Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 4 (1949)

Heft: 3

Rubrik: Aufgaben

et l'on retrouve une relation connue entre le côté du pentagone et sa diagonale (division en moyenne et extrême raison).

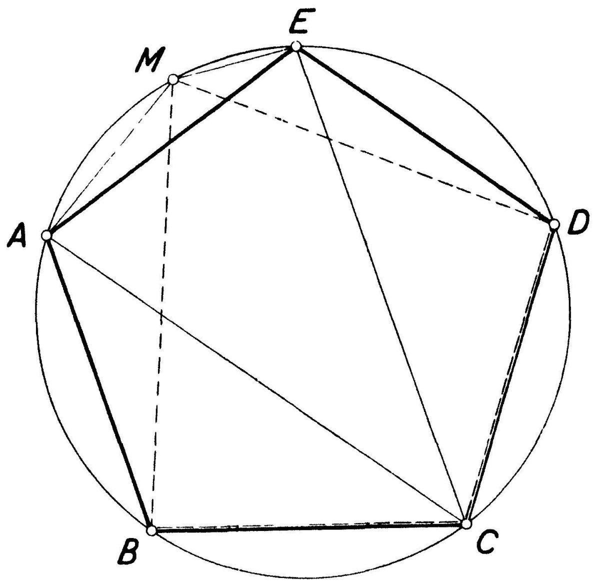
2° — *M est au milieu de AE.* Alors

$$\overline{MA} = \overline{ME} = \text{le côté du décagone régulier convexe;}$$
$$\overline{MB} = \overline{MD} = \text{le côté du décagone régulier étoilé,}$$
$$\overline{MC} = 2\,r \ = \text{le diamètre du cercle circonscrit.}$$

La formule précédente devient:

$$\boxed{r^2 = c_{10\,convexe} : c_{10\,étoilé}}$$

Donc, le rayon du cercle circonscrit à un décagone régulier est moyenne géométrique entre les côtés des polygones convexe et régulier.



Remarque: La méthode précédente peut être appliquée à d'autres polygones que le pentagone régulier. G. Bilger, Genève.

Aufgaben

Aufgabe 34. Man bestimme (ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes) die kleinste Geschwindigkeit (und den entsprechenden Steigungswinkel), mit der eine Kugel geworfen werden muß, damit sie in der Entfernung a eine senkrechte Mauer von der Höhe h gerade überfliegt. E. Rothmund.

Lösung: Die Abwurfstelle A sei Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems, in dem der Zielpunkt Z die Koordinaten $(a,\ h)$ hat. Bedeuten dann t die Zeit, v die Abwurfgeschwindigkeit und φ den Steigungswinkel beim Abwurf, dann gelten die Gleichungen:

$$a = t\,v\cos\varphi, \qquad h = t\,v\sin\varphi - \frac{g}{2}\,t^2.$$

Durch Elimination von t erhält man hieraus

$$h = a\operatorname{tg}\varphi - \frac{a^2 g}{2\,v^2\cos^2\varphi}\,, \tag{*}$$

woraus durch Einführung des Winkels 2φ und leichte Umformung folgt:

$$-h\cos 2\varphi + a\sin 2\varphi = h + g\left(\frac{a}{v}\right)^2.$$

Setzt man nun $a^2 + h^2 = d^2$ und $h/d = \cos 2\bar{\varphi}_0$, $a/d = \sin 2\bar{\varphi}_0$, also $h/a = \operatorname{ctg} 2\bar{\varphi}_0$, so kommt:

$$-\cos 2(\varphi + \bar{\varphi}_0) = \frac{h v^2 + g a^2}{d v^2}.$$

Da die linke Seite nicht größer als 1 sein kann, folgt hieraus: $v^2 \geqq g a^2/(d-h) = g(d+h)$. Es ist also

