Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 4 (1949)

Heft: 1

Artikel: Quelques considérations sur les sphères

Autor: Sydler, J.-P.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14313

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer

El. Math. Band IV Nr. 1 Seiten 1–24 Basel, 15. Januar 1949

Quelques considérations sur les sphères

Dans le fascicule III, n° 2, des *Elemente der Mathematik*, M. LONGHI a proposé le problème 32 dont la résolution nous a conduit aux quelques considérations suivantes; nous les exposons dans l'espace ordinaire, mais elles valent sans autre pour un espace de dimension quelconque.

1° – Nommons chaîne orthogonale une suite de sphères dont chacune est orthogonale à la suivante. Nous dirons qu'une chaîne varie quand, les centres des sphères restant fixes, les rayons varient de façon à conserver l'orthogonalité.

Soient *1, 2, 3,* ... les sphères d'une chaîne orthogonale, P_1, P_2, P_3, ... leurs centres. P_2 ayant même puissance par rapport à *1* et à *3*, le plan radical de *1* et *3* passe par P_2 et est perpendiculaire à P_1P_3. Il est donc fixe pour toute variation de la chaîne. Comme le plan radical de *3* et *5* est aussi fixe, il en est de même du plan radical de *1* et *5* qui passe par l'intersection des deux plans précédents. Les éléments radicaux de tous les anneaux impairs d'une chaîne orthogonale restent fixes.

Soient quatre chaînes orthogonales ayant le même anneau initial: *1, 2, 3*; *1, 2', 3'*; *1, 2'', 3''*; *1, 2''', 3'''*. En considérant la chaîne *3–2–1–2'–3'*, on voit que le plan radical de *3* et *3'* reste fixe, de même que celui de *3* et *3''*, *3* et *3'''*, donc aussi le centre radical de *3, 3', 3'', 3'''*. D'autre part, le point P_1 est le centre radical de *2, 2', 2'', 2'''*. Donc si quatre chaînes orthogonales ayant chacune un nombre pair d'anneaux varient de façon à laisser fixe le centre radical P_1 des premiers anneaux, le centre radical P_4 des derniers anneaux reste fixe. La correspondance P_1P_4 ne dépend que des centres des sphères; elle est birationnelle et sans points singuliers; c'est donc une collinéation. A un point P_1 à l'infini correspond un point P_4 à l'infini; cette correspondance est donc *une affinité générale.* (Remarquons que nous avons implicitement admis que les points P_2, ..., P_2''' et P_3, ..., P_3''' étaient en position générale.)

2° – Le plan radical de *1* et *3* passe par P_2; les sphères *1* et *3* se coupent sur ce plan. On a ainsi la solution du problème proposé: *Etant donnés les points* P_2, P_2', P_2'', P_2''' *et les sphères 3, 3', 3'', 3''', mener par* P_2, ..., P_2''' *des plans a, a', a'', a''' qui coupent respectivement 3, ..., 3''' suivant des cercles situés sur une sphère 1.* Il suffit de mener les sphères *2, 2', 2'', 2'''* de centres P_2, ..., P_2''' orthogonales à *3, ..., 3'''*. La sphère cherchée est la sphère orthogonale à ces quatre sphères *2, ..., 2'''*.

3° – Si l'on ne se donne que les points P_2, ..., P_2''', P_3, ..., P_3''', on définit une correspondance P_1P_4; cette affinité n'a qu'un point double dans le fini, P. Soient r_1, r_2, r_3, r_4 les rayons des sphères *1, 2, 3, 4* dans une chaîne orthogonale quelconque de centres P, P_2, P_3, P, d_1, d_2, d_3 les distances PP_2, P_2P_3, P_3P. Comme $d_i^2 = r_i^2 + r_{i+1}^2$, on a $r_1^2 + r_4^2 = d_1^2 - d_2^2 + d_3^2$. Il y a une seule valeur positive $r_1 = r_4$. Nous avons la nouvelle propriété suivante: *Etant donnés les points $P_2, \ldots, P_2''', P_3, \ldots, P_3'''$, il existe une et une seule sphère 1, un seul système de sphères 2, ..., 2''', 3, ..., 3''' centrées en $P_2 \ldots, P_3'''$ telles que 2 et 3, ..., 2''' et 3''' soient orthogonales et que 2, ..., 3''' soient orthogonales à 1.* Les plans radicaux $a, \ldots, a'''$ de *1* et *3, ..., 3'''* passent par $P_2, \ldots, P_2'''$; les plans radicaux $b, \ldots, b'''$ de *1* et *2, ..., 2'''* passent par $P_3, \ldots, P_3'''$. Ajoutons encore les sphères $c, \ldots, c''', d, \ldots, d'''$ de diamètres $PP_2, \ldots, PP_2''', PP_3, \ldots, PP_3'''$. Nous obtenons ainsi une configuration transformée en elle-même par une inversion relative à la sphère *1*; cette transformation permute simplement a et d, b et c. Soient O le centre de la sphère $P_2P_2'P_2''P_2'''$, O' celui de la sphère $P_3P_3'P_3''P_3'''$. Les centres des sphères c sont sur une sphère centrée sur PO. L'inversion transforme ces points dans les symétriques de P par rapport aux plans $b, \ldots, b'''$. Par suite, les pieds des perpendiculaires abaissées de P sur les plans b sont sur une sphère centrée sur PO. Par conséquent, *les plans $b, \ldots, b'''$ sont tangents à une quadrique de révolution de foyer principal P et d'axe PO*; les plans $a, \ldots, a'''$ à une quadrique de foyer P et d'axe PO'.

