Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 8 (1953)
Heft: 4

Artikel: Die Simpsonsche Formel für die zweifache Integration
Autor: Tordion, Georges
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16921

Die Simpsonsche Formel für die zweifache Integration

Der Grundgedanke dieser Arbeit liegt in der Anwendung der Laplaceschen Transformation für die Gewinnung verschiedener Formeln der numerischen Integration, insbesondere der Simpsonschen Formel für einfache und zweifache Quadratur. Zuerst behandeln wir die λ-fache numerische Quadratur:

$$F(x_n) = \int_{x_0}^{x_n}\int_{x_0}^{x} \cdots \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx\, dx \ldots dx.$$

Dieses Problem kann zurückgeführt werden auf die Lösung der Differentialgleichung $F(x)^{(\lambda)} = f(x)$ mit den Anfangsbedingungen

$$F(x_0) = F'(x_0) = F''(x_0) = \cdots = F^{(\lambda-1)}(x_0) = 0.$$

Die Anwendung der Laplaceschen Transformation ist naheliegend, und es ist nach dem Differentiationssatz mit Berücksichtigung der Anfangsbedingungen:

$$\mathfrak{L}\{F(x)^{(\lambda)}\} = \mathfrak{L}\{f(x)\} = p^{\lambda}\, \mathfrak{L}\{F(x)\}. \tag{1}$$

Das Integrationsintervall wird in eine Anzahl Intervalle, die untereinander nicht gleich zu sein brauchen, eingeteilt. Es wird ferner ohne Einschränkung der Allgemeinheit $x_0 = 0$ gewählt. Im Intervall (x_{s-1}, x_s) wird die Funktion $f(x)$ ersetzt durch eine Funktion $\varphi_s(x)$, welche je nach gewünschter Genauigkeitsstufe eine Konstante, eine lineare oder quadratische Funktion sein kann. Es wird dann eine Funktion $g_s(x)$ mit folgenden Eigenschaften definiert:

$$g_s(x) \begin{cases} = 0 & x < x_{s-1}, \\ = \varphi_s(x) & x_{s-1} < x < x_s, \\ = 0 & x > x_s. \end{cases}$$

Ihre Laplace-Transformierte ist

$$\mathfrak{L}\{g_s(x)\} = \int_{x_{s-1}}^{x_s} e^{-px}\, \varphi_s(x)\, dx. \tag{2}$$

Die zu integrierende Funktion $f(x)$ kann dargestellt werden als eine Summe der Funktionen $g_s(x)$:

$$f(x) = \sum_{s=1}^{n} g_s(x).$$

Weil die Laplace-Transformierte einer Summe gleich der Summe der Laplace-Transformierten der Summanden ist, kann man schreiben

$$\mathfrak{L}\{f(x)\} = \sum_{s=1}^{n} \mathfrak{L}\{g_s(x)\}.$$

Zusammen mit der Gleichung (1) ergibt sich:

$$\mathfrak{L}\{F(x)\} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\mathfrak{L}\{g_s(x)\}}{p^\lambda}. \tag{3}$$

$\mathfrak{L}\{F(x)\}$ kann für gewählte $g_s(x)$ rücktransformiert werden, wodurch man für $x = x_n$ die gewünschte Quadratur erhält. Dieses ganz allgemeine Verfahren wird an dieser Stelle aus Platzgründen nur auf die zweifache Integration mit quadratischem $\varphi_s(x)$ angewendet.

Das Integrationsintervall wird in $2n$ Intervalle eingeteilt. Für die Ordinaten y_{2s-2}, y_{2s-1}, y_{2s} mit den Abszissen x_{2s-2}, x_{2s-1}, x_{2s} wird die Gleichung einer quadratischen Parabel aufgestellt:

$$\varphi_s(x) = A_s x^2 + B_s x + C_s.$$

Für die Koeffizienten gilt:

$$A_s = \frac{y_{2s-2}(x_{2s} - x_{2s-1}) - y_{2s-1}(x_{2s} - x_{2s-2}) + y_{2s}(x_{2s-1} - x_{2s-2})}{(x_{2s} - x_{2s-1})(x_{2s} - x_{2s-2})(x_{2s-1} - x_{2s-2})},$$

$$B_s = -\frac{y_{2s-2}(x_{2s}^2 - x_{2s-1}^2) - y_{2s-1}(x_{2s}^2 - x_{2s-2}^2) + y_{2s}(x_{2s-1}^2 - x_{2s-2}^2)}{(x_{2s} - x_{2s-1})(x_{2s} - x_{2s-2})(x_{2s-1} - x_{2s-2})},$$

$$C_s = \frac{y_{2s-2}\, x_{2s}\, x_{2s-1}(x_{2s} - x_{2s-1})}{(x_{2s} - x_{2s-1})(x_{2s} - x_{2s-2})(x_{2s-1} - x_{2s-2})}$$

$$- \frac{y_{2s-1}\, x_{2s}\, x_{2s-2}(x_{2s} - x_{2s-2}) - y_{2s}\, x_{2s-1}\, x_{2s-2}(x_{2s-1} - x_{2s-2})}{(x_{2s} - x_{2s-1})(x_{2s} - x_{2s-2})(x_{2s-1} - x_{2s-2})}.$$

Es ist dann nach der Durchführung der Einzelintegrationen entsprechend Gleichung (2):

