

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Band:** 1 (1946)  
**Heft:** 6

**Artikel:** Bemerkungen zur normalen dimetrischen Axonometrie  
**Autor:** Hess, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-1212>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 08.11.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

«Ich kann nicht läugnen, daß der Dr. BERNOULLI in dem Calculo sehr wohl versiert seye, aber Er hat, soviel ich weiß, seine Wissenschaft niemahlen auff problemata, die einigen Nutzen haben, appliciert. Es scheint, Er habe einen sonderbaren zu nichts-werthen Dingen geschickten Geist. Dem einzigen Theil von des NEWTON Philosophie, der von keiner Wichtigkeit ist, und nicht zeigt, wie die Phaenomena naturae zu explicieren, hat er fleissig gestudirt und examiniert. Wann er wolle seine wissenschaft auff etwas nützlichendes applicieren, so wünschte ich, daß Er dieses problema solvirte. Dr Leibnitz hat es tentiert, aber Er hat wüst gefehlt und konnte es nicht solviren etc.»

Aber der blinde Eifer der NEWTONIANER übersah, daß der Fortschritt der mathematischen Wissenschaften unzertrennlich mit der Entwicklung eines zweckmäßigen Kalküls verknüpft ist; und während die englische Mathematik im 18. Jahrhundert in ihrer Versteifung auf NEWTONS Fluxionsmethode in Stagnation verharrte, arbeitete JOHANN BERNOULLI als einer der gefeiertsten Lehrer des Jahrhunderts an der Ausgestaltung derjenigen Form der neuen Analysis, welche die von NEWTON begründete theoretische Physik erst eigentlich fruchtbar machte. J.O.FLECKENSTEIN, Basel

## Bemerkungen zur normalen dimetrischen Axonometrie

Im folgenden wird eine einfache Konstruktion der Achsen  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  und eine ebenso einfache Konstruktion der Achsen für jene Ellipsen gezeigt, welche (vergrößerte) Bilder jener Kreise sind, die in der  $xz$ - oder  $xy$ -Ebene, oder parallel dazu liegen.

1. Sind  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  die Winkel der Achsen des räumlichen rechtwinkligen Koordinatensystems mit der Bildebene  $ABC$  (Fig. 1), dann bestehen bei dem meist verwendeten dimetrischen System die Beziehungen

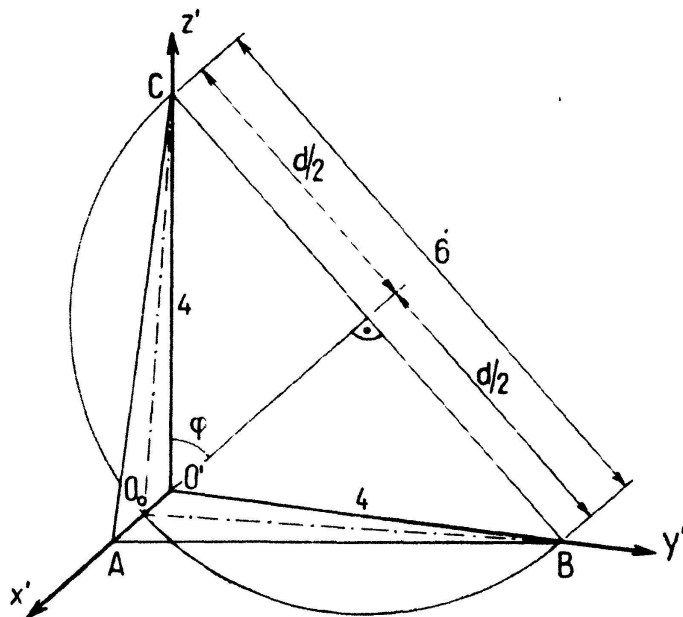


Fig. 1

$$\cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma = 1 : 2 : 2 \quad \text{oder} \quad \cos^2 \alpha : \cos^2 \beta : \cos^2 \gamma = 1 : 4 : 4$$

und allgemein

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2.$$

Hieraus folgt zum Beispiel:

