

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Band:** 1 (1946)  
**Heft:** 4

**Artikel:** Mathematische Aufgaben aus dem Gebiete der Gasreaktionen  
**Autor:** Frauenfelder, P.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-1205>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 08.11.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

diese Vermutung leicht bestätigt werden. Merkwürdigerweise ist aber bis heute noch kein allgemeiner Beweis bekannt geworden, obwohl sich zahlreiche Autoren mit der Untersuchung von  $\gamma$  beschäftigt haben. Nur für den Spezialfall  $\alpha = \beta$  hat KHINTCHINE durch eine komplizierte, aber elementare Induktion  $\gamma \geq 2\alpha$  und damit  $\gamma_k \geq k\alpha$  beweisen können. Aus diesem Resultat ergibt sich als Verbesserung der oben hergeleiteten Abschätzung für die Ordnung von  $A$

$$k \leq \left[ \frac{1}{\alpha} \right] + 1.$$

Die hier mitgeteilten Resultate haben eine Bedeutung nur für Mengen positiver Dichte. Für diese ist das Darstellungsproblem vollständig elementar. Die klassischen Folgen  $F$  (Quadratzahlen,  $h$ -te Potenzen, Polygonalzahlen, Primzahlen inklusive 1) haben jedoch verschwindende Dichte. Man kann aber zeigen, daß  $mF$  bei genügend großem  $m$  positive Dichte hat. Für die Folge der Primzahlen inklusive 1 ist nach SCHNIRELMANN  $m=2$ , somit hat diese Folge eine endliche Ordnung  $k$ . (Aus der Richtigkeit der GOLDBACHSchen Vermutung würde  $k=3$  folgen.) Für die Quadratzahlen ist bekanntlich  $k=4$ , während die Dichte von  $2F$  noch verschwindet. Es ist also möglich, daß die Summenfolge zweier Folgen der Dichte 0 die Dichte 1 hat.

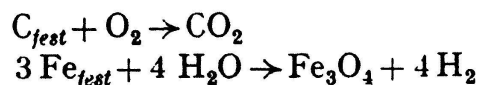
Zusammenfassend stellen wir fest, daß die Hauptaufgabe beim Beweis des Darstellungsproblems für eine gegebene Folge die Berechnung ihrer Dichte oder derjenigen einer Summenfolge ist, doch ist dies meist nur mit analytischen Hilfsmitteln möglich.

E. TROST, Zürich

## Mathematische Aufgaben aus dem Gebiete der Gasreaktionen<sup>1)</sup>

*Reaktionen vom Typus*  $A \rightarrow B$ :  $i = 0$ .

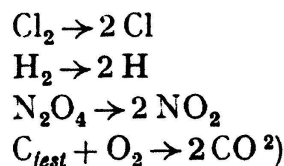
Beispiele<sup>2)</sup>:



Bei beliebigen Anfangswerten der Gasphasen erhält man lineare Gleichungen für die Umsatzgröße  $x$ , sowohl in molaren Konzentrationen als in Partialdrucken. Die  $q$  sind direkt berechenbar, ebenso  $\bar{M}$ .

*Reaktionen vom Typus*  $A \rightarrow 2B$ :  $i = -1$ .

Beispiele:



<sup>1)</sup> Siehe Heft Nr. 3, S. 46–53.

<sup>2)</sup> Die festen Phasen scheiden aus der Gleichgewichtsgleichung aus, da ihre Dampfkonzentration vernachlässigbar klein ist.

Bei beliebigen Anfangskonzentrationen: quadratische Gleichungen in  $x$ . Der Dissoziationsgrad in Funktion von  $p_t$  liefert eine Kurve dritter Ordnung vom Typus der Fig. 3.

$$\frac{1-\alpha^2}{4\alpha^2 \cdot p_t} = K_p(T) \quad (\text{druckabhängig}).$$

Die Bildungsgrade  $q_i$  werden ebenso wie das mittlere Molekulargewicht durch Hyperbeltypen in Funktion vom Dissoziationsgrad dargestellt.

