T \equiv 0$  auf  $CK$ . (Man bringe etwa auf den Rändern der Kreisscheiben  $E, D_1, D_2, \dots$  lineare Dipolbelegungen konstanter Dichte an, deren Momente auf dem Rande von  $E$  radial nach aussen, auf den übrigen Kreisen radial nach innen orientiert sind). Von dieser Tatsache ausgehend wird man auf folgende – durch den Zusatz zu Satz 2 in negativem Sinne beantwortete – Frage geführt: Impliziert (12) auch die Existenz eines *Maßes*  $\mu \neq 0$  auf  $K$  mit der Eigenschaft, dass  $U^\mu \equiv 0$  auf  $CK$ ?<sup>2)</sup>

*Beweis von Satz 2.* Die Bedingung (11) impliziert (12). Aus (12) folgt nach einem Hinweis von MERGELYAN [9, p. 21], dass die Menge  $K$  positives Lebesguesches Maß besitzt. Also ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_k^2 < 1.$$

Es bezeichne

$$\eta = \frac{1}{4} \left( 1 - \sum_{k=1}^{\infty} r_k^2 \right).$$

Sei  $N$  eine natürliche Zahl mit der Eigenschaft, dass

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} r_k < \eta. \quad (13)$$

Wir definieren

$$u_0(z) = \begin{cases} \min \left( \frac{2}{|\log(1-\eta)|} \log \frac{1}{|z|}, 1 \right) & \text{für } |z| \leq 1, \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$u_k(z) = \max \left( \frac{2}{\log(1+\eta)} \log \frac{|z-a_k|}{r_k}, 0 \right)$$

für  $k=1, 2, \dots, N$ ;

$$u_k(z) = \max \left( \frac{2}{|\log r_k|} \log \frac{|z-a_k|}{r_k}, 0 \right)$$

für  $k=N+1, N+2, \dots$

Die Funktionen  $v_j = \min(u_0, u_1, \dots, u_j)$  ( $j=1, 2, 3, \dots$ ) sind positiv und super-

---

<sup>2)</sup> Herr J. WERMER hat mich in einem Gespräch auf diese Frage aufmerksam gemacht.

harmonisch im Gebiet

$$G_j = \{z \mid |z| < 1, |z - a_k| > r_k (k = 1, 2, \dots, j)\}$$

und verschwinden identisch auf dessen Komplement. Es gilt  $v_j = U^{\alpha_j}$ , wobei der positive Teil  $\alpha_j^+$  des Maßes  $\alpha_j$  in  $G_j$  liegt und dessen negativer Teil  $\alpha_j^-$  den rand  $\Gamma_j$  von  $G_j$  zum Träger hat. Durch Integration der Normalableitung längs  $\Gamma_j$  findet man für  $j = N+1, N+2, \dots$

$$\|\alpha_j^-\| = 2|\log(1 - \eta)|^{-1} + 2N(\log(1 + \eta))^{-1} + 2 \sum_{k=N+1}^j |\log r_k|^{-1}.$$

Da  $\|\alpha_j^+\| = \|\alpha_j^-\|$ , folgt für  $j = N+1, N+2, \dots$

$$\|\alpha_j\| < 4|\log(1 - \eta)|^{-1} + 4N(\log(1 + \eta))^{-1} + 4 \sum_{k=N+1}^{\infty} |\log r_k|^{-1} = A < \infty. \quad (14)$$

Im folgenden bezeichne  $mF$  das Lebesguesche Maß der (messbaren) Menge  $F$ . Es gelten die Ungleichungen

$$m\{z \mid u_0(z) = 1\} = \pi(1 - \eta), \quad (15)$$

$$m\{z \mid u_k(z) < 1\} = \pi r_k^2(1 + \eta) \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (16)$$

$$m\{z \mid u_k(z) < 1\} = \pi r_k \quad (k = N+1, N+2, \dots). \quad (17)$$

Aus (16) und (17) folgen mit Benützung von (13) und der Definition von  $\eta$

$$\sum_{k=1}^N m\{z \mid u_k(z) < 1\} = \pi(1 + \eta) \sum_{k=1}^N r_k^2 < \pi(1 - 3\eta) \quad (18)$$

und

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} m\{z \mid u_k(z) < 1\} = \pi \sum_{k=N+1}^{\infty} r_k < \pi\eta. \quad (19)$$

