

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 8 (1953)
Heft: 5

Artikel: Über die Verwendung der Polygoninhalte an Stelle eines Spiegelungsaxioms in der Axiomatik der Planimetrie
Autor: Bernays, Paul
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-16923>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 30.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Dodekaederflächen) und die 6 Durchmesser des Ikosaeders (Verbindungsgeraden diametraler Ikosaederecken).

Von den metrischen Verhältnissen abgesehen, sind alle 60 Punkte, alle 60 Ebenen sowie die 72 Geraden je unter sich gleichbedeutend. Zum Beispiel kann also jeder der 60 Punkte als «Mittelpunkt» eines projektiven Dodekaeders oder Ikosaeders betrachtet werden. Die Konfiguration enthält somit 60 einfache projektive Dodekaeder, 60 einfache projektive Ikosaeder und von jeder der vier Sorten einfacher Sternkörper deren je 60.

Um sich die Gleichberechtigung der einzelnen Elemente leichter klarzumachen, ist die folgende Zusammenstellung nützlich. (Unter «Dodekaeder» und «Ikosaeder» sind dabei die einfachen Körper zu verstehen, von denen wir ausgingen.)

Eine Dodekaederfläche enthält: 5 D-Ecken, 5 D-Nebenecken, 5 Fernpunkte.

Eine Ikosaederfläche enthält: 3 I-Ecken, 6 D-Ecken, 3 D-Nebenecken, 3 Fernpunkte.

Eine Diagonalebene enthält: 4 I-Ecken, 4 D-Ecken, 4 D-Nebenecken, 2 Fernpunkte und den Mittelpunkt.

Die Fernebene enthält: 15 Fernpunkte.

Eine I-Nebenfläche enthält: 5 I-Ecken, 5 D-Ecken, 5 Fernpunkte.

Polar hierzu erhält man die Verhältnisse für die 60 Punkte der Figur.

In einer D-Kante liegen: 2 D-Ecken, 2 D-Nebenecken, 1 Fernpunkt.

In einer I-Kante liegen: 2 I-Ecken, 2 D-Ecken, 1 Fernpunkt.

In einem Durchmesser liegen: 2 I-Ecken, 2 D-Nebenecken, der Mittelpunkt.

In einer Ferngeraden liegen fünf Fernpunkte der Figur. –

Durch eine I-Kante gehen: 2 I-Flächen, 2 I-Nebenflächen, 1 Diagonalebene.

Durch eine D-Kante gehen: 2 D-Flächen, 2 I-Flächen, 1 Diagonalebene.

Durch eine Ferngerade gehen: 2 D-Flächen, 2 I-Nebenflächen, die Fernebene.

Durch einen Durchmesser gehen fünf Diagonalebenen. –

Je vier beliebige aufeinanderfolgende Punkte A, B, C, D auf einer der 72 Geraden haben das Doppelverhältnis

$$(ABCD) = \frac{1}{2} (\sqrt{5} + 1).$$

Es lohnt die Mühe, sich mit dem Aufbau der Konfiguration, die zu den schönsten Gebilden des Raumes gehört, im einzelnen vertraut zu machen.

L. LOCHER-ERNST, Winterthur.

Über die Verwendung der Polygoninhalte an Stelle eines Spiegelungsaxioms in der Axiomatik der Planimetrie¹⁾

In der Erörterung der Euklidischen Begründung der Flächeninhaltslehre hat HILBERT darauf hingewiesen, dass die Anwendung des Prinzips «das Ganze ist grösser als der Teil» eine Heranziehung der Anschauung involviert, die axiomatisch nicht selbstverständlich ist. Nämlich es wird ja hierbei vorausgesetzt, dass die Polygoninhalte eine Art von Grössen bilden, die sich bei der Zusammensetzung der Polygone

¹⁾ Ausarbeitung eines Vortrages, gehalten auf der Pfingsttagung 1952 am Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach.

addieren, wobei die Inhalte kongruenter Polygone gleich sind. HILBERT hat sogar im Anhang II der *Grundlagen der Geometrie*¹⁾ ein Beispiel einer Geometrie gegeben, in welcher ein Rechteck einem Teilrechteck ergänzungsgleich ist. Diese Geometrie hat allerdings zwei starke Anomalien: einerseits ist das Archimedische Axiom nicht erfüllt, andererseits gilt das Dreieckskongruenzaxiom III 5 nur für gleichsinnig bezogene Dreiecke.