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\{F(x)\} = \sum_{s=1}^{n} \Bigg\{ A_s \Bigg[& -\frac{x_{2s}^2 e^{-p x_{2s}}}{p^\lambda} - \frac{2 x_{2s} e^{-p x_{2s}}}{p^{\lambda+1}} - \frac{2 e^{-p x_{2s}}}{p^{\lambda+2}} \\ & + \frac{x_{2s-2}^2 e^{-p x_{2s-2}}}{p^\lambda} + \frac{2 x_{2s-2} e^{-p x_{2s-2}}}{p^{\lambda+1}} + \frac{2 e^{-p x_{2s-2}}}{p^{\lambda+2}} \Bigg] \\ & + B_s \Bigg[-\frac{x_{2s} e^{-p x_{2s}}}{p^\lambda} - \frac{e^{-p x_{2s}}}{p^{\lambda+1}} + \frac{x_{2s-2} e^{-p x_{2s-2}}}{p^\lambda} + \frac{e^{-p x_{2s-2}}}{p^{\lambda+1}} \Bigg] \\ & + C_s \Bigg[-\frac{e^{-p x_{2s}}}{p^\lambda} + \frac{e^{-p x_{2s-2}}}{p^\lambda} \Bigg] \Bigg\}.\end{aligned}$$

Die Rücktransformation ergibt:

$$\begin{aligned}F(x_{2n}) = \sum_{s=1}^{n} \Bigg\{ A_s \Bigg[& -\frac{x_{2s}^2 (x_{2n} - x_{2s})^\lambda}{\lambda!} - \frac{2 x_{2s} (x_{2n} - x_{2s})^{\lambda+1}}{(\lambda+1)!} - \frac{2 (x_{2n} - x_{2s})^{\lambda+2}}{(\lambda+2)!} \\ & + \frac{x_{2s-2}^2 (x_{2n} - x_{2s-2})^\lambda}{\lambda!} + \frac{2 x_{2s-2} (x_n - x_{2s-2})^{\lambda+1}}{(\lambda+1)!} \\ & + \frac{2 (x_{2n} - x_{2s-2})^{\lambda+2}}{(\lambda+2)!} \Bigg] +\end{aligned}$$

$$+ B_s \left[- \frac{x_{2s}(x_{2n}-x_{2s})^\lambda}{\lambda!} - \frac{(x_{2n}-x_{2s})^{\lambda+1}}{(\lambda+1)!} - \frac{x_{2s-2}(x_{2n}-x_{2s-2})^\lambda}{\lambda!} \right.$$
$$\left. + \frac{(x_{2n}-x_{2s-2})^{\lambda+1}}{(\lambda+1)!} \right]$$
$$+ C_s \left[- \frac{(x_{2n}-x_{2s})^\lambda}{\lambda!} + \frac{(x_{2n}-x_{2s}-2)^\lambda}{\lambda!} \right] \Bigg\}.$$

Für $\lambda = 1$ und gleiche Abszissenintervalle, das heisst wenn $x_{2n} = 2n\Delta x$, $x_{2s} = 2s\Delta x$, $x_{2s-1} = (2s-1)\Delta x$ usf., ergibt sich daraus

$$F(x_{2n}) = \frac{\Delta x}{3} \sum_{s=1}^{n} \{y_{2s-2} + 4\, y_{2s-1} + y_{2s}\};$$

das ist die bekannte Simpsonsche Formel.

Für $\lambda = 2$ und ebenfalls gleiche Abszissenintervalle ergibt sich:

$$F(x_{2n}) = \frac{2}{3} \Delta x^2 \sum_{s=1}^{n} \{[(n-s)+1]\, y_{2s-2} + [4(n-s)+2]\, y_{2s-1} + [n-s]\, y_{2s}\}.$$

Das ist die Simpsonsche Formel für die zweifache Integration. Die eckigen Klammern können für eine bestimmte Intervallzahl im voraus tabelliert werden. Es werden hier zwei Beispiele der Anwendung für $2n = 12$ angeführt:

1. Beispiel:

$$F(12) = \int_0^{12} \int_0^{x} x^2\, dx\, dx = 1728.$$

Nach der soeben entwickelten Formel und in etwas abgekürzter Schreibweise hat man:

$$F(12) = \frac{2}{3} 1^2 [6 \cdot 0 + 2(5 \cdot 4 + 4 \cdot 16 + 3 \cdot 36 + 2 \cdot 64 + 100)$$
$$+ 22 + 18 \cdot 9 + 14 \cdot 25 + 10 \cdot 49 + 6 \cdot 81 + 2 \cdot 121]$$
$$= \frac{2}{3} 2592 = 1728.$$

2. Beispiel:

$$F(\pi) = \int_0^{\pi} \int_0^{x} \sin x\, dx\, dx = \pi.$$

Oder

$$F(\pi) = \frac{2}{3} 0{,}2618^2 [6 \cdot 0 + 2(5 \cdot 0{,}5000 + 4 \cdot 0{,}8660 + 3 \cdot 1{,}0000$$
$$+ 2 \cdot 0{,}08660 + 1 \cdot 0{,}5000) + 22 \cdot 0{,}2588 + 18 \cdot 0{,}7071$$
$$+ 14 \cdot 0{,}9659 + 10 \cdot 0{,}9659 + 6 \cdot 0{,}7071 + 2 \cdot 0{,}2588]$$
$$= \frac{2}{3} 0{,}2618^2 \cdot 68{,}7552 = 3{,}1416$$

mit drei richtigen Dezimalen.

GEORGES TORDION, Zürich.