Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 8 (1953)
Heft: 4

Artikel: Natürliche Umformung einer Kurve in ihre Evolute
Autor: Locher-Ernst, L.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16918

ELEMENTE DER MATHEMATIK
Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer

El. Math. Band VIII Nr. 4 Seiten 73–96 Basel, 15. Juli 1953

Natürliche Umformung einer Kurve in ihre Evolute

Wie lässt sich eine ebene Kurve auf natürliche Weise in ihre Evolute umformen? Die folgenden Bemerkungen geben eine naheliegende Antwort auf diese Frage. Die Evolute ist die Hüllkurve der Schar der Normalen. Dreht man jede Kurventangente um ihren Berührungspunkt im gleichen Drehsinne um den festen Winkel α, so erhält man eine Schar von Geraden. Ist der feste Winkel ein rechter, so hat man als Hüllkurve der Schar die Evolute. Für jeden festen Winkel α ergibt sich eine bestimmte Hüllkurve, eine *Evolutoide* der Kurve. Wächst α von 0 bis π, so verwandelt sich die Ausgangskurve ($\alpha = 0$) über verschiedene Evolutoiden in die Evolute ($\alpha = \pi/2$) und weiter über Evolutoiden zurück in die Ausgangskurve ($\alpha = \pi$).

Die vorliegenden Figuren – für den Zeichenunterricht eine interessante, aber nicht leichte Aufgabe – zeigen die Verhältnisse für eine Ellipse (Figur a, $\alpha = 0$). Dreht man jede Tangente um ihren Berührungspunkt im Uhrzeigersinne um den Winkel α, so ergeben sich für $\alpha = 30°, 60°, 75°, 90°, 105°, 120°$ und $150°$ die Figuren b bzw. c bis h. Die Hüllkurven verwandeln sich ausgehend von der Ellipse über die Evolute (Figur e) zurück in die Ellipse.

Es scheint zunächst ziemlich schwierig zu sein, die Umformung im einzelnen überschauen zu können. Genauer betrachtet, erweist sich diese Verwandlung der Kurve in ihre Evolute als ein sehr einfacher Vorgang.

Ist P irgendein Punkt der Kurve, so bezeichnen wir mit t_P die Tangente in P, mit n_P die Normale in P, mit M_P den Mittelpunkt des Krümmungskreises in P, mit ϱ_P dessen Radius und mit g_P die Gerade, die aus t_P durch Drehung um P im gewählten positiven Sinne um den festen Winkel α hervorgeht.