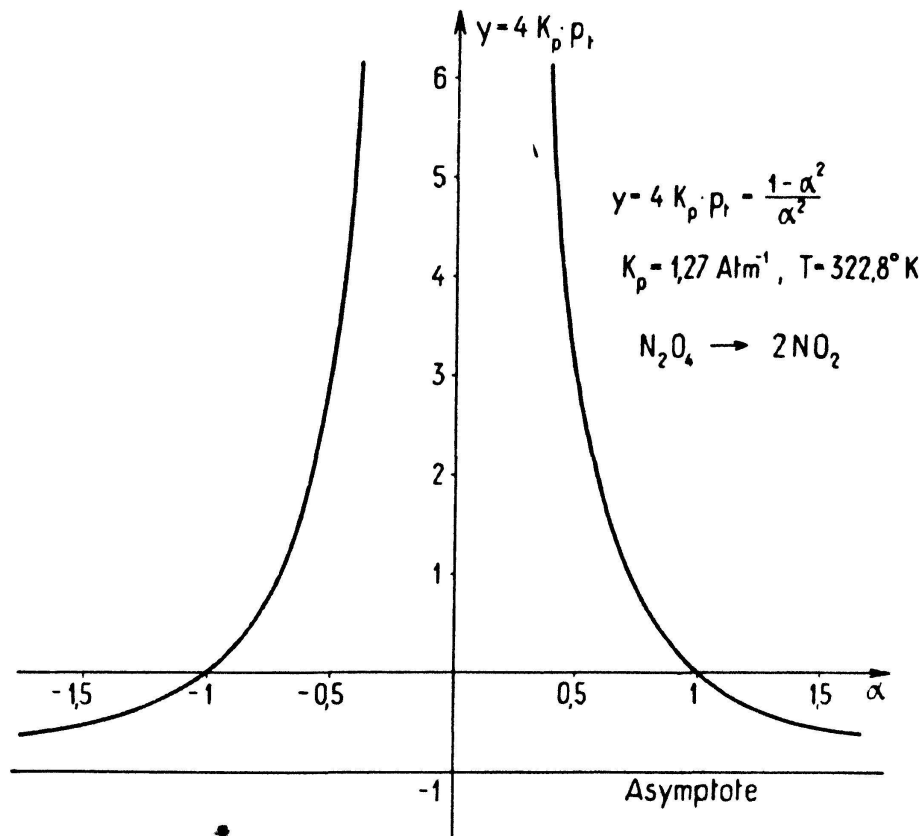


Fig. 3. Druckabhängigkeit des Dissoziationsgrades einer Reaktion vom Typus  $A \rightarrow 2B$ .

Reaktionen vom Typus  $2A \rightarrow B + C$ :  $i = 0$ .



Bei beliebigen Anfangskonzentrationen: quadratische Gleichungen in  $x$ . Der Dissoziationsgrad berechnet sich aus einer quadratischen Gleichung:

$$\frac{4(1-\alpha)^2}{\alpha^2} = K_c(T) = K_p(T) \quad (\text{druckunabhängig}).$$

$\bar{M}$  ist direkt berechenbar, ebenso die  $q_i$ . Beide sind lineare Funktionen des Dissoziationsgrades.

Reaktionen vom Typus  $A \rightarrow B + C$ :  $i = -1$ .



Beliebige Anfangswerte: quadratische Gleichungen in  $x$ . Der Dissoziationsgrad berechnet sich bei gegebenem Totaldruck aus einer quadratischen Gleichung:

$$\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2} = K_p \cdot p_t.$$

Als Bild ergibt sich eine Kurve dritter Ordnung.  $\bar{M}$  und die  $q_i$  sind durch Hyperbeln mit vertikalen und horizontalen Asymptoten mit  $\alpha$  verbunden.

