Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 4 (1949)
Heft: 5

Rubrik: Aufgaben

Auch dieser «S-Weg» hat eine schwache Stelle, nämlich bei $S = s$. Doch dann wird er durch den «P-Weg» trefflich ergänzt – abgesehen von der praktisch höchst unwahrscheinlichen Möglichkeit, daß gleichzeitig $P = p$ und $S = s$ ist. Nun, in solch einem Fall tut sich dies durch bestimmte Beziehungen zwischen den Vorzahlen a bsi d kund, und die Lösung ist dann auf andere Weise immer möglich.

Mit den Werten P, S, p und s ist die Aufgabe praktisch gelöst, denn die vier gesuchten Wurzeln lassen sich nun leicht aus den beiden quadratischen Gleichungen

$$x^2 - S\,x + P = 0 \qquad \text{und} \qquad x^2 - s\,x + p = 0$$

bestimmen. Erst jetzt ergibt sich also der Charakter der Wurzeln, ob reell oder komplex, welche Kenntnis zur Durchführung dieses Näherungsverfahrens somit gar nicht erforderlich ist.

An einem Beispiel sei der Verlauf der Rechnung gezeigt; die fraglichen Wurzelprodukte und -summen mögen etwa auf Tausendstel genau zu bestimmen sein.

$$x^4 + 3\,x^3 + 7\,x^2 + 7\,x + 7 = 0.$$

Mit P beginnend ($d > 0 \ldots P > +\sqrt{d}$):

P	$p = \dfrac{7}{P}$	$s = \dfrac{3p - 7}{P - p}$	$S = -3 - s$	$P + Ss + p - 7$
3	2,33	0	– 3	– 1,67
4	1,75	– 0,78	– 2,22	+ 0,48
3,7	1,892	– 0,732	– 2,268	+ 0,252
3,5	2,000	– 0,667	– 2,333	+ 0,056
3,44	2,035	– 0,637	– 2,363	– 0,020
3,455	2,026	– 0,645	– 2,355	0

Die Ausrechnung der beiden quadratischen Gleichungen $x^2 + 2{,}355\,x + 3{,}455 = 0$ und $x^2 + 0{,}645\,x + 2{,}026 = 0$ liefert nun als Lösung die beiden konjugiert komplexen Wurzelpaare

$$x_{1,2} = -1{,}177_5 \pm 1{,}438_2\,i$$

und

$$x_{3,4} = -0{,}322_5 \pm 1{,}386_4\,i.$$

Erich Sponder, Paris.

Aufgaben

Aufgabe 40. Eine Parabel ist durch eine Sehne AB und deren Pol T eindeutig bestimmt. Wie konstruiert man ihren Scheitelpunkt, wenn außer T und der Mitte von AB nur 5 gerade Linien (Parallele, Normale und Verbindungsgerade) gezogen werden sollen? Weiß jemand eine noch einfachere Konstruktion? A. Stoll.

Lösung des Aufgabenstellers: Die Aufgabe ist ein Spezialfall der folgenden Aufgabe: Von einer durch eine Sehne AB und deren Pol T gegebenen Parabel denjenigen Punkt Z zu konstruieren, dessen Tangente eine beliebig vorgeschriebene Richtung hat.

M sei die Mitte von AB. Man ziehe a durch A und b durch B parallel zu TM. Alle drei sind Durchmesser der Parabel. Die Parallele durch T zur vorgeschriebenen Tangentenrichtung schneide a in U und b in V, und die Tangente in Z schneide a in X und b in Y. Da nun XZ von AT halbiert wird, muß Z auf AV liegen; und da ebenso ZY von BT halbiert wird, muß Z auch auf BU liegen. Die erlaubten fünf Konstruktionslinien sind also: a, b, UV, AV und BU.

Soll Z der Scheitelpunkt sein, dann ist die Tangente zu TM normal.

Lösungen für den Spezialfall gingen ein von C. BINDSCHEDLER (Küsnacht) und L. DESCLOUX (Fribourg). Vergleiche auch: L. LOCHER-ERNST, *Differential- und Integralrechnung*, S. 83.

Aufgabe 44. Setzt man

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{2k} x^{2k}, \quad Q_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{2k+1} x^{2k+1},$$

so gilt für jedes x:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{P_n^2 + Q_n^2} = \frac{1}{x^2}.$$

E. TROST.

Lösung: Mit $i = \sqrt{-1}$ kann man schreiben

$$P_n(x) = \frac{1}{2}\left\{(1+ix)^n + (1-ix)^n\right\}, \quad Q_n(x) = \frac{i}{2}\left\{(1+ix)^n - (1-ix)^n\right\},$$

woraus folgt
$$(P_n + i Q_n)(P_n - i Q_n) = P_n^2 + Q_n^2 = (1+x^2)^n.$$

Die Summe der reziproken Werte ist eine geometrische Reihe, die für alle reellen und von Null verschiedenen x konvergiert mit der Summe $1/x^2$. K. WOLFF (Glarus).

