Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 2 (1947)
Heft: 6

Artikel: Solution d'un problème de Steiner
Autor: Kollros, Louis
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-12827

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer

El. Math. Band II Nr. 6 Seiten 105–120 Basel, 15. November 1947

Solution d'un problème de Steiner

A la fin de son mémoire fondamental *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander*, STEINER a publié une liste de 85 problèmes (Œuvres complètes t. I, p. 439-458); quelques-uns sont des applications de la théorie qui précède; d'autres sont plus difficiles. Dans sa thèse de doctorat *Sur les 85 problèmes de la dépendance systématique de Steiner* (Impr. Leemann, Zurich 1939), M. AHMED KARAM a constaté que les problèmes 13, 70, 76 et 77 de cette série n'ont pas encore été résolus.

Voici la solution du problème 13:

«Zwei beliebige projektive Strahlenbüschel sind in einer Ebene so zu legen, daß sie entweder
a) die dem Kreise am nächsten kommende Ellipse oder
b) die von der gleichseitigen Hyperbel am meisten abweichende Hyperbel erzeugen.»

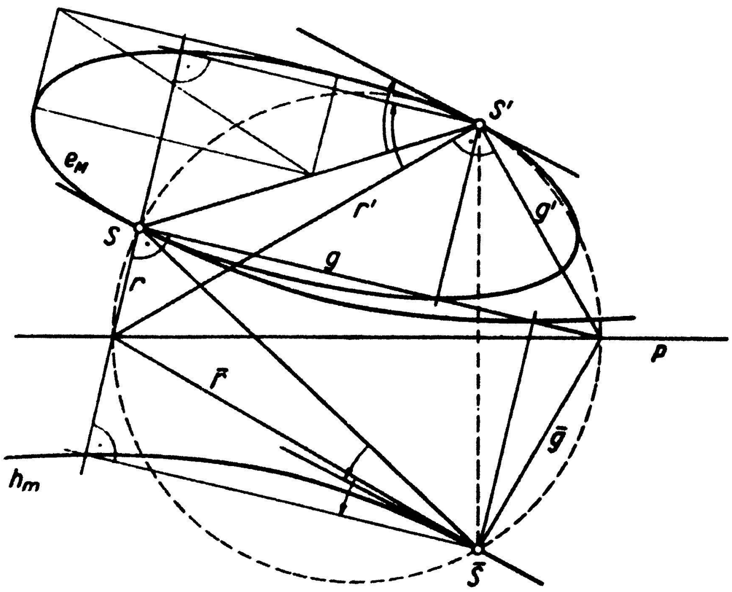

Fig. 1

Soient f et f' les deux faisceaux projectifs, S et S' leurs sommets. Supposons que l'un des faisceaux, f par exemple, soit fixe, et que l'autre f' tourne autour de son sommet S'; dans toutes les positions de f', les deux faisceaux de droites engendrent une conique.

Si f et f' sont directement égaux, toutes ces coniques sont des cercles; si les deux faisceaux sont inversement égaux, les coniques engendrées sont toutes des hyperboles équilatères.

Ces deux cas particuliers étant exclus, plaçons les deux faisceaux en position perspective et soit p l'axe perspectif, lieu des points d'intersection des rayons correspondants de f et f'.

Nous distinguerons deux cas suivant que les sommets S et S' des faisceaux sont du même côté de p ou de part et d'autre de p, comme S et $\bar{S}$ (fig. 1).

Soient (r, g) et (r', g') les deux paires de rayons perpendiculaires de sommets S et S'; $(\bar{r}, \bar{g})$ la paire rectangulaire correspondante du faisceau $\bar{f}$ de sommet $\bar{S}$. Dans les deux cas, on ne peut engendrer qu'une seule hyperbole équilatère; il suffit pour cela de faire tourner le faisceau f' (ou $\bar{f}$) jusqu'à ce que les droites r' et g' (ou $\bar{r}$ et $\bar{g}$) soient respectivement parallèles aux droites fixes r et g qui sont les directions asymptotiques de l'hyperbole équilatère.

Dans le deuxième cas (S et $\bar{S}$), toutes les coniques engendrées (quand le faisceau $\bar{f}$ tourne autour de $\bar{S}$) sont des hyperboles; il y en a une et *une seule* h_m *dont l'angle aigu des asymptotes est minimum.*

Dans le premier cas (S et S'), les deux faisceaux engendrent successivement des hyperboles, deux paraboles et des ellipses parmi lesquelles *une seule* e_M se rapproche le plus du cercle: c'est celle *dont l'angle aigu des diamètres conjugués égaux est maximum.*

Nous démontrerons que *ces deux coniques extrêmes* h_m *et* e_M *s'obtiennent en faisant tourner le faisceau* $\bar{f}$ *(ou* f'*) jusqu'à ce que le rayon* $\bar{r}$ *(ou* r'*) soit perpendiculaire à* r *et par conséquent aussi* $\bar{g}$ *(ou* g'*) perpendiculaire à* g.