Die Frage, wie diese Abschwächung des Axioms III 5 durch Hinzunahme anderer Axiome ausgeglichen werden kann, ist verschiedentlich behandelt worden. Eine von HILBERT selbst erwähnte Möglichkeit besteht darin, den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck als Axiom zu nehmen. Man muss dann freilich noch das Axiom hinzufügen, dass ein Winkel nicht gleich einem in seinem Innern gelegenen Winkel sein kann²⁾. ARNOLD SCHMIDT hat in seiner Dissertation³⁾ verschiedene Möglichkeiten zusammengestellt und erwiesen, wie die weitere Fassung des Axioms III 5 durch die engere in Verbindung mit anderen Axiomen ersetzt werden kann. Bei allen seinen so gewonnenen Axiomensystemen wird allerdings das Archimedische Axiom entweder für Strecken oder für Winkel postuliert.

Man kann sich nun fragen, ob es nicht möglich ist, als ergänzendes Axiom die erwähnte Voraussetzung zu nehmen, dass die Polygonflächen Grössencharakter haben. Das ist in der Tat möglich, und zwar auch ohne Verwendung des Archimedischen Axioms, wie im folgenden gezeigt werden soll.

Zur genauen Durchführung der Überlegung müssen wir zunächst unsere axiomatischen Voraussetzungen festlegen.

Wir nehmen

- (1) die Inzidenzaxiome der Ebene;
- (2) die Anordnungsaxiome;
- (3) die Axiome der Streckenkongruenz:
 - (a) Strecke $AB \equiv$ Strecke BA ,
 - (b) Transitivität der Streckenkongruenz⁴⁾,
 - (c) Möglichkeit und Eindeutigkeit der Streckenabtragung,
 - (d) Addierbarkeit der Strecken⁴⁾;
- (4) die Axiome der Winkelkongruenz:
 - (a) Winkel $hk \equiv$ Winkel kh ,
 - (b) Transitivität der Winkelkongruenz⁴⁾,
 - (c) Möglichkeit und Eindeutigkeit der Winkelantragung,
 - (d) Existenz des rechten Winkels⁵⁾,
 - (e) ein Winkel kann nicht gleich einem in seinem Innern gelegenen Winkel (mit demselben Scheitel) sein⁶⁾;
- (5) das Dreieckskongruenzaxiom für gleichsinnig bezogene Dreiecke⁶⁾;

¹⁾ Vgl. D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, 7. Auflage (Teubner, Leipzig und Berlin 1930).

²⁾ Vgl. P. BERNAYS, *Bemerkungen zu den Grundlagen der Geometrie*, § 1, Courant Anniversary Volume 1948, 29–39.

³⁾ A. SCHMIDT, *Die Herleitung der Spiegelung aus der ebenen Bewegung*, Math. Ann. 109, 538–571 (1934).

⁴⁾ «Transitivität» ist hier in dem stärkeren Sinne von Axiom III 2 bzw. III 6 (D. HILBERT, l. c., S. 11 bzw. S. 134) gemeint, «Addierbarkeit der Strecken» im Sinne von Axiom III 3.

⁵⁾ Ein rechter Winkel ist definiert als ein solcher, der einem seiner Nebenwinkel gleich ist.

⁶⁾ D. HILBERT, l. c., S. 134, Axiom III 7 bzw. III 5*.

(6) das Parallelenaxiom als Winkelaxiom: Werden zwei Geraden von einer Geraden unter gleichen (korrespondierenden) Winkeln geschnitten, so werden sie auch von jeder anderen sie beide schneidenden Geraden unter gleichen Winkeln geschnitten.

[Die aufgezählten Axiome (1) bis (6) sind alle in dem erwähnten Hilbertschen Modell erfüllt.]

(7) Die Axiome des Polygoninhalts:

- (a) die Flächen der Polygone bilden ein Grössensystem¹⁾,
- (b) gleichsinnig kongruente Dreiecke [das heisst solche, die die Voraussetzung von Axiom (5) erfüllen] haben gleiche Flächeninhalte,
- (c) beim Zusammensetzen von Polygonen addieren sich die Flächeninhalte.

Zum Nachweis, dass *aus diesen Axiomen das Dreieckskongruenzaxiom in der weiteren Fassung folgt*, genügt es, auf Grund der zuvor erwähnten Überlegung²⁾, wenn wir den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck aus den Axiomen (1) bis (7) beweisen können.