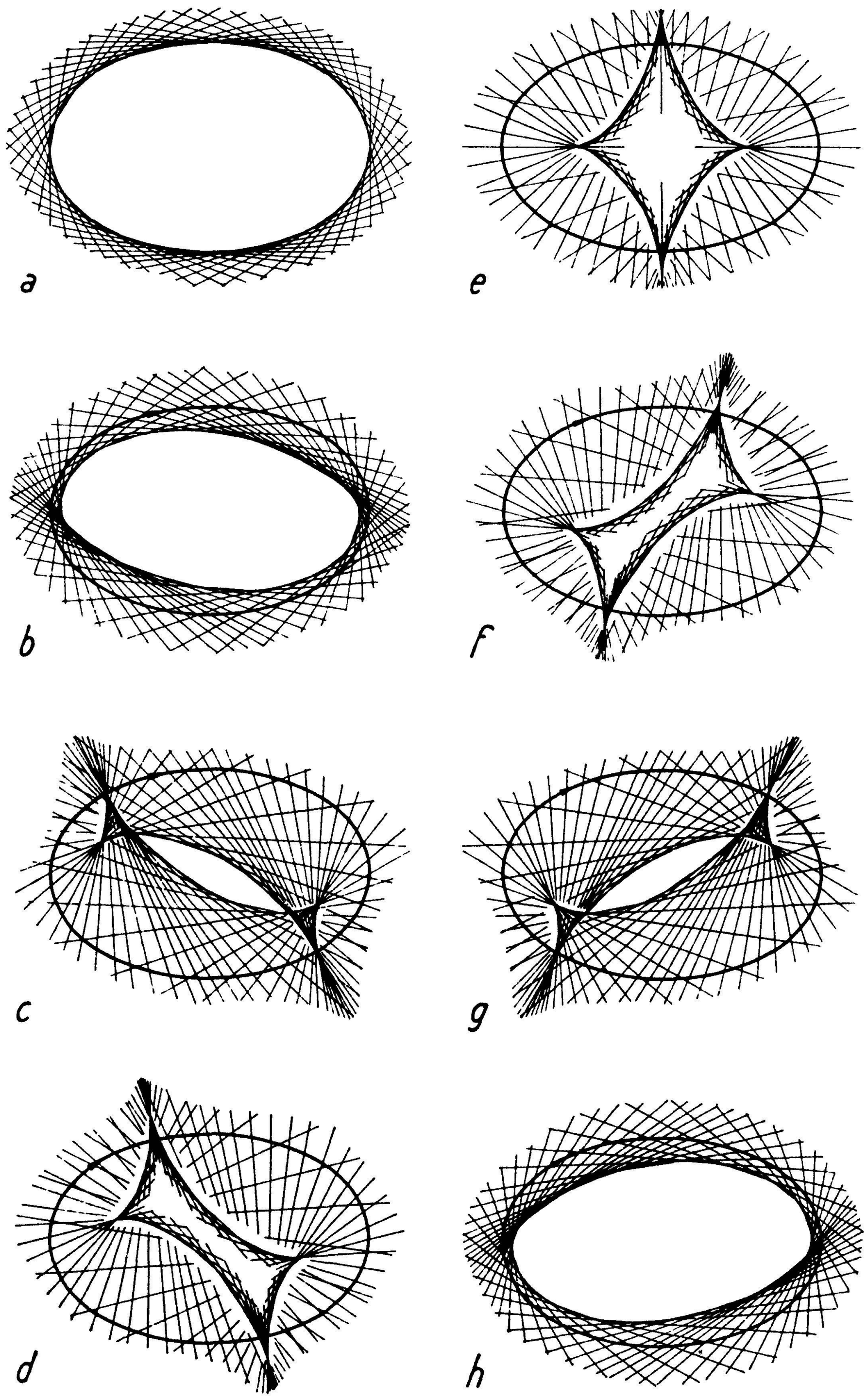
Von der betrachteten Kurve setzen wir also voraus, dass sie nicht nur in jedem Punkte eine mit diesem stetig sich ändernde Tangente, sondern auch eine Evolute besitze. Sind P, Q zwei beliebige Kurvenpunkte und N der Schnittpunkt der Normalen n_P und n_Q, so konvergiert nach Voraussetzung N gegen einen bestimmten Punkt M und der Kreis durch P, Q, N gegen einen bestimmten Kreis k_P, wenn Q auf der Kurve gegen P hinstrebt. $PM = \varrho_P$ ist Durchmesser von k_P. Nun gilt:

Fällt man vom Krümmungsmittelpunkt M des Kurvenpunktes P das Lot auf g_P, so ist der Fusspunkt X dieses Lotes der Berührungspunkt der Geraden g_P mit der von ihr erzeugten Hüllkurve[1]).

---

[1]) *Bemerkung:* Nach H. Wieleitner, *Spezielle ebene Kurven* (Leipzig 1908), Seite 177, war dieser Satz bereits Réaumur (1709) bekannt.