Dieselbe Lösung sandten C. BINDSCHEDLER (Küsnacht), F. GOLDNER (London) und A. STOLL (Zürich).

Lösungen ohne Verwendung komplexer Zahlen gingen ein von L. DESCLOUX (Fribourg) und K. RIEDER (Riehen).

Aufgabe 45. Ist n eine natürliche Zahl, so ist

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} 2^{2k} 3^{n-k}$$

die Summe von zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen.

Beispiel: $n = 3$, $2521 = 35^2 + 36^2$.

E. TROST.

Lösung: Die fragliche Summe läßt sich in die Form bringen

$$s = \frac{1}{4}\left[(2+\sqrt{3})^{2n+1} + (2-\sqrt{3})^{2n+1}\right].$$

Ferner ist
$$(2+\sqrt{3})^n = x + y\sqrt{3}, \quad (2-\sqrt{3})^n = x - y\sqrt{3}, \quad x^2 - 3y^2 = 1,$$

wo x und y ganze Zahlen verschiedener Parität sind. Damit ergibt sich leicht die Darstellung
$$s = x^2 + 3xy + 3y^2 = \frac{(x+3y)^2+1}{2} = \left(\frac{x+3y+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+3y-1}{2}\right)^2.$$

C. BINDSCHEDLER (Küsnacht).

Weitere Lösungen sandten L. DESCLOUX (Fribourg), F. GOLDNER (London), K. WOLFF (Glarus).

Die Aufgabe entstand bei der Lösung von Problem 4299 in «The American Mathematical Monthly» (Bd. 55, S. 321), wo folgender Satz zu beweisen ist: «Ist die Differenz von zwei aufeinanderfolgenden Kuben ein Quadrat, so ist die Basis des Quadrats die Summe von zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen.» Daß s^2 die Differenz zweier konsekutiver Kuben ist, folgt nach Herrn BINDSCHEDLER so:

$$(2 \pm \sqrt{3})^{2n+1} = u \pm v\sqrt{3}, \quad u^2 - 3v^2 = 1, \quad u \equiv 0(2), \quad v \equiv 1(2),$$

$$s^2 = \frac{1}{16}\left\{(2+\sqrt{3})^{4n+2} + 2 + (2-\sqrt{3})^{4n+2}\right\} = \frac{1}{8}\,(u^2 + 3\,v^2 + 1)$$
$$= \frac{1}{4}\,(3\,v^2+1) = \left(\frac{v+1}{2}\right)^3 - \left(\frac{v-1}{2}\right)^3.$$

Setzt man noch $r = (v-1)/2$, so lassen sich damit alle Lösungen der Diophantischen Gleichung

$$(r+1)^3 - r^3 = s^2$$

berechnen.

Aufgabe 47. Prouver que la série

$$\frac{1}{2(\ln 2)^p} + \frac{1}{3(\ln 3)^p} + \frac{1}{4(\ln 4)^p} + \cdots + \frac{1}{n(\ln n)^p} + \cdots$$

est convergente si $p > 1$, et divergente si $p \leqq 1$. L. KOLLROS.

Première solution: On sait que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ est convergente pour $p > 1$ et divergente pour $p \leqq 1$. Chaque terme de la série donnée, désignons-la par S, est $\leqq$ au terme de même rang de la série suivante

$$\frac{1}{2(\ln 2)^p} + \frac{1}{2(\ln 2)^p} + \frac{1}{4(\ln 4)^p} + \frac{1}{4(\ln 4)^p} + \frac{1}{4(\ln 4)^p} + \frac{1}{4(\ln 4)^p} + \frac{1}{8(\ln 8)^p} + \cdots$$

de sorte que

$$S < \frac{1}{(\ln 2)^p} + \frac{1}{(\ln 4)^p} + \frac{1}{(\ln 8)^p} + \cdots = \frac{1}{(\ln 2)^p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}.$$

On en conclut que S converge pour $p > 1$. D'autre part, chaque terme de S est $\geqq$ au terme de même rang de la série suivante

$$\frac{1}{2(\ln 2)^p} + \frac{1}{4(\ln 4)^p} + \frac{1}{4(\ln 4)^p} + \frac{1}{8(\ln 8)^p} + \cdots$$

On a donc

$$S > \frac{1}{2(\ln 2)^p} + \frac{1}{2(\ln 4)^p} + \frac{1}{2(\ln 8)^p} + \cdots = \frac{1}{2(\ln 2)^p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

et la divergence de S pour $p \leqq 1$ est établie. L. DESCLOUX (Fribourg).