4° – En considérant maintenant quatre chaînes orthogonales de centres $P_2, P_3, P_4, P_5; \ldots; P_2''', P_3''', P_4''', P_5'''$, on obtient aussi une et une seule sphère *1* qui les ferme. Les plans radicaux $a, \ldots, a''', b, \ldots, b'''$ de *1* et *3, ..., 3''', 4, ..., 4'''* passent respectivement par $P_2, \ldots, P_2''', P_5, \ldots, P_5'''$. Par conséquent:

Etant donnés les points $P_2, P_3, P_4, P_5; \ldots; P_2''', P_3''', P_4''', P_5'''$, il existe une et une seule sphère 1, et un seul système de sphères 3, ..., 3''', 4, ..., 4''' centrées en $P_3, \ldots, P_3''', P_4, \ldots, P_4'''$, un et un seul système de plans $a, \ldots, a''', b, \ldots, b'''$ passant respectivement par $P_2, \ldots, P_2''', P_5, \ldots, P_5'''$ et tels que: 3 et 4, ..., 3''' et 4''' soient orthogonales et que les huit cercles d'intersection de a et 3, ..., b''' et 4''' soient sur la sphère 1.

Remarquons que l'orthogonalité de *3* et *4* pourrait être remplacée par une relation $r_3^2 + r_4^2 = h^2$; il suffirait d'introduire entre *3* et *4* deux sphères s et s' de centres S et S' telles que: *3* et s, s et s', s' et *4* soient orthogonales et, si f_1, f_2, f_3 désignent les longueurs P_3S, SS', $S'P_4$, on ait $f_1^2 - f_2^2 + f_3^2 = h^2$.

5° – Reprenons les chaînes orthogonales *1, 2, 3, 4; 1, 2', 3', 4; 1, 2'', 3'', 4; 1, 2''', 3''', 4*; les plans radicaux $a, \ldots, a'''$ de *1* et *3, ..., 3'''* déterminent un tétraèdre de sommets $A, \ldots, A'''$ tel que P_4A est perpendiculaire à $P_3P_3'P_3''P_3'''$, etc. D'autre part, P_1P_3 est perpendiculaire à $A'A''A'''$ (plan radical de *1* et *3*). Donc: *Si deux tétraèdres $(AA'A''A''') = (A)$ et $(P_3P_3'P_3''P_3''') = (P)$ sont tels que les perpendiculaires abaissées des sommets de (A) sur les faces de (P) concourent en un point P_4, les perpendiculaires abaissées des sommets de (P) sur les faces de (A) concourent en un point P_1.*

Dans le cas particulier où $P_1 = P_4 = P$, on obtient la solution du problème suivant: *Etant donnés deux tétraèdres $(P_2, \ldots, P_2''') = (P_2)$* et *$(P_3, \ldots, P_3''') = (P_3)$, trouver un point P et deux tétraèdres (A) et (B) tels que: Les droites PA soient perpendiculaires aux faces de (P_3), PB aux faces de (P_2), PP_2 aux faces de (A), PP_3 aux faces de (B) et que (A) soit circonscrit à (P_2), (B) circonscrit à (P_3).*

6° – Tous nos théorèmes subsistent encore dans les cas particuliers où $P_2, \ldots, P_2'''$ ou $P_3, \ldots, P_3'''$ sont dans un plan; $P_2, \ldots, P_2'''$ et $P_3, \ldots, P_3'''$ sont chacun dans un plan et même si $P_2, \ldots, P_2'''$ ou $P_3, \ldots, P_3'''$ sont sur une droite.