Reaktionen vom Typus  $2 A \rightarrow 2 B + C$ :  $i = -1$ .

Beispiele:

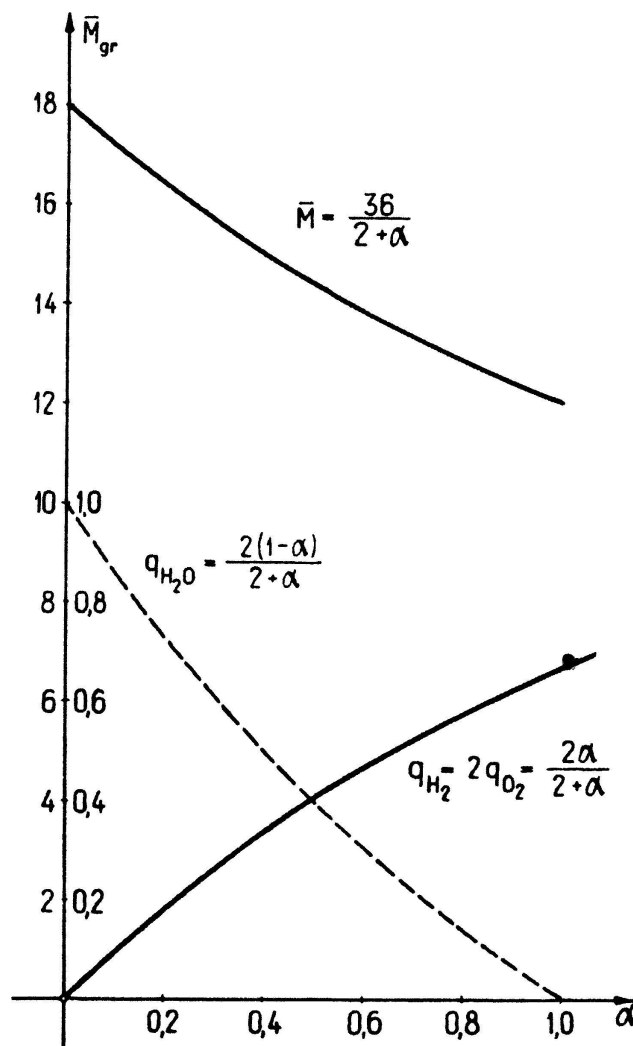
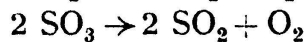
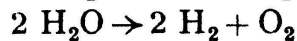
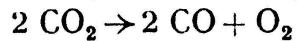
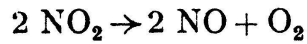


Fig. 4. Mittleres Molekulargewicht und Bildungsgrade in Funktion des Dissoziationsgrades für die Reaktion  $2 \text{H}_2\text{O} \rightarrow 2 \text{H}_2 + \text{O}_2$ .

Beliebige Anfangswerte: kubische Gleichungen in  $x$ . Der Dissoziationsgrad wird bei gegebenem Totaldruck aus einer kubischen Gleichung berechnet (Funktionsbild: Kurve vierter Ordnung).

$$\frac{(1-\alpha)^2(2+\alpha)}{\alpha^3} = K_p \cdot p_t$$

$\bar{M}$  und die Bildungsgrade werden vom hyperbolischen Typus in Funktion von  $\alpha$  (Fig. 4).

Reaktionen vom Typus  $2 A \rightarrow 3 B$ :  $i = -1$ .

Beispiel:  $2 O_3 \rightarrow 3 O_2$

Beliebige Anfangswerte: kubische Gleichung in  $x$ . Dissoziationsgrad in Funktion von  $p_t$ : Kurve vierter Ordnung.

$$\frac{4(1-\alpha)^2(2+\alpha)}{27\alpha^3} = K_p \cdot p_t.$$

$\bar{M}$  und  $q_i$  hyperbolisch mit  $\alpha$  verknüpft.