Zweite Lösung: Die Reihe wird mit einem uneigentlichen Integral verglichen.

a) Nachweis der Konvergenz für $p > 1$:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p} < \int_2^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int_{\ln 2}^{\infty}\frac{dt}{t^p},$$

was für $p > 1$ konvergiert.

b) Nachweis der Divergenz für $p \leqq 1$:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p} > \int_2^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int_{\ln 2}^{\infty}\frac{dt}{t^p},$$

was für $p \leqq 1$ divergiert. P. HENRICI (Zürich).

Weitere Lösungen gingen ein von A. AESCHLIMANN (Burgdorf), F. GOLDNER (London), K. RIEDER (Riehen), A. STOLL (Zürich).

Neue Aufgaben

67. Durch einen veränderlichen Punkt P einer Parabel mit dem Scheitel S ziehe man den Durchmesser, der die Scheiteltangente in A schneidet. Man bestimme den geometrischen Ort des Fußpunktes des von A auf SP gefällten Lotes.

E. ROTHMUND (Zürich).

68. Man löse die für $n > 1$ gültige Rekursion

$$K_{n+1} = n(K_n + K_{n-1}), \qquad K_1 = 0, \; K_2 = 1.$$

Ferner berechne man den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{K_n}.$$

R. STETTLER (Bern).

69. Man beweise für ein Dreieck mit den Seiten a, b, c und dem Flächeninhalt F die Ungleichungen

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqq 4 F \sqrt{3}, \qquad b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2 \geqq 16 F^2.$$

F. GOLDNER (London).

Bemerkung. Die angekündigte Publikation einer Verallgemeinerung von Aufgabe 50 durch Herrn J. P. SYDLER erfolgt wegen Rücksichten auf die Platzverteilung in einem der folgenden Hefte.

Literaturüberschau

DIALECTICA, *Internationale Zeitschrift für Philosophie der Erkenntnis*
(Editions du Griffon, Neuchâtel)

Das Doppelheft 9/10 (Juni 1949) dieser Zeitschrift ist dem Thema *Wahrscheinlichkeitstheorie und Wirklichkeit* gewidmet. Bekanntlich hat sich die Wahrscheinlichkeitstheorie in den letzten Jahrzehnten zu einer äußerst wichtigen Disziplin entwickelt, die in den verschiedensten Wissensgebieten, wie auch in Industrie, Wirtschaft und Technik wertvolle Dienste leistet und an Bedeutung fortwährend gewinnt. Um so mehr muß es als unbefriedigend empfunden werden, daß bezüglich der Grundprobleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine Klärung noch mangelt und daß insbesondere hinsichtlich der Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffes bis heute eine Einigung der Theoretiker nicht erzielt wurde. Die Einleitung zum vorliegenden Heft läßt die bisherigen Auffassungen zur Wahrscheinlichkeitsdefinition mit zahlreichen Literaturhinweisen Revue passieren. Es äußern sich sodann zwölf namhafte Vertreter der Wahrscheinlichkeitstheorie zum gestellten Thema. Die Lektüre dieser Beiträge ist um so spannender, als sie weit davon entfernt sind, eine einheitliche Richtung zu weisen. Die alte Kontroverse zwischen Rationalisten und Empiristen wird, zum Teil mit großer Schärfe, weitergeführt. In Würdigung des Meinungsstreites kommt der einführenden Arbeit von P. NOLFI besondere Bedeutung zu, wo ein Weg aus dem Dilemma gesucht und der Versuch einer Abklärung auf Basis der dialektischen Philosophie nach GONSETH postuliert wird. Wer sich um die Probleme der philosophischen Erkenntnis im allgemeinen oder um die Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung im besonderen interessiert, wird das Heft mit Gewinn lesen. Es ist auch deshalb von besonderer Bedeutung, weil der darin behandelte Fragenkomplex auf dem vom 12.–15. Oktober 1949 in Paris stattfindenden *Congrès international de Philosophie des sciences* erneut zur Diskussion gestellt wird.

H. Jecklin, Zürich.

Berichtigung

Auf Seite 66 (1949) ist in der umrahmten Formel an Stelle des Divisionszeichens ein Multiplikationspunkt zu setzen.