$$\cos \beta = \frac{2}{3} \sqrt{2}. \tag{1}$$

Da für die  $y'$ - und  $z'$ -Achse die gleiche Bildlänge für die Längeneinheit gewählt werden kann, so können wir die Punkte  $B$  und  $C$  des Spurendreiecks  $ABC$  so legen, daß die Bildlängen  $O'B$  und  $O'C$  je gleich 4 cm sind. Das Dreieck  $O'BC$  ist dann gleichschenkelig, die Grundlinie sei  $d$ . Die  $x'$ -Achse steht dann, als Höhe des Spurendreiecks, senkrecht dazu und halbiert  $BC$ . Durch Umlegen des räumlichen rechtwinkligen Dreiecks  $OBC$  um die Hypotenuse  $BC$  in die Bildebene kommt dieses in die Lage  $BCO_0$ . Die Raumstrecke  $OB$ , die der Bildstrecke  $O'B = 4$  cm entspricht, hat somit die Länge  $O_0B = \frac{1}{2} d \sqrt{2}$ . Somit ist  $\frac{1}{2} d \sqrt{2} \cdot \cos \beta = 4$  oder (nach (1))  $\frac{1}{2} d \sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{2} = 4$ ; somit  $d = BC = 6$  cm.

Das heißt also: Das gleichschenkelige Dreieck  $O'BC$  mit den Schenkeln  $O'B = O'C$

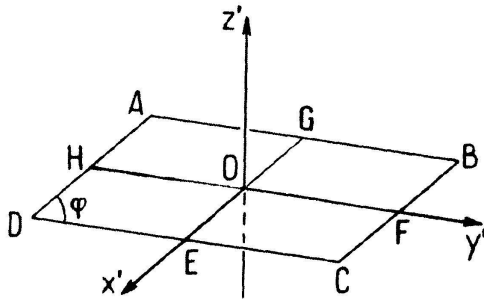


Fig. 2

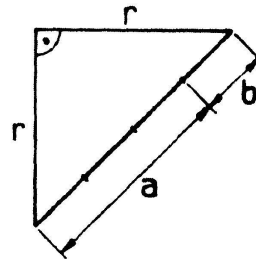


Fig. 3

= 4 cm und der Grundlinie  $BC = 6$  cm liefert mit der zur Grundlinie gehörigen Höhe gerade die gesuchten Richtungen der drei Achsen  $x', y', z'$  (Fig. 1).

Bemerkenswert ist noch:

$$\sin \varphi = \frac{3}{4}. \tag{2}$$

2. Mit Hilfe der Gleichung (2) läßt sich nun auch eine sehr einfache Konstruktion der Halbachsen  $a$  und  $b$  jener Ellipsen finden, welche die Bilder von Kreisen in der  $xy$ - oder  $xz$ -Ebene sind. In Fig. 2 sei zum Beispiel  $ABCD$  das Bild eines Quadrates, dessen Seiten zu den Koordinatenachsen parallel sind und das einem Kreise mit dem Radius  $r$  umschrieben ist. Die Verbindungslinien  $HF$  und  $EG$  der Seitenmitten dieses Quadrates sind dann zwei konjugierte Durchmesser der zu zeichnenden Ellipse; sie liegen in der  $y'$ - bzw.  $x'$ -Achse, und es ist im besonderen

$$HF = 2r \text{ und } EG = r.$$

(Es handelt sich ja um «vergrößerte» Bilder.) Jetzt bestehen bekanntlich die Beziehungen

$$a^2 + b^2 = r^2 + \frac{1}{4} r^2 = \frac{5}{4} r^2 \quad \underline{2ab = 2r \cdot \frac{r}{2} \sin \varphi = \frac{3}{4} r^2},$$

daher  $(a + b)^2 = 2r^2, \quad (a - b)^2 = \frac{r^2}{4} \cdot 2.$

Also  $a + b = r\sqrt{2}, \quad a - b = \frac{1}{2} r\sqrt{2}, \quad \text{oder} \quad \underline{a = 3 \cdot \frac{r}{4} \sqrt{2}} \quad \text{und} \quad \underline{b = \frac{r}{4} \sqrt{2}}. \tag{3}$

Die Halbachsen der Ellipse verhalten sich wie 3:1:

$$\underline{a : b = 3 : 1.} \quad (4)$$

Die Lage der großen Achse folgt aus  $a \perp z'$ . Die Längen  $a$  und  $b$  lassen sich aus (3) leicht konstruieren: In dem rechtwinkligen Dreieck (Fig. 3) mit den Katheten  $r$  ist die Hypotenuse  $r\sqrt{2}$ , also  $a$  ist drei Viertel und  $b$  ein Viertel der Hypotenuse.