Unter Anwendung von (15), (18) und (19) schliessen wir, dass für alle  $j$

$$m\{z \mid U^{\alpha_j}(z) = 1\} \geq m\{z \mid u_0(z) = 1\} - \sum_{k=1}^{\infty} m\{z \mid u_k(z) < 1\} > \pi\eta.$$

Da  $U^{\alpha_j} \geq 0$ , folgt

$$\iint_{G_j} U^{\alpha_j}(z) dx dy > \pi\eta \quad (z = x + iy). \quad (20)$$

Sei nun  $\{\Omega_j\}$  eine monoton abnehmend gegen  $K$  konvergierende Folge von Dirichletgebieten; dabei enthalte  $\Omega_j$  die abgeschlossene Hülle des Gebietes  $G_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ). Aus (14) und (20) schliessen wir unter Verwendung von Lemma 1, dass

$$s_j > \frac{\pi\eta}{A} > 0 \quad (21)$$

für  $j = N+1, N+2, \dots$ . Nun folgt Satz 2 durch Anwendung von Satz 1.

*Bemerkung.* Die Anwendung des Kriteriums kann durch ein Zurückgreifen auf dessen Beweisidee ersetzt werden. Beim vorliegenden Beispiel wird dies durch ein Resultat von ARSOVE (Theorem 23, p. 345 in [1]) besonders erleichtert: Da die Funktionenfolge  $\{U^{\alpha_j}\}$  im Mittel konvergiert und die Folge  $\{\|\alpha_j\|\}$  beschränkt bleibt, konvergiert  $\{\alpha_j\}$  schwach gegen ein Maß  $\mu$ , dessen Potential  $U^\mu$  der Limes in medio von  $\{U^{\alpha_j}\}$  ist.<sup>3)</sup> Offenbar ist  $\mu \neq 0$ ,  $U^\mu \equiv 0$  in  $CK$  und der Träger von  $\mu$  in  $K$  enthalten.

*Beweis des Zusatzes.* Wir stützen uns auf Satz 1 und zwei noch zu beweisende Hilfssätze.<sup>4)</sup>

LEMMA 2. Zu beliebig vorgegebenen positiven Zahlen  $M, d, k$  und  $\varepsilon$  gibt es eine Zahl  $\varrho(M, d, k, \varepsilon) > 0$  mit folgender Eigenschaft:

Sei  $\Omega$  ein Teilgebiet von  $\{z \mid |z-a| > r\}$ , dessen Rand  $\Gamma$  den Kreis  $\{z \mid |z-a|=r\}$  enthält. Sei  $h$  eine in  $\Omega$  definierte und harmonische Funktion, welche (a) die Ungleichung  $0 \leq h \leq M$  erfüllt, (b) in allen Punkten der Menge  $\Gamma \cap \{z \mid |z-a| < d\}$  den Randwert 0 annimmt.

Gilt dann  $r < \varrho(M, d, k, \varepsilon)$ , so ist  $h < \varepsilon$  in  $\Omega \cap \{z \mid r < |z-a| < (1+k)r\}$ .

*Beweis von Lemma 2.* Aus dem Maximumprinzip für harmonische Funktionen folgt, dass die Funktion  $h$  in  $\Omega \cap \{z \mid r < |z-a| < d\}$  die Ungleichung

$$h(z) \leq \frac{M}{\log d - \log r} \log \frac{|z-a|}{r}$$

erfüllt. Für genügend kleine  $r$  gilt in  $\Omega \cap \{z \mid r < |z-a| < (1+k)r\}$  die Abschätzung

$$h \leq \frac{M \log(1+k)}{\log d - \log r}.$$

Diese Schranke konvergiert gegen 0, wenn – bei festgehaltenen  $M, k$  und  $d-r$  gegen 0 strebt. Daraus ergibt sich die Existenz der Zahl  $\varrho(M, d, k, \varepsilon)$ .