Reaktionen vom Typus  $2 A \rightarrow 3 B + C$ :  $i = -2$ .

Beispiel:  $2 NH_3 \rightarrow 3 H_2 + N_2$  (Haberreaktion).

Bei beliebigen Anfangswerten: Gleichungen vierten Grades in  $x$ . Der Dissoziationsgrad ist umgekehrt proportional mit  $\sqrt{p_t}$ . Geht man von reinem A aus, so ist  $\alpha$  durch eine Kurve dritter Ordnung mit  $p_t$  verbunden. Für diesen ersten Fall lautet die Gleichung:

$$\frac{4 \cdot (1-\alpha^2)}{3\sqrt{3} \cdot \alpha^2} = \sqrt{K_p} \cdot p_t.$$

Der Bildungsgrad von  $NH_3$  läßt sich bei gegebenem  $p_t$  aus einer quadratischen Gleichung berechnen. (Bild der Funktion: Kurve dritter Ordnung.)

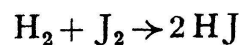
Reaktionen vom Typus  $A + B \rightarrow C + D$ :  $i = 0$ .

Beispiel:  $H_2O + CO \rightarrow CO_2 + H_2$  (Wassergasreaktion).

Beliebige Anfangswerte: quadratische Gleichung in  $x$ . Die Reaktion ist druckunabhängig.

Die Mannigfaltigkeit der Problemstellungen ist aber damit keineswegs erschöpft. Als Beispiel einer technisch interessanten Fragestellung betrachten wir die folgende Aufgabe:

Für die Reaktion



soll ermittelt werden, wieviel Mol  $H_2$  pro l man zu einem Mol  $J_2$  pro l zufügen muß, damit von  $J_2$   $x$  Mol/l reagieren. Die Reaktion laufe bei  $T = 625^\circ K$ , wobei  $K_c = 1,50 \cdot 10^{-2}$  (reine Zahl).

Sei  $y$  die gesuchte Molzahl  $H_2$  pro l:

$$\frac{(y-x)(1-x)}{4x^2} = 1,50 \cdot 10^{-2},$$

$$y = \frac{x(1-0,94x)}{1-x}.$$

Dies ist die Gleichung einer Hyperbel mit einer vertikalen und einer schiefgelegenen Asymptote, welche mit der  $x$ -Achse einen Winkel  $\varphi$  einschließt, mit  $\text{tg } \varphi = 0,94$ . Die Hyperbel geht durch den Nullpunkt und hat eine weitere Nullstelle für  $x = 1,0638$ .

Damit sind genügend Elemente bekannt, um die Asymptotenlage, die Hauptachsen, die Brennpunkte und die Scheitelkrümmungskreise konstruktiv zu ermitteln. Fig. 5 gibt ein Bild der Lösung.

In analoger Fülle bieten die andern Kapitel, die oben erwähnt wurden, Beispiele, die den Chemiker zum mathematischen Studium anspornen. Eine Menge weiterer Gebiete liegen noch völlig unbeachtet zur Bearbeitung bereit.