Beweis: Wir nehmen ausser P noch einen Kurvenpunkt Q. N sei der Schnittpunkt der Normalen n_P, n_Q. Den Schnittpunkt der Geraden g_P, g_Q durch P bzw. Q bezeichnen wir mit G. Die Geraden n_P, g_P und n_Q, g_Q bilden gleiche Peripheriewinkel [nämlich



$(\pi/2)-\alpha]$ im Kreise (P, Q, N) durch die drei Punkte P, Q, N. Da die Schenkel n_P, n_Q beide durch den Kreispunkt N gehen, liegt auch der Schnittpunkt G der beiden anderen Schenkel g_Q, g_P auf (P, Q, N). Strebt nun Q auf der Kurve gegen P, so geht (P, Q, N) in k_P über, und G muss gegen einen Punkt X dieses Kreises konvergieren.

X ist als Grenzlage des Schnittpunktes $G = (g_P, g_Q)$ für $Q \to P$ der Berührungspunkt der Geraden g_P mit der von ihr erzeugten Hüllkurve. Somit erhält man X als Fusspunkt des Lotes vom Krümmungsmittelpunkt M auf g_P.

Denken wir uns für jeden Kurvenpunkt P den Kreis k_P über $PM = \varrho_P$ als Durchmesser konstruiert. Es folgt:

Bei der Umwandlung einer Kurve über ihre Evolutoiden in ihre Evolute läuft jeder Punkt auf einem Kreise.

Weiter erhält man sofort:

Dreht sich g_P mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω aus der Anfangslage t_P um π, so durchläuft der von P ausgehende Punkt X mit konstanter Geschwindigkeit $\omega\,\varrho_P$ den Kreis k_P.

Diese Sätze erlauben, die Umformung im einzelnen zu verfolgen und sich ein anschauliches Bild von ihr zu verschaffen. L. LOCHER-ERNST, Winterthur.

Sur l'équivalence des polyèdres à dièdres rationnels

Deux polyèdres sont dits équivalents (mod 0) si l'on peut construire l'un avec les morceaux de l'autre augmenté d'un cube. Pour que deux polyèdres soient équivalents, il faut qu'ils vérifient les conditions de DEHN. Nous avons montré[1]) que si deux polyèdres remplissent ces conditions, leur différence est équivalente à un polyèdre dont tous les dièdres sont rationnels. Nous voulons montrer maintenant que:

Un polyèdre dont tous les dièdres sont rationnels est équivalent à un polyèdre dont tous les dièdres sont des multiples de $\pi/4$.

Avant de passer à la démonstration elle-même, nous établirons deux propriétés particulières dont nous aurons besoin par la suite.

a) Il existe un polyèdre

$$P\left(\alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha\right) \qquad \left[\alpha < \frac{\pi}{2}\right]$$

équivalent à un cube et ayant les propriétés suivantes:

1° Le long d'une arête $CC''C'$ $(\overline{CC''} = \overline{C''C'})$, il a un angle dièdre égal à α le long de CC'' et égal à $(\pi/2) - \alpha$ le long de $C''C'$, ces deux dièdres ayant une face commune.

2° Tous les autres dièdres sont des multiples de $\pi/4$.

En effet, considérons d'abord un prisme droit triangulaire $AA'BB'CC'$, la base étant un triangle isocèle de sommet B, l'angle ABC étant égal à 2α [nous supposerons α plus petit que $\pi/4$, ayant le choix entre α et $(\pi/2) - \alpha$] (figure 1). Comme $\alpha < \pi/4$, il est possible de choisir la longueur AA' de telle sorte que le plan passant par la diagonale AC' et perpendiculaire à la face $AA'CC'$ coupe les faces $AA'BB'$ et $BB'CC'$ suivant des angles dièdres égaux à $3\pi/4$ et $\pi/4$.

Soient B'', D, D', D'', C'' les milieux des segments $B'B$, BC, $B'C'$, DD', CC'. Le polyèdre $ABCB''C'$ est équivalent à un cube; il a le long des arêtes BB'', CC'', $C''C'$

[1]) J.-P. SYDLER, *Sur les conditions nécessaires pour l'équivalence des polyèdres euclidiens*, El. Math. 7, 49 (1952).