$$v_0 = \sqrt{g(d+h)}$$

die gesuchte minimale Abwurfgeschwindigkeit. Setzt man noch $\bar{\varphi} = (\pi/2) - \varphi$, so kommt:

$$\cos 2(\bar{\varphi} - \bar{\varphi}_0) = \frac{h v^2 + g a^2}{d v^2}.$$

Da die rechte Seite für $v = v_0$ zu 1 wird, erkennt man, daß die Abwurfrichtung für minimales v durch $\bar{\varphi}_0$ bestimmt wird, und nach der Erklärung von $2\bar{\varphi}_0$ ist dies die Winkelhalbierende zwischen der Vertikalen aufwärts und der Zielgeraden AZ. Außerdem erkennt man, daß es zu jedem $v > v_0$ zwei Abwurfrichtungen gibt, die zu jener Winkelhalbierenden symmetrisch liegen.

Anmerkung: Das eben Gesagte gilt auch für negatives h (z. B. Kugelstoßen). Da sich die kinetischen Energien des Geschosses in A und Z um eine feste Differenz potentieller Energien unterscheiden, müssen die Geschwindigkeiten in Z gleich sein, wenn diejenigen in A gleich sind. Durch Umkehrung des Bewegungssinnes ergibt sich hieraus unmittelbar, daß auch die Ankunftsrichtungen in Z bei gleicher Abwurfgeschwindigkeit symmetrisch sind zur Winkelhalbierenden zwischen der Vertikalen aufwärts und der Richtung ZA. Daraus folgt weiter, daß für minimale Abwurfgeschwindigkeit die Flugrichtungen in A und Z aufeinander senkrecht stehen und somit der Brennpunkt der Flugbahn auf AZ liegt. A. Stoll.

Weitere Lösungen, die auf der Differentiation des sich aus der Gleichung (*) der Wurfparabel für v^2 ergebenden Ausdrucks beruhen, sandten: H. Bieri (Bern), L. Descloux (Fribourg), R. Litschi (Zürich), E. Roth-Desmeules (Luzern), B. Schenker (Fetan).

Aufgabe 39. Die Seiten eines Dreiecks werden in je n gleiche Teile geteilt und die Teilpunkte mit den Gegenecken verbunden. In wieviel Teile wird die Fläche des Dreiecks zerlegt, wenn n Potenz einer ungeraden Primzahl ist? E. Trost.

Lösung: 1. In keinem Punkt außer den Ecken A_1, A_2, A_3 treffen sich mehr als zwei Teilungslinien. Denn wäre P ein solcher «Cevapunkt» und gingen die drei Ecktransversalen $A_i P$ durch die Teilungspunkte mit den Nummern u_i (Numerierung von den Ecken aus in gleichem Umlaufssinn), so wäre

$$u_1 u_2 u_3 = (n-u_1)(n-u_2)(n-u_3),$$

$$2 u_1 u_2 u_3 = n^3 - n^2(u_1+u_2+u_3) + n(u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_3 u_1).$$

Ist nun $\quad u_i = \alpha_i p^{r_i}, \quad \alpha_i \not\equiv 0 \pmod{p}, \quad r_1 \geqq r_2 \geqq r_3, \quad n = p^\lambda, \quad \lambda > r_1,$

so wäre, da $\quad 2\lambda + r_3 > \lambda + r_2 + r_3, \quad u_1 u_2 u_3 \equiv 0 \pmod{p^{\lambda + r_2 + r_3}},$

also $r_1 \geqq \lambda$, was nicht möglich ist.

2. Die Anzahl der Felder berechnet sich nun aus der Eulerschen Gleichung

$$e + f = k + 1, \quad \text{mit} \quad e = 3n + 3(n-1)^2, \quad k = 3n + 3(n-1)(2n-1)$$

$$f = k + 1 - e = \underline{\underline{3n^2 - 3n + 1}}.$$

C. Bindschedler, Küsnacht.

Weitere Lösungen sandten A. STOLL (Zürich) und L. DESCLOUX (Fribourg) ein. A. STOLL gibt als Verallgemeinerung dieser Aufgabe auf den Raum folgendes Resultat: Legt man durch alle sechs Kanten eines Tetraeders je n Schnittebenen, so entstehen maximal $16\,n^3 + 15\,n^2 + 6\,n + 1$ Teile.

