Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 2 (1947)
Heft: 2

Rubrik: Kleine Mitteilungen

4 Mengen einen nicht leeren Durchschnitt haben; dies bedeutet jedoch, daß die 5 Mengen K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 einen nicht leeren Durchschnitt haben. So kann man analog weiterschließen. Dies bedeutet:

«*Wenn von n konvexen beschränkten Mengen je drei einen nicht leeren Durchschnitt haben, so haben alle n Mengen einen nicht leeren Durchschnitt.*»

Dies ist bekanntlich eine etwas spezialisierte Fassung des HELLY-RADON*schen Satzes* für die Ebene[1]).

H. HADWIGER, Bern

Kleine Mitteilungen

Über die Voraussetzungen für die Beweisbarkeit einiger Sätze der Infinitesimalrechnung

K. REIDEMEISTER zeigte in seinem Aufsatz «Zur Infinitesimalrechnung» in den Semesterberichten der Universität Münster, 8. Semester 1935/6, Seite 87, daß gewisse Teile der Differential- und Integralrechnung unabhängig vom Vollständigkeits- oder Cantorschen Axiom aufgebaut werden können. Dazu gehören insbesondere die Regeln über das Differenzieren von Summen, Produkten und Quotienten sowie der ganzen rationalen Funktionen. Ferner ist z. B. eine Funktion stetig ($\varepsilon-\delta$-Bedingung) in einem Punkte, wenn sie dort differenzierbar ist, sie wächst in jenem Punkte, wenn $y' > 0$ ist.

Beim Zeichnen von Funktionsbildern wird nun im Mittelschulunterricht ganz selbstverständlich benützt, daß eine Funktion, die in einem abgeschlossenen Intervall überall eine positive Ableitung besitzt, darin monoton wächst, und man kann sich fragen, ob sich das nicht ohne Vollständigkeitsaxiom beweisen ließe. Die üblichen Beweise verwenden dazu den Mittelwertsatz, der mit dem Satz von Rolle und dieser wieder mit dem Satz vom Maximum bewiesen wird. Zur Herleitung des letzteren aber verwendet man die Definition einer Zahl mittels einer Schachtelung, also letzten Endes das Cantorsche Axiom. Daß dieses nun tatsächlich für einen allgemeinen Beweis nötig ist, zeigt folgendes Beispiel.

«Zahlen» seien alle rationalen Zahlen und nur diese. In diesem Bereich gelten alle Axiome betreffend einen geordneten Körper sowie das Axiom von Eudoxos.

Nun definieren wir eine Funktion für alle (rationalen!) Werte von 0 bis 2 wie folgt: Es sei

$$f(x) = x \text{ für alle } x, \text{ deren Quadrat } < 2 \text{ ist},$$
$$f(x) = x - 2 \text{ für alle } x, \text{ deren Quadrat } > 2 \text{ ist}.$$

Diese Funktion besitzt folgende Eigenschaften:

1. Sie ist «stetig» im ganzen Intervall $\langle 0, 2 \rangle$, da es ja um jedes x im Inneren des Intervalles ein Intervall gibt, in dem die Funktion durch einen der beiden obigen Ausdrücke allein definiert ist.
2. Sie ist 0 in den Endpunkten des Intervalles $\langle 0, 2 \rangle$.
3. Sie ist stetig differenzierbar im Intervall $\langle 0, 2 \rangle$.

$$f'(x) \text{ ist überall gleich } 1, \text{ also positiv.}$$

Dagegen sieht man sofort:

I. Die Funktion ist nicht gleichmäßig stetig im Intervall $\langle 0, 2 \rangle$.
II. Sie besitzt darin weder ein Maximum noch ein Minimum.
III. Der Mittelwertsatz ist für das ganze Intervall sowie für gewisse Teilintervalle nicht erfüllt.
IV. Die Funktion nimmt im Intervall $\langle 0, 2 \rangle$ nicht monoton zu.

---

[1]) Vgl. J. RADON, Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten, Math. Ann. *83*, 113–115, 1921; E. HELLY, Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten, Jber. D.M.V. *32*, 175–176, 1923.