Q.E.D.

LEMMA 3. Sei  $\Omega_p$  ein von  $C_0 = \{z \mid |z|=1\}$  und den (miteinander fremden und im Innern von  $C_0$  liegenden) Kreisen  $C_j = \{z \mid |z-a_j|=r_j\}$  ( $j=1, 2, \dots, p$ ) berandetes Gebiet. Seien  $\varepsilon$  und  $\delta$  vorgegebene positive Zahlen. Dann existieren endlich viele (miteinander und mit den gegebenen fremde) Kreise  $C_j = \{z \mid |z-a_j|=r_j\}$  ( $j=p+1, p+2, \dots, q$ ) derart, dass

$$\sum_{j=p+1}^q r_j < \delta \tag{22}$$

und

$$\iint_{\Omega_q} g_q(z, \zeta) dx dy < \varepsilon \tag{23}$$

<sup>3)</sup> Den Hinweis auf diese Konvergenzeigenschaft verdanke ich Herrn ARSOVE.

<sup>4)</sup> Ein wesentlicher Teil der nun folgenden Konstruktion ist aus einer anregenden Diskussion mit meinem Kollegen HERSCH hervorgegangen.

für alle  $\zeta \in \Omega_q = \{z \mid |z| < 1, |z - a_j| > r_j (j=1, \dots, q)\}$ . Dabei bezeichnet  $g_q$  die Greensche Funktion von  $\Omega_q$ .

*Bemerkung.* Mit diesem Lemma wird auch der Zusatz zu Satz 2 bewiesen sein. Denn es gestattet offenbar die Konstruktion einer Menge  $K$ , welche die Bedingung (12) erfüllt, welche aber – vermöge Satz 1 – kein Maß  $\mu \neq 0$  trägt, dessen Potential  $U^\mu$  auf  $CK$  identisch verschwindet.

*Beweis von Lemma 3.* Seien  $\beta, \gamma$  und  $\lambda (0 < \lambda < \frac{1}{3})$  positive Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

$$(A) \quad 2\pi \int_0^{3\sqrt{2}\lambda} \left(\log \frac{2}{r}\right) r \, dr < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(B) Keiner der Punkte  $(\beta + m\lambda) + i(\gamma + n\lambda)$ ,  $m$  und  $n$  ganz, liegt auf einem Kreis  $C_j (j=0, 1, \dots, p)$ .

(C) Keine der Geraden  $x = \beta + m\lambda$  und  $y = \gamma + n\lambda$ ,  $m$  und  $n$  ganz, tangiert einen dieser Kreise.

Das Geradennetz

$$N = \{z \mid \operatorname{Re} z = \beta + m\lambda, m \text{ ganz}\} \cup \{z \mid \operatorname{Im} z = \gamma + n\lambda, n \text{ ganz}\}$$

zerteilt  $\Omega_p$  in endlich viele Gebiete  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_l$ . Jedem derartigen Gebiet

$$\omega_j = \Omega_p \cap \{z \mid \beta + m\lambda < \operatorname{Re} z < \beta + (m+1)\lambda, \gamma + n\lambda < \operatorname{Im} z < \gamma + (n+1)\lambda\}$$

ordnen wir zu die „Umgebungen“

$$U_j = \Omega_p \cap \{z \mid \beta + (m-1)\lambda < \operatorname{Re} z < \beta + (m+2)\lambda, \\ \gamma + (n-1)\lambda < \operatorname{Im} z < \gamma + (n+2)\lambda\}$$

und

$$V_j = \Omega_p \cap \{z \mid \beta + (m-2)\lambda < \operatorname{Re} z < \beta + (m+3)\lambda, \\ \gamma + (n-2)\lambda < \operatorname{Im} z < \gamma + (n+3)\lambda\}$$