Aufgabe 41. Man beweise: Die Koeffizienten $a_k^{(n)}$ in der Summenformel

$$1^n + 2^n + 3^n + \cdots + m^n = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} \binom{m+1}{k+1} k!$$

bilden ein verallgemeinertes «Pascalsches» Dreieck mit den Beziehungen

$$a_{k-1}^{(n-1)} + k\, a_k^{(n-1)} = a_k^{(n)}, \qquad a_1^{(n)} = a_n^{(n)} = 1.$$

E. TROST.

Lösung: Nach der Summenformel für die arithmetische Reihe n-ter Ordnung ist

$$\sum_{p=1}^{m} p^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{m+1}{k+1} \Delta^k 0^n.$$

Ferner gilt die Formel

$$\Delta^k 0^n = k^n - \binom{k}{1}(k-1)^n + \binom{k}{2}(k-2)^n \mp \cdots = k\,(\Delta^k 0^{n-1} + \Delta^{k-1} 0^{n-1}).$$

Setzt man $\Delta^k 0^n = k!\, a_k^{(n)}$ und beachtet, daß $\Delta\, 0^n = 1$, $\Delta^n 0^n = n!$, so ergeben sich sofort die verlangten Beziehungen für die $a_k^{(n)}$. K. RIEDER, Riehen.

H. BURGER (Solothurn) löst die Aufgabe mit einer erzeugenden Potenzreihe, und A. STOLL (Zürich) verwendet den nach einem allgemeinen Satz (vgl. POLYÀ-SZEGÖ, *Aufgaben und Lehrsätze*, Bd. 2, S. 132, Aufgabe 85) möglichen Ansatz

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} k!\, a_k^{(n)} \binom{x}{k}.$$

Er bemerkt dazu: Entwickelt man nach Binomialkoeffizienten mit festem symbolischem Nenner anstatt mit festem symbolischem Zähler, so werden die Koeffizienten symmetrisch:

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)} \binom{x+k-1}{n},$$

$$b_1^{(n)} = b_n^{(n)} = 1, \qquad b_{1+k}^{(n)} = b_{n-k}^{(n)}, \qquad k = 1, \ldots, n-1, \qquad b_k^{(n)} = (n-k+1)\, b_{k-1}^{(n-1)} + k\, b_k^{(n-1)},$$

und außerdem gilt $\sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)} = n!$.

Eine weitere Lösung sandte L. DESCLOUX (Fribourg).

Aufgabe 42. Man ziehe im Dreieck ABC zu BC die Parallele $B'C'$ so, daß sich die Umfänge der Dreiecke $AB'C'$ und ABC verhalten wie der Inhalt des Dreiecks $AB'C'$ zum Inhalt des Trapezes $B'BCC'$.

E. ROTHMUND.

Lösung: Durch die Parallele $B'C'$ ($= a'$) zur Seite BC wird vom Dreieck ABC ein ähnliches Dreieck $AB'C'$ abgeschnitten, dessen Seite AB' ($= c'$) wir berechnen wollen. Wir drücken die drei unbekannten Seiten des Dreiecks $AB'C'$ samt dessen Höhe $h_{c'}$ durch c' aus:

$$h_{c'} = \frac{c'\,h_c}{c}, \qquad a' = \frac{c'\,a}{c}, \qquad b' = \frac{c'\,b}{c}.$$

Nun wird verlangt:

$$c'\left(1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right) : (a+b+c) = \frac{c'^2\,h_c}{2\,c} : \frac{c^2\,h_c - c'^2\,h_c}{2\,c}.$$

Hieraus folgt $\qquad c^2 - c'^2 = c\,c' \qquad$ oder $\qquad c\,(c-c') = c'^2,$

das heißt $c:c' = c':(c - c')$. Die Seite c wird also im Verhältnis des Goldenen Schnittes geteilt. J. SCHNEIDER, Seminar Küsnacht.

