Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 2 (1947)
Heft: 3

Artikel: Über eine fehlende Ungleichung in der Theorie der konvexen Körper
Autor: Hadwiger, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-12820

Über eine fehlende Ungleichung in der Theorie der konvexen Körper[1])

W. BLASCHKE[2]) und andere haben sich die Frage gestellt, welche Bedingungen notwendig und hinreichend dafür sind, daß drei Maßzahlen, V, F und M, das Volumen, die Oberfläche und das Integral der mittleren Krümmung eines realisierbaren konvexen Körpers darstellen. Die aus der Minkowskischen Theorie hervorgegangenen, bis heute bekannten Relationen, die zwischen den drei Zahlen bestehen, reichen nicht aus; vielmehr fehlt eine weitere Ungleichung, die trotz zahlreichen Bemühungen unseres Wissens noch nicht aufgefunden werden konnte. Das heute so reich ausgestattete Lehrgebäude der konvexen Körper zeigt an der genannten Stelle eine empfindliche Lücke.

Nachfolgend schildern wir kurz die Überlegungen, die uns zu diesem zwingenden Schluß führen. Um die sich hier bietenden Verhältnisse klar überblicken zu können, ist es vorteilhaft, die konvexen Körper als Punkte im *Blaschkeschen Diagramm* abzubilden.

Einem konvexen Körper mit den Maßzahlen V, F und M ($V =$ Volumen, $F =$ Oberfläche, $M =$ Integral der mittleren Krümmung) ordnen wir in einem ebenen Kartesischen System den Punkt mit den beiden Koordinaten

$$x = \frac{4\pi F}{M^2}\,; \quad y = \frac{48\pi^2 V}{M^3}$$

zu. Offenbar entsprechen alle ähnlichen Körper demselben Diagrammpunkt, d. h. die Darstellung ist in bezug auf die unwesentliche Ähnlichkeitsabbildung invariant. Es soll an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, daß auch zwei nicht ähnliche Körper denselben Diagrammpunkt ergeben können, beispielsweise dann, wenn zwei verschiedene Körper in allen drei Maßzahlen übereinstimmen. Daß diese Möglichkeit

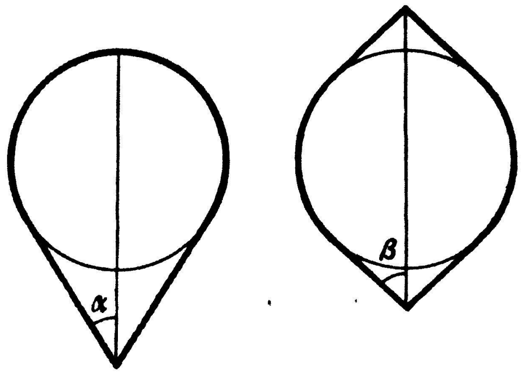

Fig. 1

[1]) Die vorliegende Note stellt eine ausführlichere Darstellung des letzten Teils des vom Verfasser am 15. Oktober 1946 in Lausanne im Rahmen des «Cours de perfectionnement de la Société suisse des professeurs de l'enseignement secondaire» gehaltenen Vortrages «Ausgewählte Probleme aus der Theorie der konvexen Körper» dar.

[2]) W. BLASCHKE, Eine Frage über konvexe Körper, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, *25*, 1916.

tatsächlich besteht, lehrt etwa das folgende Beispiel: A sei ein Kappenkörper der Einheitskugel mit einer Kappe vom halben Öffnungswinkel α und B ein ebensolcher mit zwei Kappen vom halben Öffnungswinkel β (vgl. Figur 1). Wählt man

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}; \quad \sin\beta = \frac{9-\sqrt{17}}{8},$$

so zeigt die Durchrechnung, die wir dem Leser überlassen müssen, daß die beiden Körper A und B gleiches Volumen, gleiche Oberfläche und gleiches Integral der mittleren Krümmung aufweisen.

Der Menge aller konvexen Körper entspricht auf Grund der eingeführten Abbildung eine Menge T von Punkten im positiven Quadranten $x \geqq 0$; $y \geqq 0$ der Diagrammebene. T ist jedenfalls ein Kontinuum. Da man beispielsweise durch die Minkowskische Linearkombination zwei beliebige konvexe Körper in stetiger Weise ineinander überführen kann, muß T zusammenhängend sein. Wie weiter aus dem bekannten Auswahlsatz von W. BLASCHKE[1]) folgt, ist T abgeschlossen.