Seien  $a_{p+1}, a_{p+2}, \dots, a_{p+s}$  die in  $\Omega_p$  liegenden Gitterpunkte des Netzes  $N$ . Wir führen Kreise  $C_j = \{z \mid |z - a_j| = r_j\} (j=p+1, p+2, \dots, p+s)$  ein; diese sollen weder einander noch die bereits vorhandenen Kreise schneiden, und es soll gelten

$$\sum_{j=p+1}^{p+s} r_j < \frac{\delta}{2}. \quad (24)$$

Der Durchschnitt des Netzes  $N$  mit dem Gebiet

$$\Omega_{p+s} = \{z \mid |z| < 1, |z - a_j| > r_j (j=1, 2, \dots, p+s)\}$$

besteht aus endlich vielen Strecken. Der Uebergang von  $\Omega_{p+s}$  zum gesuchten Gebiet

$\Omega_q$  geschieht durch Subtraktion von endlich vielen – noch zu definierenden – Kreisscheiben, deren Mittelpunkte auf diesen Strecken liegen.

Sei  $L$  die Summe der Längen dieser Strecken. Sei  $\varphi$  der kleinste aller Winkel, unter welchen die Kreise  $C_0, \dots, C_{p+s}$  von den Geraden des Netzes  $N$  geschnitten werden; nach (C) ist  $\varphi$  positiv. Wir definieren

$$k_0 = \max\left(\frac{1}{\sin \varphi}, \frac{2L}{\delta}\right). \quad (25)$$

Sei  $T$  irgend eine der Strecken, in welche  $N \cap \Omega_{p+s}$  zerfällt. Es gibt eine positive Zahl  $r_T$  mit folgenden Eigenschaften:

(a)  $r_T$  ist kleiner als der Abstand der Menge  $T$  von der Vereinigung aller derjenigen unter den Kreisen  $C_0, \dots, C_{p+s}$ , welche nicht durch die Endpunkte von  $T$  gehen;

(b) 
$$r_T < \varrho\left(\log \frac{2}{\lambda}, \lambda, k_0, \frac{\varepsilon}{2\pi}\right),$$

wobei  $\varrho$  die mit Lemma 2 eingeführte Zahl bezeichnet;

(c) es existiert eine natürliche Zahl  $n_T$  so, dass  $[2n_T + k_0(n_T + 1)]r_T = t$ , wobei  $t$  die Länge von  $T$  bezeichnet.

Wir führen  $n_T$  Kreise vom Radius  $r_T$  ein; ihre Mittelpunkte sollen auf  $T$  liegen und von den Endpunkten dieser Strecke die Abstände  $(k_0 + 1)r_T, (2k_0 + 3)r_T, \dots, (n_T k_0 + (2n_T - 1))r_T$  aufweisen.

Diese Konstruktion werde für jede Komponente von  $N \cap \Omega_{p+s}$  durchgeführt: so definieren wir die Kreise  $C_j = \{z \mid |z - a_j| = r_j\}$  für  $j = p + s + 1, \dots, q$ .

Die Kreise  $C_1, \dots, C_q$  schneiden einander nicht. Dies folgt aus (a), der Anordnung der Mittelpunkte und der durch (25) implizierten Ungleichung  $1/(k_0 + 1) < \sin \varphi$ . Es kann vorkommen, dass  $C_0$  vorerst einige der neu eingeführten Kreise schneidet: diese gehören zu Strecken  $T$  mit auf  $C_0$  liegendem Endpunkt. Durch nochmaliges Verkleinern von  $r_T$  kann auch das Auftreten dieser Schnittpunkte vermieden werden.

Aus (c) und der durch (25) implizierten Ungleichung  $k_0 \geq 2L/\delta$  schliessen wir, dass

$$\sum_{j=p+s+1}^q r_j < \frac{\delta}{2}. \quad (26)$$

Aus (24) und (26) folgt (22).