Si les points P_2, P_2', P_2'', P_2''' sont dans un plan, les points P_3, P_3', P_3'', P_3''' étant quelconques, à un point P_1 correspond bien un point P_n, mais tous les points P_1 situés sur la même perpendiculaire au plan $P_2, \ldots, P_2'''$ donnent le même point P_n. Il y a correspondance biunivoque entre les points R_1 du plan $P_2, \ldots, P_2'''$ et les points P_n qui parcourent donc une surface. A un axe radical a des sphères 2, $2'$, $2''$, $2'''$ qui passe par R_1 correspondent: un axe radical a' des sphères 3, $3'$, $3''$ et un axe radical a'' des sphères $3'$, $3''$, $3'''$. a' et a'' ne dépendent que du point R_1 et se coupent toujours au centre radical de 3, $3'$, $3''$, $3'''$. Le lieu du point P_n est donc le lieu des points d'intersection de deux gerbes perspectives (à un rayon à l'infini correspondant un rayon à l'infini) et le lieu de P_n est un plan π.

A tout point P_1^* de π correspond un point P_n de π et inversement. La correspondance $P_1^* P_n$ est une affinité qui n'a qu'un point double dans le fini, $P_1^* = P_n$; c'est aussi le seul point double $P_1 = P_n$.

Si les points $P_2, \ldots, P_2'''$ sont sur une droite, à tous les points P_1 situés dans un plan perpendiculaire à cette droite correspond le même point P_n dont le lieu est une droite sur laquelle il n'y a qu'un point de coïncidence $P_1 = P_n$ dans le fini.

Si les points $P_2, \ldots, P_2'''$ sont dans un plan et les points $P_3, \ldots, P_3'''$ dans un autre plan, à un axe radical a des sphères 2, $2'$, $2''$, $2'''$ correspondent un et un seul axe radical à des sphères 3, $3'$, $3''$ et un et un seul axe radical a'' des sphères $3'$, $3''$, $3'''$; la correspondance $a'a''$, biunivoque, affine, a un seul élément double qui coupe son correspondant a au seul point double $P_1 = P_n$. Nos théorèmes sont donc également valables dans ces cas particuliers.

J.-P. SYDLER, Zurich.

Bemerkung zur elementaren Inhaltslehre des Raumes

Es ist eine bekannte Tatsache, daß sich die Volumformel für ein allgemein gestaltetes Tetraeder leider nicht ohne Grenzprozesse herleiten läßt; die elementare Inhaltslehre des Raumes, das heißt die Lehre der Polyederinhalte, ist im Gegensatz zu derjenigen der Ebene, der Lehre der Polygoninhalte, nicht in endlich geschlossener Form entwickelbar. Dies liegt, wie allgemein bekannt ist, an einem bereits von K. F. GAUSS[1]), später erneut von D. HILBERT[2]) vermuteten Sachverhalt, der erst von M. DEHN[3]) vollständig und exakt als zutreffend nachgewiesen wurde, wonach Tetraeder gleicher Grundfläche und gleicher Höhe existieren, welche nicht «endlich-zerlegungsgleich» sind. Zwei Polyeder heißen «endlich-zerlegungsgleich», wenn sich das eine so in endlich viele Teilpolyeder zerlegen (zerschneiden!) läßt, daß man das andere aus eben diesen Teilpolyedern wieder zusammensetzen kann. – Soll der Nachweis der Volumgleichheit zweier derartiger Tetraeder dadurch geführt werden, daß die beiden Körper in paarweise kongruente Teiltetraeder zerlegt werden, so muß schon eine Zerlegung in abzählbar-unendlich viele Teile ins Auge gefaßt werden.

In der Tat beruht die berühmte Beweisführung des EUKLID[4]) für die Volumgleichheit zweier Pyramiden gleicher Grundfläche und gleicher Höhe letzten Endes auf der

---

[1]) Werke *8*, 241, 244.
[2]) Math. Probleme, Gött. Nachr. 1900, 266.
[3]) Math. Ann. *55*, 465–478 (1901).
[4]) Nach Artikel ZACHARIAS, Encyklopädie III AB. 9, 940–942.