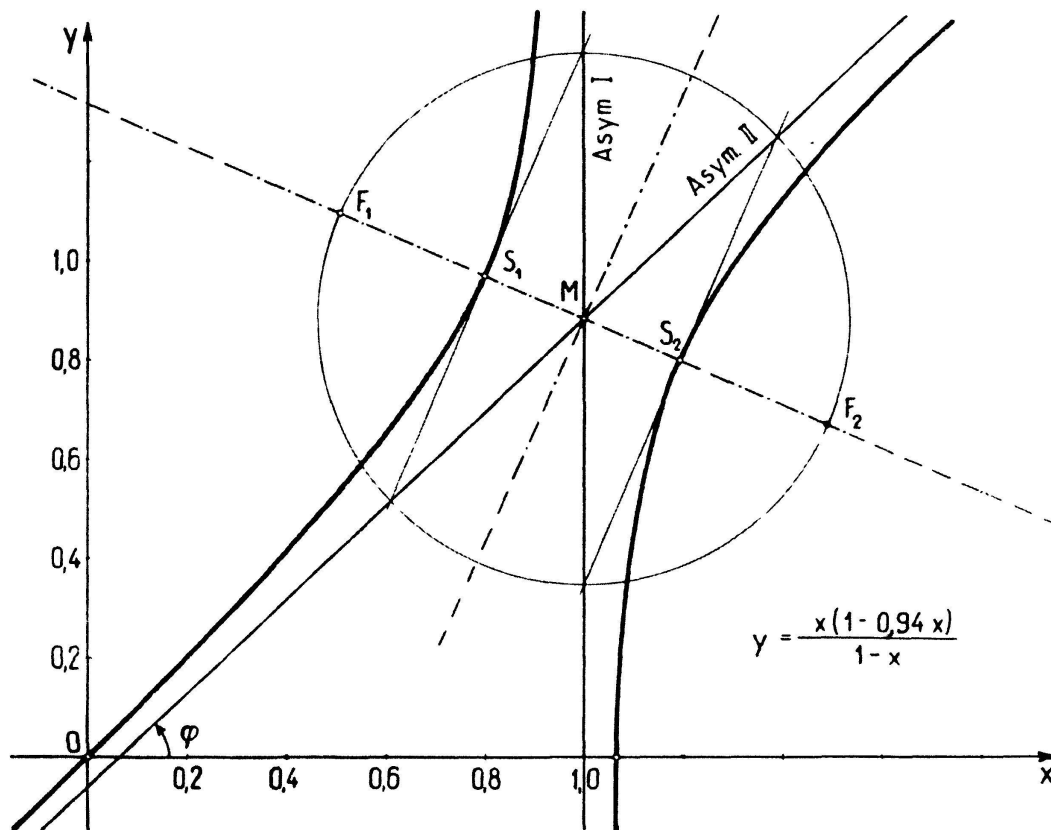
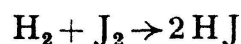


Fig. 5. Zur Reaktion  $\text{H}_2 + \text{J}_2 \rightarrow 2 \text{HJ}$   $K_c = K_p = 1,50 \cdot 10^{-2}$ ;  $T = 625^\circ \text{K}$

Die vorliegende Darstellung hatte den Zweck, eine didaktisch bereinigte Form für die Behandlung der Gasreaktionen zu geben und zur Verwendung des reichen Studienmaterials anzuregen. Es dürfte wünschenswert sein, einige Beispiele mit den Lösungen zur Hand zu haben, die ich hier folgen lassen will.

### *Beispiele mit Angabe der Lösungen*

#### 1. Für die Reaktion



gilt bei  $T = 623^\circ \text{K}$ :  $K_c = 1,494 \cdot 10^{-2}$  (reine Zahl).

Bei  $20^\circ \text{C}$  seien die folgenden Partialdrucke gegeben:

$p_{\text{H}_2} = 830 \text{ Torr}$ ,  $p_{\text{J}_2} = 700 \text{ Torr}$  (aus der molaren Konzentration mit idealer Gasgleichung gerechnet).

$p_{\text{HJ}} = 1000 \text{ Torr}$ . Man berechne die Gleichgewichtsdrucke.

Es sollen  $x \text{ Torr J}_2$  reagieren!

Resultate: bei 623° K:  $p'_{\text{H}_2} = 681,3$  Torr,  $p'_{\text{J}_2} = 404,9$  Torr  
 $p'_{\text{HJ}} = 4293,3$  Torr  
 bei 20° C:  $p''_{\text{H}_2} = 321$  Torr,  $p''_{\text{J}_2} = 191$  Torr  
 $p''_{\text{HJ}} = 2018$  Torr

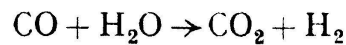
2. Für dieselbe Reaktion, bei derselben Temperatur seien anfänglich folgende Volumkonzentrationen gegeben: ·

$q_{\text{H}_2} = 20\%$ ,  $q_{\text{J}_2} = 20\%$ ,  $q_{\text{HJ}} = 60\%$ . Man berechne die prozentuale Zusammensetzung nach der Einstellung des Gleichgewichts.

