Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 1 (1946)
Heft: 6

Artikel: Über die rationalen Hauptwinkel der Goniometrie
Autor: Hadwiger, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1210

Ausschlaggebend ist nun, daß dieses Verkleinerungsverhältnis nur von n abhängt. Iterieren wir also die Konstruktion, so erhalten wir eine unbegrenzte Serie von regulären Gitter-n-Ecken

$$\mathfrak{P}', \quad \mathfrak{P}'', \quad \ldots, \quad \mathfrak{P}^{(\nu)}, \quad \ldots.$$

deren Seiten gegen Null konvergieren. Dies führt aber zu einem Widerspruch, da ein Gitter nicht beliebig kleine Gittervektoren enthalten kann, w.z.b.w.

Ein den Sonderfall $n = 5$ ebenfalls umfassendes Verfahren erhält man, wenn man die Vektoren

$$\overrightarrow{P_n P_{n-1}}, \quad \overrightarrow{P_1 P_n}, \quad \ldots, \quad \overrightarrow{P_{n-2} P_{n-1}} \tag{5}$$

sukzessive von den Punkten der Serie (2) aus abträgt. Das Verkleinerungsverhältnis wird dann

$$\frac{s'}{s} = \left|1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right| < 1 \tag{6}$$

und die resultierenden Gitter-n-Ecken liegen konzentrisch zu $\mathfrak{P}$.

W. SCHERRER, Bern

Über die rationalen Hauptwinkel der Goniometrie

Es gibt abzählbar unendlich viele rationale Winkel

$$\varphi = 2\pi \frac{p}{q}, \quad 0 \leqq p < q; \quad p, q \text{ ganz und } (p, q) = 1, \tag{1}$$

deren Gradmaß also rational ist; dagegen sind nur einige wenige derartige rationale Winkel bekannt, für die wenigstens eine der vier trigonometrischen Funktionen $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi$, $\operatorname{ctg}\varphi$ einen ebenfalls rationalen endlichen Wert annimmt. Diese bekannten elementaren Winkel, wir wollen sie goniometrische Hauptwinkel nennen, sind im Gradmaß angeschrieben

$$\varphi = 0^0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0, 120^0, 135^0, 150^0, 180^0, 210^0, 225^0, 240^0, 270^0, 300^0, 315^0\ 330^0. \tag{2}$$

Um diese Rationalitätsverhältnisse bei allen vier trigonometrischen Funktionen vollständig zu überblicken, genügt es im Hinblick auf die goniometrischen Umrechnungsformeln durchaus, die Verhältnisse etwa bei der Funktion $\cos\varphi$ zu kennen. Diese Funktion wird bekanntlich für die folgenden Hauptwinkel rational

$$\varphi = 0^0, 60^0, 90^0, 120^0, 180^0, 240^0, 270^0, 300^0. \tag{3}$$

In dieser Note möchte ich einen kurzen Beweis dafür mitteilen, daß diese 8 Winkel (3) die einzigen rationalen Winkel des Grundintervalls $0 \leqq \varphi < 360^0$ sind, für die $\cos\varphi$ rational ausfällt[1]). Damit ist auch bewiesen, dass die 16 goniometrischen Haupt-

[1]) Das Kernstück des vorliegenden Beweises stellt die arithmetische Übertragung eines geometrisch anschaulichen Beweisgedankens, den ich Herrn W. SCHERRER verdanke, dar; vgl. die vorstehende Note: W. SCHERRER, Die Einlagerung eines regulären Vielecks in ein Gitter.

winkel (2) die einzigen sind, die die Rationalitätsforderungen, welche an sie gestellt sind, erfüllen. Damit haben diese Hauptwinkel, die mit den elementargeometrischen Gegebenheiten engste Beziehungen aufweisen, eine andere instruktive Charakterisierung erfahren.

Wenn wir die 12 rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$, $0 \leqq p < q$ für welche $1 \leqq q \leqq 6$ ist, durchgehen, so stoßen wir auf die 8 Werte, denen die Hauptwinkel (3) entsprechen, für die $\cos\varphi$ rational wird. Es genügt somit, das nachfolgend noch ausführlich formulierte Theorem zu beweisen:

Aussage: Es sei $\varphi = 2\pi\frac{p}{q}$, $1 \leqq p < q$, $(p, q) = 1$, $q > 6$; dann ist $\cos\varphi$ irrational!

