

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 2 (1947)  
**Heft:** 5

**Rubrik:** Literaturüberschau

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 01.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

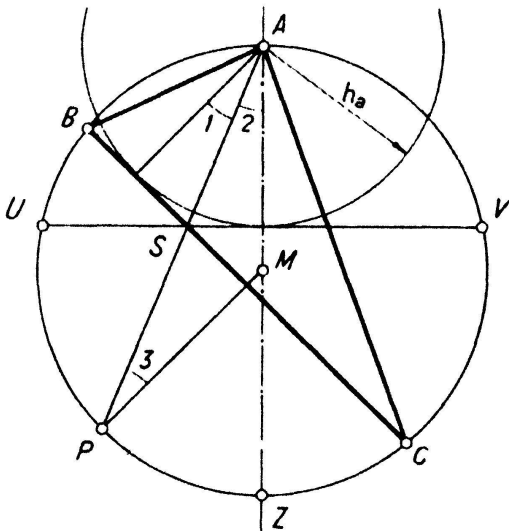
di ottavo ordine fa parte l'asse centrale  $O_1O_2$  di  $K_1$  et  $K_2$  contato 4 volte; onde si conclude che il luogo richiesto del centro di  $K$  è una quartica.

Tale quartica è interessante sotto vari aspetti: e sarà oggetto di studio in un articolo a parte.

NORA CATTANEO, Lugano.

**Aufgabe 21.** Man konstruiere ein Dreieck aus einer Höhe, dem Umkreisradius und dem Inkreisradius.

VIKTOR KRAKOWSKI.



**Lösung:** Schlage um  $A$  den Kreis mit dem Radius  $h_a$  und ziehe an diesen die Tangente  $UV$ , die senkrecht zum Durchmesser  $AZ$  steht. Ziehe die Sehne  $AP$  durch den Schnittpunkt  $S$  von  $BC$  und  $UV$ . Nun ist

$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ , weil  $BC$  und  $UV$  Tangenten an denselben Kreis sind,

$\sphericalangle 3 = \sphericalangle 2$ , weil das  $\triangle PAM$  gleichschenkelig ist; demnach

$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$ ; d. h.  $MP$  steht senkrecht auf  $BC$  und  $AP$  ist folglich Winkelhalbierende von  $\triangle ABC$ . Daraus folgt, daß der Inkreis von  $\triangle ABC$  auch  $UV$  berührt.

Aus der Umkehrung des Satzes von EULER über den Zentralabstand von In- und Umkreis des Dreiecks folgt, daß es ein Dreieck mit der Grundlinie  $UV$  gibt, das mit dem  $\triangle ABC$  Um- und Inkreis gemeinsam hat. Das Zentrum sei-

nes Inkreises liegt auf dem Kreis um  $Z$  durch  $U$  und  $V$ .

Hieraus ergibt sich die folgende einfache Konstruktion:

Zeichne den Umkreis und wähle darauf  $A$ . Bestimme die Punkte  $U$  und  $V$ . Das Zentrum des Inkreises liegt im Schnitt des Kreises um  $Z$  durch  $U$  und  $V$  mit der Parallelen zu  $UV$  im Abstand  $\rho$  nach der Seite, auf der  $A$  liegt. Schluß der Konstruktion und Diskussion sind selbstverständlich.

WILLI LÜSSY, Winterthur.

Rechnerische Lösungen, die einen leicht konstruierbaren Ausdruck für eine Seite oder eine andere geeignete Größe im Dreieck liefern, teilten L. KIEFFER (Luxembourg) und A. AESCHLIMANN (Burgdorf) mit.

## Literaturüberschau

J. G. VAN DER CORPUT:

On sets of integers, I. Indagationes Mathematicae 9, 159–168 (1947).