Aus Gründen, die uns weiter unten klar werden, gruppieren wir die bis heute bekannten Ungleichungen, die zwischen den Maßzahlen V, F und M bestehen, in etwas anderer Weise, als dies üblich ist:

Zunächst notieren wir das Ungleichungspaar

$$F^3 - 36\pi V^2 \geqq 0; \tag{I}$$

$$M^2 - 4\pi F \geqq 0. \tag{II}$$

Die erste Relation stellt die berühmte isoperimetrische Ungleichung von H. A. SCHWARZ dar. Die zweite Relation ist die erste Ungleichung von H. MINKOWSKI.

Übertragen wir jetzt die beiden Relationen (I) und (II) in das Diagramm, so ergeben sich die Bedingungen

$$x^3 - y^2 \geqq 0; \tag{Ia}$$

$$1 - x \geqq 0. \tag{IIa}$$

Die drei Linien

$$y = 0; \quad x = 1; \quad y = \sqrt{x^3}$$

schließen somit ein Kurvendreieck ABC (vergleiche Figur 2) ein, das die Menge T vollständig enthalten muß.

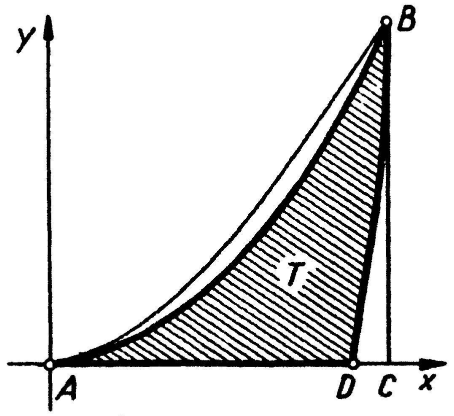

Fig. 2

1) W. BLASCHKE, Kreis und Kugel, Leipzig 1916, Paragraph 18.

Wir überprüfen jetzt die Zugehörigkeit der Punkte der angegebenen Umgrenzung zur Menge T. Hierbei stellen wir folgendes fest: a) Von AB gehören nur die Endpunkte A und B zu T; b) von BC gehört nur der Endpunkt B zu T; c) von AC gehört die Strecke AD der Länge $8/\pi^2$ zu T. Markante Punkte, die zu T gehören, sind demnach: a) Der Punkt $A(0,0)$, der den Strecken (uneigentliche konvexe Körper) entspricht; b) der Punkt $B(1,1)$, der den Kugeln zugeordnet ist; c) der Punkt $D(8/\pi^2, 0)$, der den Kreisscheiben (uneigentliche konvexe Körper) zugehört. – Diese Feststellungen ergeben sich im Hinblick auf die folgenden Tatsachen: In der Ungleichung (I) kann das Gleichheitszeichen nur dann gelten, wenn der Körper eine Kugel oder auch wenn er eine Strecke ist. In Ungleichung (II) kommt das Gleichheitszeichen dagegen nur für die Kugel in Betracht.

Den Punkten der x-Achse entsprechen die ebenen konvexen Bereiche. In diesem Falle hat aber die (zweidimensionale) isoperimetrische Ungleichung zu gelten, wonach

$$l^2 - 4\pi f \geqq 0$$

ist; hierbei bezeichnen f den Flächeninhalt und l die Randlänge des genannten ebenen Bereiches. Nun ist

$$V = 0; \quad F = 2f; \quad M = \frac{\pi}{2} l,$$

so daß nun die Bedingungen

$$y = 0; \quad 0 \leqq x \leqq \frac{8}{\pi^2}$$

gefolgert werden.

Überblicken wir nun die Verhältnisse und ziehen wir weiter die Abgeschlossenheit der Menge T in Betracht, so schließen wir, daß es erstens eine von A nach B hinführende Randkurve geben muß, die im Kurvendreieck nach innen eingebuchtet sein wird, und daß zweitens eine ebensolche Randkurve von D nach B führt. Diese effektiven Ränder der Menge T müssen durch realisierbare konvexe Körper geliefert werden. Die erste begrenzende Körperschar muß die Strecken und die Kugeln enthalten, die zweite dagegen die Kreisscheiben und die Kugeln.