Beweis: Wir nehmen an, es sei im Gegenteil $\cos\varphi = a_1 =$ rational. Nach den goniometrischen Formeln für die Funktionen der vielfachen Winkel gibt es dann zwei rationale Zahlen a_n und b_n so, daß

$$\cos n\varphi = a_n, \quad \sin n\varphi = b_n \sin\varphi \tag{4}$$

gesetzt werden kann. Wir führen nun die komplexen Einheitszahlen

$$z_n = e^{in\varphi} = a_n + i b_n \sin\varphi \qquad [n = 0, 1, 2, \ldots] \tag{5}$$

ein, und bemerken, daß wegen der Periodizität

$$z_n = z_{n+q} \tag{6}$$

in der Folge (5) nur endlich viele verschiedene Zahlwerte auftreten. Demnach kann man ein $\varDelta > 0$ so finden, daß alle diese Einheitszahlen auf die Form

$$z_n = (p_n + i q_n \sin\varphi)\varDelta \tag{7}$$

gebracht werden können, wobei p_n und q_n ganze Zahlen sind. Wegen $(p, q) = 1$, das heißt wegen der Teilerfremdheit der Zahlen p und q, gibt es eine Lösung m der linearen Kongruenz

$$m p \equiv 1 \pmod{q}. \tag{8}$$

Nun bilden wir

$$1 - z_m = -2i \sin\frac{m\varphi}{2} e^{\frac{im\varphi}{2}}. \tag{9}$$

Mit Rücksicht auf (7) ist offenbar für ein ganzes positives k

$$(1 - z_m)^k = 1 - \binom{k}{1} z_m + \binom{k}{2} z_{2m} - \cdots + (-1)^k z_{km} = (P_k + i Q_k \sin\varphi)\varDelta, \tag{10}$$

wobei P_k und Q_k ganze Zahlen sind. Im Hinblick auf die in (9) angedeutete Umformung auf der rechten Seite hat man nach (10)

$$|1 - z_m|^k = \left|2 \sin\frac{m\varphi}{2}\right|^k = |P_k + i Q_k \sin\varphi|\varDelta. \tag{11}$$

Beachtet man die Kongruenz (8), so resultiert weiter

$$\left|2 \sin \frac{\pi}{q}\right|^k = |P_k + i Q_k \sin \varphi| \Delta . \tag{12}$$

Da offensichtlich nicht beide Zahlen P_k und Q_k zugleich verschwinden können, kann jetzt auf

$$|P_k + i Q_k \sin \varphi| \geqq |\sin \varphi| > 0, \tag{13}$$

und damit auf

$$\left|2 \sin \frac{\pi}{q}\right|^k \geqq \Delta \, |\sin \varphi| \tag{14}$$

geschlossen werden. Wegen $q > 6$ ist aber

$$\left|\sin \frac{\pi}{q}\right| < \frac{1}{2}, \tag{15}$$

so daß mit (14) für hinreichend große k ein Widerspruch erzielt ist. Damit ist die Unmöglichkeit der Gegenannahme gezeigt und der Beweis abgeschlossen.

H. HADWIGER, Bern

Johann I Bernoulli als Kritiker der «Principia» Newtons

1. In der Geschichte der Mathematik lebt JOHANN BERNOULLI (1667–1748) als eifrigster Partisan Leibnizens im Prioritätsstreit um die Entdeckung der Infinitesimalrechnung fort, der nach dem Tode seines großen Freundes allein «wie Horatius Cocles»[1]) den Kampf mit den zelotischen Newtonianern ausfechten mußte. In diesen Fehden konnte nun BERNOULLI mit nicht geringem Stolze darauf hinweisen, daß er in der «*Philosophiae naturalis principia mathematica*», auf die die Newtonianer wie auf die Bibel ihres Herrn und Meisters schworen, eine Reihe von Fehlern in der Behandlung der Zentralkräfte nachweisen konnte.

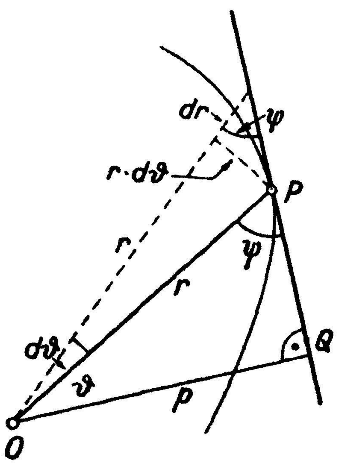

Fig. 1

Sind diese Fehler allerdings mehr bloße Versehen NEWTONS, so gaben sie doch andererseits BERNOULLI Anlaß, das Zweikörperproblem ganz allgemein, sowohl im Vakuum wie im widerstehenden Mittel analytisch zu entwickeln und dabei um

[1]) So nennt FONTENELLE BERNOULLI im Eloge vor der Pariser Akademie.