In unserem Bericht über den Begriff der Dichte einer Folge natürlicher Zahlen<sup>1)</sup> wurde darauf hingewiesen, daß für die Dichte  $\gamma$  der Summenfolge  $A + B$  der Folgen  $A, B$  mit den Dichten  $\alpha, \beta$  vermutlich gilt  $\gamma \geq \alpha + \beta$ . Inzwischen ist bekannt geworden, daß ein erster Beweis dieser berühmten Hypothese schon 1942 in Amerika von H. B. MANN<sup>2)</sup> gefunden wurde. Verbesserte Beweisanordnungen gaben E. ARTIN und P. SCHERK sowie F. J. DYSON. Aber erst die Darstellung VAN DER CORPUTS gestattet einen Überblick über den Beweis.

Zu  $A\{a_i\}$  und  $B\{b_i\}$  werde  $a_0 = 0$  resp.  $b_0 = 0$  hinzugefügt, so daß  $A + B$  aus allen  $a_i + b_k$  besteht.  $A(m), B(m), (A + B)(m)$  bedeute hingegen nur die Anzahl der positiven  $x \leq m$  in  $A, B, A + B$ . Die Hypothese folgt dann sofort aus dem schärferen Satz:

Gibt es ein natürliches  $g$  (Länge der Folge), so daß für jedes natürliche  $m \leq g$   $A(m) + B(m) \geq \gamma m$  ( $\gamma \leq 1$ ), so gilt auch

$$(A + B)(m) \geq \gamma m.$$

<sup>1)</sup> El. math. I (1946), S. 57–60.

<sup>2)</sup> Vgl. die Literaturangaben in der referierten Arbeit.

Der Beweis ergibt sich direkt aus der Existenz einer Kette von Transformationen  $T_r$ :

$$A_r\{a_i^{(r)}\}, B_r\{b_i^{(r)}\} \rightarrow A_{r+1}\{a_i^{(r+1)}\}, B_{r+1}\{b_i^{(r+1)}\}$$

( $r = 0, 1, 2, \dots, A_0 = A, B_0 = B$ ) mit folgenden Eigenschaften:

- I. Aus  $A_r(m) + B_r(m) \geq \gamma m$  folgt  $A_{r+1}(m) + B_{r+1}(m) \geq \gamma m$  für  $m \leq g$ .
- II.  $(A_r + B_r)(m) \geq (A_{r+1} + B_{r+1})(m)$ .
- III. Es gibt ein  $t$  mit  $B_t = \{0\}$ , d. h.  $A_t(m) + B_t(m) = A_t(m)$ .

Zur Veranschaulichung von  $T_r$  versehen wir alle  $a_i^{(r)}$  in der Reihe  $0, 1, 2, 3, \dots, g$  mit einem Stern und ordnen auch  $B_r$  eine solche Reihe zu. Diese Reihen  $R_A$  und  $R_B$  werden so aufeinandergelegt, daß  $b_0^{(r)} = 0$  über  $a_r^{(r)}$  liegt.  $A_{r+1}$  und  $B_{r+1}$  entstehen nun, indem jeder Stern von  $R_B$ , der nicht über einem Stern von  $R_A$  liegt, auf die unter ihm liegende Zahl von  $R_A$  fällt oder in Wegfall kommt.

$$\begin{array}{cccccccccc} B_1: & & 0^* & 1 & 2 & 3^* & 4 & 5^* & 6 & 7^* & 8 & 9 \\ A_1: & 0^* & 1 & 2 & 3^* & 4 & 5^* & 6 & 7^* & 8 & 9^* \end{array}$$

Die Figur zeigt für  $A\{0, 3, 5, 7\}$  und  $B\{0, 3, 5, 7, 9\}$ ,  $g = 9$ , die Entstehung von  $A_2\{0, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$  und  $B_2\{0\}$ .

Offenbar ist III erfüllt. II folgt daraus, daß jedes  $a_i^{(r+1)} + b_k^{(r+1)}$  in  $A_r + B_r$  ist, denn wenn  $a_i^{(r+1)}$  nicht in  $A_r$  liegt, so ist  $a_i^{(r+1)} = a_r^{(r)} + b_p^{(r)}$  und  $a_r^{(r)} + b_k^{(r+1)}$  ist in  $A_r$ , weil sonst  $b_k^{(r+1)}$  nicht mehr Element von  $B_{r+1}$  wäre.