Fig. 4 zeigt das fertige Bild der Ellipse. Macht man noch  $O'K$  gleich der ganzen Hypotenuse  $r\sqrt{2}$  (von Fig. 3) und  $O'L$  gleich der halben Hypotenuse, dann ist  $KL$  die Tangente im Schnittpunkte  $M$  der einen Diagonale des Parallelogramms mit der Ellipse.

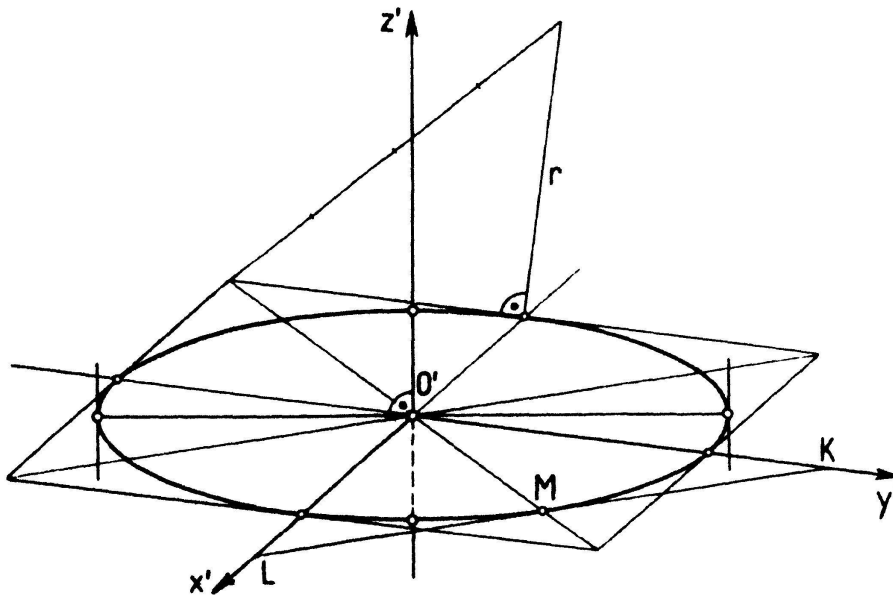


Fig. 4

Die Bilder von Kreisen in der  $y, z$ -Ebene, oder parallel dazu, zeigen keine Besonderheit, da sie ja in einen Rhombus mit den Seiten  $2r$  eingezeichnet werden, dessen Diagonalen die Achsenrichtungen für die Ellipse liefern. Die kleine Achse fällt in die Richtung der  $x'$ -Achse. Trägt man übrigens auf den konjugierten Durchmesser, die zur  $y'$ - und  $z'$ -Achse parallel liegen, vom Mittelpunkte aus die Strecken  $r\sqrt{2}$  ab, dann sind die Endpunkte dieser Strecken die Ecken des der Ellipse umschriebenen Rechtecks mit den Seiten  $2a$  und  $2b$ .  $a$  ist natürlich auch hier  $\frac{3}{4}r\sqrt{2} = 1,06r$ , während  $b = \frac{1}{4}r\sqrt{14} = 0,936r$  ist.

A. HESS, Zürich

## Aufgaben

1. Die Aufgabe lautete: Ein reguläres Fünfeck zu zeichnen, dessen Seiten als gerade Linien (also eventuell in ihrer Verlängerung) der Reihe nach durch fünf in der Ebene gegebene Punkte hindurchgehen. Wann ist die Aufgabe lösbar? P. FINSLER

*Lösung:* Ein Viereck  $B, C, D, E$  gestattet i. a. endlich viele umschriebene reguläre Fünfecke, ganz in Analogie mit der entsprechenden Quadrataufgabe (siehe *El. Math.*, Bd. 1, Nr. 1, S. 1). Liegt ein fünfter Punkt  $A$  auf der übrigen Fünfeckseite  $a$ , so ist er von  $BCDE$  abhängig. Man kann jedoch fragen: Wie muß das Viereck  $ABCD$  beschaffen sein, damit es eine ganze Schar umschriebener Fünfecke gestattet? In diesem Falle ist die gestellte Aufgabe lösbar.