Es ist noch (23) zu beweisen. Jedes  $\zeta \in \Omega_q$  liegt in der abgeschlossenen Hülle  $\bar{\omega}_j$  eines  $\omega_j$ . Wir zerlegen

$$\iint_{\Omega_q} g_q(z, \zeta) dx dy = \iint_{\Omega_q \cap V_j} g_q(z, \zeta) dx dy + \iint_{\Omega_q - (\Omega_q \cap V_j)} g_q(z, \zeta) dx dy. \quad (27)$$

Aus  $\zeta \in \omega_j, z \in V_j$  folgt  $|z - \zeta| \leq 3 \sqrt{2} \lambda$ , also mit (A) und der Abschätzung

$$g_q(z, \zeta) \leq \log \frac{2}{|z - \zeta|},$$

$$\iint_{\Omega_q \cap V_j} g_q(z, \zeta) dx dy \leq \int_{r=0}^{3\sqrt{2}\lambda} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left( \log \frac{2}{r} \right) r dr d\varphi < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (28)$$

Der Rand des Bereiches  $\Omega_q - (\Omega_q \cap V_j)$  besteht aus endlich vielen Kreisbogen und geradlinigen Streckenstücken. Auf den Bogen nimmt  $g_q$  den Randwert 0 an. Um die Werte von  $g_q$  auf den Strecken abzuschätzen, bemerken wir, dass jede dieser Strecken an mindestens einem Kreis  $C_l$  mit  $p + s + 1 \leq l \leq q$  anstößt; ihre Länge beträgt dann  $k_0 r_l$ . Es bezeichne  $\Omega$  das Innere von  $\Omega_q - (\Omega_q \cap U_j)$ . In  $\Omega$  ist  $g_q$  harmonisch. Auf dem Rand  $\Gamma$  dieses Gebietes gilt  $g_q \leq \log 2/\lambda$ , also nach dem Maximumprinzip auch im Innern. In allen Punkten von  $\Gamma \cap \{z \mid |z - a_l| < \lambda\}$  nimmt  $g_q$  den Randwert 0 an. Wegen Eigenschaft (b) von  $r_l$  kann mit Anwendung von Lemma 2 geschlossen werden, dass  $g_q < \varepsilon/2\pi$  im Gebiet  $\Omega \cap \{z \mid r_l < |z - a_l| < (1 + k_0) r_l\}$ , und damit insbesondere auf der betrachteten Randstrecke von  $\Omega_q - (\Omega_q \cap V_j)$ . Durch nochmalige Anwendung des Maximumprinzips erhalten wir die Gültigkeit der Ungleichung  $g_q < \varepsilon/2\pi$  auf dem ganzen Bereich  $\Omega_q - (\Omega_q \cap V_j)$ , und somit

$$\iint_{\Omega_q - (\Omega_q \cap V_j)} g_q(z, \zeta) dx dy < \frac{\varepsilon}{2\pi} \cdot \pi = \frac{\varepsilon}{2}. \quad (29)$$

Aus (27), (28) und (29) folgt (23).

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] M. ARSOVE, *Functions representable as differences of subharmonic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 75 (1953), 327–365.
- [2] M. BRELOT, *Sur l'approximation et la convergence dans la théorie des fonctions harmoniques ou holomorphes*, Bull. Soc. math. de France 73 (1945), 55–70.
- [3] M. BRELOT, *Compléments à la théorie de J. Deny*, Annales de l'Institut Fourier 1 (1949), 113–120.
- [4] M. BRELOT, *Éléments de la théorie classique du potentiel*, 3e édition (1965), Centre de documentation universitaire, Paris.
- [5] J. DENY, *Sur la convergence des suites de potentiels*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 218 (1944), 497–499.
- [6] J. DENY, *Sur l'approximation des fonctions harmoniques*, Bull. Soc. math. de France 73 (1945), 71–73.
- [7] J. DENY, *Systèmes totaux de fonctions harmoniques*, Annales de l'Institut Fourier 1 (1949), 103–113.
- [8] M. KELDYCH et M. LAVRENTIEFF, *Sur le problème de Dirichlet*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 204 (1937), 1788–1790.
- [9] S. N. MERGELYAN, *Uniform approximation to functions of a complex variable*, AMS Translation Nr. 101 [Uspechi Mat. Nauk (N.S.) 7 (1952), 31–122].

Eingegangen den 1. April 1967