$T_r$  kann in (endlich viele) «elementare» Transformationen (e. T.) zerlegt werden, bei denen jeweils höchstens ein  $b^{(r)}$  aus  $B_r$  verschwindet.  $a_r^{(r)}$  ist dabei für alle  $b^{(r)}$  das kleinste Element von  $A_r$ , so daß  $a_r^{(r)} + b^{(r)}$  nicht in  $A_r$  liegt. I ist sogar bei jeder e. T. richtig. Wir nehmen zum indirekten Beweis an, daß I für alle Folgen einer Länge  $\leq k - 1 \leq g - 1$  bei jeder e. T. gilt, während  $A_{r+1}(k) + B_{r+1}(k) < \gamma k$ . Dann ist  $a_r^{(r)} + b^{(r)} > k$ , also  $a_r^{(r)} > k - b^{(r)}$ . Wenn man von  $A_r$  und  $B_r$  nur die Teilstücke  $A'_r$  und  $B'_r$  der Länge  $k - b^{(r)}$  betrachtet und aus  $B'_r$  alle Elemente entfernt, die für das Bestehen der Ungleichungen  $A'_r(m) + B'_r(m) \geq \gamma m$  ( $m \leq k - b^{(r)}$ ) nicht notwendig sind, so erkennt man, daß  $B'_r(k - b^{(r)}) = 0$ . Denn der Stern eines positiven Elementes aus  $B'_r$  würde bei einer späteren e. T. außerhalb  $A'_r$  fallen und hätte also schon anfangs entfernt werden müssen, weil I hier nach Voraussetzung gilt. Hieraus folgt

$$A'_r(k - b^{(r)}) = A_r(k - b^{(r)}) \geq \gamma(k - b^{(r)}).$$

Für alle positiven  $a^{(r)} \leq k - b^{(r)} < a_r^{(r)}$  liegt  $a^{(r)} + b^{(r)} \geq b^{(r)} + 1$  in  $A_r$ , so daß, weil auch  $b^{(r)}$  zu  $A_r$  gehört,

$$A_r(k) - [1 + A_r(b^{(r)} - 1)] \geq A_r(k - b^{(r)}) \geq \gamma(k - b^{(r)}). \tag{1}$$

Aus I folgt wegen  $b^{(r)} \leq k$  und  $A_{r+1}(m) = A_r(m)$  für  $m \leq k < a_r^{(r)} + b^{(r)}$

$$A_r(b^{(r)} - 1) + B_{r+1}(b^{(r)} - 1) \geq \gamma(b^{(r)} - 1). \tag{2}$$

Durch Addition von (1) und (2) ergibt sich

$$A_{r+1}(k) + B_{r+1}(k) \geq A_r(k) + B_{r+1}(b^{(r)} - 1) \geq \gamma(k - b^{(r)}) + 1 + \gamma(b^{(r)} - 1) \geq \gamma k,$$

im Widerspruch zur Annahme.

ERNST TROST, Zürich.

*Extrait d'une lettre de M. Kollros à M. Lüssy*

A propos de la «Trigonométrie» de MM. PAULI et POST, vous rappelez dans le dernier numéro des «Elemente» la phrase qui terminait ma conférence de 1938. Le lecteur

pourrait croire ainsi à une opposition entre les auteurs et moi. Or M. PAULI m'a montré le manuscrit avant l'impression et je l'ai approuvé sans réserve.

Ce que je voulais éviter après mon exposé de Lucerne, c'est que certains maîtres se croient obligés d'ajouter encore un chapitre au programme déjà trop chargé du Gymnase sous la forme d'une discipline nouvelle.

Mais je conseille depuis longtemps de faire un emploi judicieux des premiers éléments du calcul vectoriel dans un but de concision et de simplification, sans toutefois négliger la méthode cartésienne; elle a ses avantages incontestables et on ne peut en général terminer un problème concret sans revenir aux coordonnées.