On peut le trouver sans calcul à l'aide des deux remarques suivantes:

1. Toutes les coniques engendrées par le faisceau fixe f de sommet S et le faisceau f' tournant autour de S' forment un faisceau ponctuel; elles passent toutes par les quatre

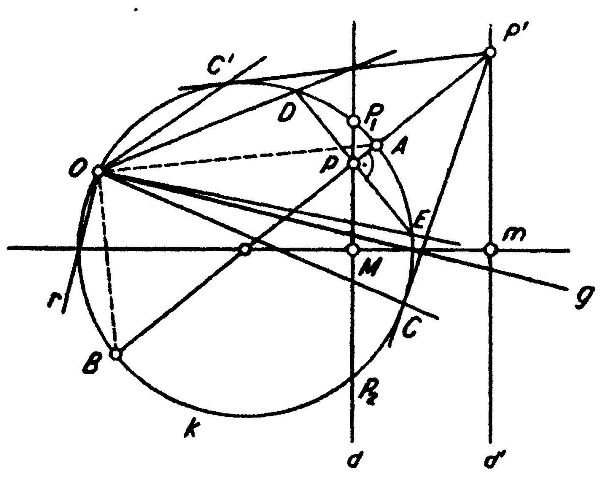

Fig. 2

points S, S' et les deux points d'intersection de l'axe perspectif p avec les deux droites isotropes de S', puisque ces dernières restent fixes pendant la rotation du faisceau f'.

2. Si par un point quelconque O d'un cercle k (fig. 2) on mene des parallèles à toutes les paires de diamètres conjugués d'une conique, on détermine sur k des cordes qui passent par un point P, pôle de l'involution sur k des extrémités de ces cordes. A chaque conique de notre faisceau ponctuel correspond ainsi un point P et inversement. Les directions OA et OB des axes de la conique se trouvent en joignant O aux extrémités A et B du diamètre de k passant par P. Suivant que P est à l'intérieur, à l'extérieur ou sur la circonférence du cercle k, la conique est une ellipse, une hyperbole ou une parabole. Les droites joignant O aux points de contact des tangentes à k menées par le point extérieur P' donnent les directions asymptotiques de la conique correspondante.

Quand la conique varie dans le faisceau, le point P décrit une *droite* d, car les parallèles par O aux asymptotes des coniques d'un faisceau ponctuel coupent le cercle k en des paires de points CC' d'une involution; les cordes CC' passent donc par un point dont la polaire d est le lieu des points P.

Au point à l'infini de d correspond la seule hyperbole équilatère du faisceau; les directions de ses asymptotes sont r et g (fig. 2).

Si d *ne coupe pas* le cercle k, toutes les coniques du faisceau sont des hyperboles; c'est le cas des courbes engendrées par les faisceaux S et $\bar{S}$. Pour le point P', les directions asymptotiques sont OC et OC'. L'angle aigu des asymptotes est minimum quand le point variable sur d vient en m, pied de la perpendiculaire abaissée du centre de k sur la droite d. A ce point m correspond l'hyperbole h_m qui diffère le plus de l'hyperbole équilatère; on voit que ses axes sont parallèles aux directions asymptotiques r et g de l'hyperbole équilatère du faisceau.

Si, au contraire, la droite d *coupe* le cercle k en deux points réels P_1 et P_2, le faisceau de coniques se composera d'hyperboles, d'ellipses et des deux paraboles correspondant aux points P_1 et P_2. Au point intérieur P correspond une ellipse dont OA et OB sont les directions des axes (fig. 2); si la corde DE est perpendiculaire au diamètre AB, les droites OD et OE (qui font des angles égaux avec OA et OB) sont les directions des diamètres conjugués égaux de l'ellipse. L'angle aigu de ces diamètres conjugués égaux est maximum quand le point variable de la droite d vient au milieu M de la corde $P_1 P_2$; c'est aussi l'angle des directions OP_1 et OP_2 des axes des deux paraboles du faisceau. A ce point M correspond l'ellipse e_M la plus rapprochée du cercle, celle dont le rapport $b:a$ des axes est le plus grand possible; ses axes sont parallèles aux asymptotes r et g de l'hyperbole équilatère du faisceau. Les tangentes à cette ellipse e_M en S' et S (fig. 1) font avec la droite SS' l'angle complémentaire de l'angle (r, r').

A deux points de la droite d symétriques par rapport à M correspondent des coniques semblables entre elles, mais pas homothétiques. Le faisceau ponctuel se compose donc d'une infinité de paires de coniques semblables, parmi lesquelles la paire de paraboles. Mais il n'y a qu'une seule hyperbole équilatère et une seule conique extrême: l'ellipse e_M du faisceau (S, S') et l'hyperbole h_m du faisceau $(S, \bar{S})$.

LOUIS KOLLROS, Zurich.