Resultate: Es möge  $q_{\text{J}_2}$  um  $x\%$  abnehmen.

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0,3618 \text{ (unmöglich)} & q'_{\text{H}_2} = 9,82\%, \quad q'_{\text{J}_2} = 9,82\% \\ x_2 = 0,1018 & q'_{\text{HJ}} = 80,36\% \end{array}$$

3. Die Wassergasreaktion



hat bei  $T = 1396^\circ$  K ein  $K_c = K_p = 2,29$  (reine Zahl).

Anfängliche Zusammensetzung:  $a = 5,00$  Mol/m<sup>3</sup> CO  
 $b = 13,0$  Mol/m<sup>3</sup> H<sub>2</sub>O  
 $c = 1,00$  Mol/m<sup>3</sup> CO<sub>2</sub>  
 $d = 0$  Mol/m<sup>3</sup> H<sub>2</sub>

Es sollen  $x$  Mole H<sub>2</sub>O pro m<sup>3</sup> reagieren! Man berechne die Zusammensetzung nach Einstellung des Gleichgewichts.

$$\begin{array}{l} \text{Resultate: } x_1 = 2,729 \text{ Mol/m}^3 \\ x_2 = -18,45 \text{ Mol/m}^3 \text{ (unmöglich)} \\ a - x = 2,271 \text{ Mol/m}^3 \text{ CO} \\ b - x = 10,271 \text{ Mol/m}^3 \text{ H}_2\text{O} \\ c + x = 3,729 \text{ Mol/m}^3 \text{ CO}_2 \\ d + x = 2,729 \text{ Mol/m}^3 \text{ H}_2 \end{array}$$

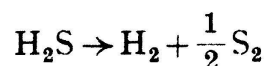
4. Die Dissoziation von H<sub>2</sub> hat bei 3350° K ein  $K_p = 3,00$  Atm<sup>-1</sup>.  $\text{H}_2 \rightarrow 2 \text{H}$ .

Man berechne  $K_c$  sowie die Massenwirkungskonstanten  $K_p$  und  $K_c$  für den inversen Ablauf der Reaktion bei derselben Reaktionstemperatur, unter Angabe der Maßeinheiten. Berechne den Dissoziationsgrad  $\alpha$  für  $p_t = 1$  Atm und diskutiere den Verlauf der Funktion  $p_t = f(\alpha)$ . Wie groß muß  $p_t$  sein, damit  $\alpha = 0,50$ ?

$$\begin{array}{l} \text{Resultate: } K_c = 850\,000 \text{ cm}^3 \\ K'_c = 1,212 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^{-3} \\ K'_p = \frac{1}{3} \text{ Atm} \end{array}$$

für  $p_t = 1$  Atm:  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{13}}$ ;  $\alpha = 0,50$  für  $p_t = 0,25$  Atm.

5. LEWIS und RANDALL geben für die Reaktion



bei  $T = 1537^\circ$  K den Wert:  $\lg K_c = 0,490^1$ .

<sup>1)</sup> Die Amerikaner rechnen die Konzentration in Mol/l.