Si le calcul vectoriel se répand de plus en plus dans le sens d'une simplification des programmes, j'en serai très heureux. L. KOLLROS.

HENRI KREIS:

*Lineare Abhängigkeit und Äquivalenz von Punktsystemen*

Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker.

46. Band. Bern 1946. S. 169–186.

Zur Untersuchung der Frage, ob zwischen zwei Merkmalen  $x$  und  $y$  eine Abhängigkeit bestehe, bedient man sich u. a. des Korrelationskoeffizienten  $C$ . Werden die einzelnen Merkmalspaare  $(x_k; y_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , als Punkte in einem rechtwinkligen Koordinatensystem dargestellt, so erhält man eine Punktmenge, die auf ihren funktionalen Zusammenhang zu untersuchen ist. Man legt nun ein zum  $(x; y)$ -System parallel orientiertes  $(\xi; \eta)$ -System durch den Schwerpunkt der Menge, so daß also

$$\sum \xi_k = \sum \eta_k = 0$$

wird, und definiert die sogenannten Streuungen mittelst der Momente zweiter Ordnung:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum \xi_k^2; \quad \sigma_y^2 = \frac{1}{n} \sum \eta_k^2; \quad \sigma_{\xi\eta}^2 = \frac{1}{n} \sum \xi_k \eta_k.$$

Dann ist der Korrelationskoeffizient erklärt als

$$C = \frac{\sigma_{\xi\eta}^2}{\sigma_x \sigma_y}.$$

$|C|$  ist dann und nur dann gleich 1, wenn alle Punkte auf einer Gerade durch den Ursprung liegen; ist  $|C|$  größer als beispielsweise 0,9, so kann daraus geschlossen werden, daß die Punkte «beinahe» auf einer Gerade liegen, d. h. daß  $y$  mit wachsendem  $x$  die Tendenz zu wachsen, bzw. abzunehmen zeigt. Was ist aber zu schließen aus einem Werte  $C = 0,7$ ? Einmal ist zu bemerken, daß  $C$  höchstens etwas über die *lineare* Abhängigkeit der Punktmenge aussagt. Es lassen sich leicht Mengen von Punkten angeben, die auf einer Parabel oder gar auf zwei Geraden liegen, die also eine strenge funktionale Abhängigkeit zeigen, und für die jeder beliebige Wert  $-1 < C < +1$  auftreten kann.  $|C|$  kleiner als beispielsweise 0,9 besagt *nicht mehr*, als daß zwischen den Variablen sicher keine rein lineare Abhängigkeit besteht.

Die Arbeit von KREIS liefert einen wichtigen Beitrag zu dieser Kritik des Korrelationskoeffizienten. Sie verdient es, in den «Elementen» angezeigt zu werden, weil sie mit durchaus elementaren Mitteln einen oft mißbrauchten Begriff zu klären hilft.

Es wird gezeigt: Zu jedem ebenen Punktsystem läßt sich auf unendlich viele Arten ein äquivalentes Punkttripel angeben, das mit dem vorgelegten System nicht nur den Korrelationskoeffizienten  $C$  gemeinsam hat, sondern auch die beiden Regressionsgeraden, d. h. die Geraden, für die die Summe der Quadrate der Abweichungen in der  $x$ -Richtung, bzw. der  $y$ -Richtung ein Minimum wird. Alle Punkte dieser äquivalenten Tripel liegen auf einer Ellipse, der Äquivalenzellipse, die Regressionsgeraden verbinden die Berührungspunkte der zur  $x$ - bzw.  $y$ -Achse parallelen Tangenten. Diese Ergebnisse werden auf Punktmengen im Raume erweitert, zu denen stets unendlich viele äquivalente Punktequadrupel angegeben werden können, deren geometrischer Ort das Äquivalenzellipsoid ist. WILLI LÜSSY, Winterthur.