Weitere Lösungen gingen ein von L. DESCLOUX (Fribourg), F. GOLDENER (London), L. KIEFFER (Luxemburg), R. LITSCHI (Zürich), A. MARET (Biel), A. SCHWARZ (Seuzach), F. WAGNER (Bregenz).

Neue Aufgaben

60. Lorsqu'on cherche la distribution électrostatique sur un système de n conducteurs métalliques $S_1, S_2, \ldots, S_n$ isolés et portant respectivement des charges données, on est conduit à prendre pour inconnues auxiliaires les potentiels auxquels seront portés ces conducteurs et, en conséquence, à introduire:

Les fonctions $V_1, \ldots, V_n$ harmoniques dans l'espace extérieur E, régulières à l'infini et telles que

$$V_i = \begin{cases} 1, \text{ sur la surface } S_i, \\ 0, \text{ sur les surfaces des autres conducteurs} \end{cases}$$

— puis les coefficients C_{ij} dont chacun représente la charge qui se distribue sur le conducteur S_j sous l'action du champ V_i, c'est-à-dire la quantité

$$-\frac{1}{4\pi} \int\int_{S_j} \frac{dV_i}{dn_e} dS. \qquad (n_e \text{ normale extérieure à } S_j).$$

Cela posé, on demande de démontrer les propositions suivantes:

1° — On a $C_{ij} = C_{ji}$.

2° — Chacun des coefficients C_{ii} est positif, mais tous les autres coefficients C sont négatifs;

3° — Pour chaque valeur de i, la somme $\sum_j C_{ij}$ est positive, c'est-à-dire que C_{ii} est plus grand que la somme des valeurs absolues des C_{ij}, avec $j \neq i$.
(On admettra que, pour a positif et suffisamment petit, l'équation $V_i = a$ est vérifiée le long d'une surface fermée Σ contenant tous les conducteurs à son intérieur et à l'extérieur de laquelle on a $V_i < a$.)

4° — On introduira un $(n+1)$-ième conducteur isolé S_{n+1}. Les coefficients C prennent alors de nouvelles valeurs C'_{ij}. Quels sont les signes des différences $C'_{ij} - C_{ij}$ (principe de la condensation électrique)? J. HADAMARD, Paris.

61. n^2 (n eine natürliche Zahl) kongruente Quadrate seien zu einem größeren Quadrat zusammengefügt. Falls n ungerade ist, sieht man sofort, daß ein durch die n^2 Quadrate hindurchgehender Weg mit folgenden Eigenschaften existiert:

1. Sein Anfangs- und Endpunkt liegen in zwei diagonal gegenüberliegenden kleinen Quadraten.
2. Er geht genau einmal durch das Innere jedes kleinen Quadrates.
3. Der Übergang von einem kleinen Quadrat zum nächsten geschieht stets in einem inneren Punkt der gemeinsamen Seite.

Man beweise, daß kein solcher Weg existiert, falls n gerade ist. W. NEF, Fribourg.

62. Von einer Ellipse sind die Halbachsen a und b gegeben. Man konstruiere mit dem Zirkel allein den Krümmungsradius im Endpunkt der großen Achse.
W. LÜSSY, Winterthur.

63. Die vier Ecken eines regulären Tetraeders von der Kante a sind die Spitzen von vier dem Tetraeder umbeschriebenen Drehkegeln. Man berechne das Volumen des konvexen Körpers, der von den vier Kegeln begrenzt ist.
C. BINDSCHEDLER, Küsnacht.