Die in der normalen Infinitesimalrechnung gültigen Sätze:
Aus 1. folgt die gleichmäßige Stetigkeit,
aus 1. und 2. folgt die Existenz eines Extremums im Intervall $\langle 0, 2 \rangle$,
aus 3. folgt der Mittelwertsatz sowie die monotone Zunahme im ganzen Intervall, lassen sich daher ohne das CANTORsche oder ein ihm äquivalentes Axiom nicht beweisen.

HANS LIEBL, Basel

Aufgaben

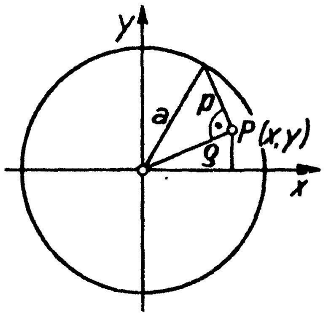
Bemerkungen. Zu Aufgabe 1 sendet Frl. R. C. YOUNG (London) eine schöne Arbeit ein. Ferner behandelt H. SCHÜEPP (Zürich) im Anschluß an Aufgabe 1 ein allgemein interessantes Problem. Beide Einsendungen werden hier publiziert. –

Die Redaktion bittet, für die Lösung jeder Aufgabe ein besonderes, mit dem Namen des Autors versehenes Blatt zu benützen. Manche Lösungen wurden direkt an die Aufgabensteller gesandt. Da dies der Redaktion im allgemeinen nicht zur Kenntnis gelangt, können diese Lösungen hier nicht angezeigt werden.

Aufgabe 2. Von einer Ellipse kennt man zwei Punkte, den Mittelpunkt und die Länge der großen Hauptachse. Es ist eine planimetrische Konstruktion der Hauptachsen verlangt. W. LÜSSY.

Die Lösungen von L. KIEFFER (Luxemburg), J. BRUNNER (Zürich) und P. GLUR (Bern) benützen den Raum, indem sie die Ellipse als Normalprojektion eines Kreises betrachten. Herr P. GLUR gibt auch noch eine schöne Lösung einer etwas allgemeineren Aufgabe mit Hilfe des Desarguesschen Involutionssatzes. Diese entspricht der Forderung nach einer planimetrischen Konstruktion. Wir geben hier die völlig elementare Lösung des Aufgabenstellers:

P sei ein Punkt der Ellipse mit den Halbachsen a und b (siehe Figur): $p^2 = a^2 - \varrho^2 = a^2 - x^2 - y^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2) - y^2 = y^2\left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right) = y^2 \frac{c^2}{b^2}$. Somit $p = \frac{c}{b}\,y$.



Aus dem Umstand, daß p proportional y ist, ergibt sich folgende Konstruktion: Man teile die Strecke $P_1 P_2$ im Verhältnis $p_1 : p_2$, die beiden Teilpunkte sind Punkte der großen Achsen der beiden Lösungen. Die Aufgabe hat stets zwei Lösungen, wenn P_1 und P_2 im Innern des Hauptkreises gewählt werden.

Aufgabe 3. Ein schiefer Kreiskegel ist durch die längste und die kürzeste Mantellinie und den Radius des Grundkreises bestimmt. Irgendeine Mantellinie sei festgelegt durch den Winkel, den ihr Radius mit demjenigen der längsten Mantellinie bildet. Die Länge dieser Mantellinie ist unabhängig vom Grundkreisradius. W. LÜSSY.

Ist l die längste und k die kürzeste Mantellinie, so liefert eine einfache Rechnung für die Mantellinie x, die zum Winkel φ gehört:

$$x^2 = l^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + k^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(l^2 + k^2) + \frac{1}{2}(l^2 - k^2) \cos \varphi.$$

B. SCHENKER (Bern) gibt den Ausdruck links, E. BEERENWINKEL (St. Gallen) und L. KIEFFER (Luxemburg) geben den Ausdruck rechts.

Aufgabe 4. $y = f(x)$ sei eine eindeutige, stetige, differenzierbare Funktion. Ein Parallelstreifen konstanter Breite a, dessen Ränder stets parallel zur y-Achse sind, bewegt