Von diesen beiden Rändern ist nun in der Tat der erste, das heißt der linke von A nach B hinführende Rand bekannt. Er wird durch die zweite Ungleichung von H. MINKOWSKI

$$F^2 - 3MV \geqq 0 \tag{III}$$

geliefert. Wie bereits MINKOWSKI erkannte, gilt in (III) das Gleichheitszeichen für die Kappenkörper der Kugel (vergleiche auch Figur 1). Die Vermutung MINKOWSKIS, daß diese Körper die einzigen dieser Art seien, konnte erst vor einigen Jahren von G. BOL[1]) bestätigt werden. Beachte, in welcher Weise die Kappenkörper der Kugel eine interpolierende Schar zwischen Strecke und Kugel darstellen.

Die Übertragung der Relation (III) in das Diagramm lautet

$$x^2 - y \geqq 0. \tag{IIIa}$$

[1]) G. BOL, Beweis einer Vermutung von Minkowski, Abhandlung aus dem Mathematischen Seminar der Hansischen Universität, 15, 1943.

Die begrenzende «Kappenkörperkurve», deren Gleichung also

$$y = x^2$$

lautet, ist etwas stärker nach innen gekrümmt (vergleiche Figur 2) als die «isoperimetrische Kurve». In der Tat läßt sich die zweite Minkowskische Ungleichung (III) als Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung (I) auffassen, indem sie durch eine geeignete algebraische Umformung auf die Gestalt

$$F^3 - 36\,\pi\, V^2 \geqq \frac{9\,V^2}{F}\,(M^2 - 4\,\pi\, F) \qquad \text{(III*)}$$

gebracht werden kann.

Es ist nun ohne weiteres klar, daß in analoger Weise eine weitere Ungleichung

$$? \geqq 0 \qquad \text{(IV)}$$

neben (III) bestehen muß, die ihrerseits eine Verschärfung der Art

$$M^2 - 4\,\pi\, F \geqq\, ? \qquad \text{(IV*)}$$

sein wird. Das Gleichheitszeichen in (IV) hat für eine Körperschar zu gelten, die eine interpolierende Schar zwischen Kreisscheibe und Kugel darstellt und die also die rechte von D nach B führende Randkurve liefert.

Die in verschiedener Hinsicht plausible Annahme, daß diese Körperschar durch die Parallelkörper des Kreises, durch die Torotope, geliefert werde, stellte eine Vermutung von W. BLASCHKE dar, die sich aber später als unrichtig erwies. Es gibt Körper, deren Diagrammpunkte auf der rechten Seite der durch die kubische Gleichung

$$(\pi^2 - 8)^3\,(2 - 3\,x + y)^2 - 4\,\pi^2\,(12 - \pi^2)^2\,(1 - x)^3 = 0$$

dargestellten «Torotopkurve» liegen. Dies trifft beispielsweise zu für die Halbkugel, für welche

$$x = \frac{48}{(4+\pi)^2}\,; \qquad y = \frac{256}{(4+\pi)^3}$$

ist.

Zahlreiche Anstrengungen, diese fehlende Randkurve beziehungsweise die fehlende Ungleichung (IV) aufzufinden, verliefen bisher ohne Resultat.

H. HADWIGER, Bern.

Geradstellen ebener Kurven

Aus didaktischen Gründen, aber auch aus Gründen mathematischer Sauberkeit scheinen mir, wenigstens für die Schule, die üblichen Krümmungsbegriffe für ebene Kurven einer zielbewußten, wenn auch einschränkenden Klarstellung zu bedürfen. Zur Rechtfertigung meines Unterfangens müßte ich korrekterweise diese Begriffe, wie sie in der Literatur oder in anerkannt guten Lehrbüchern geboten werden, einer umfassenden Analyse kritisch unterziehen. Ich möchte mich jedoch lediglich mit wenigen kontrollierbaren Feststellungen begnügen, die ich mit Absicht Hochschulbüchern entnehme.