Man gebe  $K_c$  und  $K_p$  mit Maßeinheit an und rechne die Konstanten  $K_c^*$  und  $K_p^*$  für die Reaktion mit ungebrochenen Reaktionszahlen.

$$\begin{aligned} \text{Resultate: } K_c &= 97,7 \text{ cm}^{+3/2}, & K_c^* &= 9,55 \cdot 10^3 \text{ cm}^{+3} \\ K_p &= 0,275 \text{ Atm}^{-1/2}, & K_p^* &= 7,57 \cdot 10^{-2} \text{ Atm}^{-1} \end{aligned}$$

6. Ein Gemisch von  $p_1 = 160$  Torr  $\text{NO}_2$  und  $p_2 = 400$  Torr  $\text{N}_2\text{O}_4$  bei  $20^\circ\text{C}$  sei gegeben.  $K_p = 0,788$  Atm bei  $322,8^\circ\text{K}$ . Man berechne die Gleichgewichtsdaten a) in molaren Konzentrationen, Partialdrucken und Volumprozenten, b) den Dissoziationsgrad und das mittlere Molekulargewicht. Reaktionsverlauf:  $2 \text{NO}_2 \rightarrow \text{N}_2\text{O}_4$ .

Resultat: Wir rechnen in Torr:  $K_p' = 0,788 \cdot 760$  Torr.

Die Drucke  $p_1$  und  $p_2$  werden auf  $322,8^\circ\text{K}$  umgerechnet:

$$p_1' = 715,4 \text{ Torr}, \quad p_2' = 1788,4 \text{ Torr}.$$

Es möge der Partialdruck von  $\text{N}_2\text{O}_4$  um  $x$  Torr abnehmen! Dann ergibt die quadratische Gleichung die Lösungen:  $x_1 = 135,7$  Torr

$$x_2 = -1007 \text{ Torr (unmöglich)}$$

Enddrucke:  $p_1 = 986,8$  Torr,  $p_2 = 1652,7$  Torr, bei  $322,8^\circ\text{K}$ ,

$$\text{daraus: } [\text{NO}_2] = 1,207 \cdot 10^{-5} \text{ Mol/cm}^3$$

$$[\text{N}_2\text{O}_4] = 2,023 \cdot 10^{-5} \text{ Mol/cm}^3$$

$$q_{\text{NO}_2} = 0,3739$$

$$q_{\text{N}_2\text{O}_4} = 0,6261$$

$$\alpha = 0,2317$$

$$\bar{M} = 74,69 \text{ g}.$$

P. FRAUENFELDER, Winterthur.

## Kleine Mitteilungen

### I. Konstruktion der Hauptträgheitsachsen eines Dreiecks.

Durch zwei beliebige Dreiecke  $ABC$  und  $A^*B^*C^*$  wird eine Affinität festgelegt. Die Schwerpunkte der Dreiecke entsprechen sich in dieser Affinität, weil sich die Mittellinien eines Dreiecks im Verhältnis 1:2 schneiden und Teilverhältnisse bei affinen Transformationen ungeändert bleiben.

Zu jedem Paar entsprechender Punkte gibt es genau ein Paar rechtwinkliger Achsenkreuze, die sich affin entsprechen. In Figur 1 sind diese Achsenkreuze  $(xy)$  und  $(x^*y^*)$  für die Schwerpunkte eingezeichnet worden. (Sie sind zugleich die Achsen der Ellipse, die durch die Eckpunkte des Dreiecks geht und den Schwerpunkt zum Mittelpunkt hat.)

Wählt man diese Achsenkreuze als Koordinatensysteme, so gestaltet sich die Umrechnung der Koordinaten der Systeme sehr einfach:

$$x = a x^*$$

$$y = b y^*; \quad a \text{ und } b \text{ sind feste Zahlen.}$$

Für die Zentrifugalmomente der Dreiecke bezüglich dieser Achsen erhält man die Transformationsformel

$$\iint_{\Delta} xy \, dx \, dy = a^2 b^2 \iint_{\Delta^*} x^* y^* \, dx^* \, dy^*.$$

Verschwindet das Zentrifugalmoment für eines der beiden sich entsprechenden Dreiecke, so verschwindet es auch für das andere, und die Koordinatenachsen sind dann Hauptträgheitsachsen.