Zunächst sei vermerkt, dass wir mit Hilfe der Axiome (4) die Eindeutigkeit der Winkelvergleichung und die Gleichheit aller rechten Winkel beweisen können.

Mit Hinzunahme von Axiom (5) erhalten wir die Gleichheit der Scheitelwinkel, ferner den Satz, dass, wenn zwei Winkel in einem Sinne hintereinander angetragen einen rechten Winkel ergeben, dann auch im anderen Sinne, sowie den Satz von der Halbierbarkeit einer jeden Strecke³⁾. Unter Hinzuziehung des Parallelenaxioms (6) ergibt sich noch der Satz von der Winkelsumme im Dreieck und die Existenz des Rechtecks, insbesondere in der folgenden Form: Wenn in einem Viereck $ABCD$ die Winkel bei A und B rechte und die Seiten AD und BC kongruent sind, dann sind auch die Winkel bei D und C rechte, und AB ist kongruent DC [im weiteren als «Satz (R)» zitiert].

Durch die Axiome der Streckenkongruenz rechtfertigt sich die Einführung von Streckenlängen als Grössen, welche bei Vermeidung der Heranziehung des Zahlbegriffes im Sinne einer Abstraktion zu erfolgen hat. Die Streckenlängen bilden hiernach ein (nicht notwendig archimedisches) Grössensystem. In der Bezeichnung von Strecken durch kleine lateinische Buchstaben (in der Redeweise «die Strecke a ») meinen wir üblicherweise nicht die individuellen Strecken selbst, sondern ihre Längen.

Nunmehr handelt es sich um die Gewinnung der *Proportionenlehre*. Diese wird üblicherweise mit wesentlicher Verwendung des Archimedischen Axioms begründet. Nach HILBERT kann sie auch ohne dieses Axiom elementar begründet werden, wobei aber wesentlich ungleichsinnige Kongruenzen benutzt werden⁴⁾.

Wir verfahren nun folgendermassen: Als das «Verhältnis $a : b$ » erklären wir den spitzen Winkel, der in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a, b , worin

¹⁾ Das Grössensystem braucht nicht notwendig ein archimedisches zu sein, vielmehr wird nur Folgendes gefordert: Es gibt eine Gleichheit mit den üblichen Eigenschaften und ferner eine assoziative und kommutative Addition, wobei die Bedingungen bestehen: 1. $\alpha + \beta \neq \alpha$; 2. wenn $\alpha \neq \beta$, so ist für ein geeignetes γ entweder $\alpha + \gamma = \beta$ oder $\beta + \gamma = \alpha$; im ersteren Falle sagen wir, α ist kleiner als β , im zweiten, α ist grösser als β .

²⁾ Vgl. Absatz 2 und Anmerkung 2 der vorigen Seite.

³⁾ D. HILBERT, I. c., S. 25–26.

⁴⁾ Vgl. D. HILBERT, I. c., § 15–16, S. 60–66. – Bei dem genannten Hilbertschen Modell (Anhang II) einer nichtarchimedischen Geometrie, für welche nur das engere Dreieckskongruenzaxiom gilt, ergibt sich die Proportionenlehre dadurch, dass die Geometrie von vornherein als eine analytische Geometrie aufgestellt ist.

die Drehung von a nach b eine Linksdrehung¹⁾ ist, an der Seite b liegt. Hiernach ist das Verhältnis $a : b$ durch die Längen a, b (in dieser Reihenfolge) eindeutig bestimmt. Die Gleichheit zweier Verhältnisse, die «Proportion $a : b = c : d$ », erklären wir als Kongruenz der betreffenden Winkel.

Hiermit ergibt sich zunächst, dass die Proportion die formalen Eigenschaften einer Gleichheit besitzt. Die Existenz der vierten Proportionalen d zu a, b, c ergibt sich nicht allgemein²⁾; im Falle dass $a \geq c$ ist, erhält man aber d durch die übliche Parallelenkonstruktion. Allgemein ergibt sich die Eindeutigkeit der vierten Proportionalen.

Für die Gewinnung der weiteren Gesetze ziehen wir nun die Flächeninhaltsaxiome (7) heran. Mit Hilfe von diesen ergibt sich unter Benutzung des Satzes (R) der Satz vom Gnomon in der folgenden Fassung: Die Proportion $a : b = c : d$ gilt dann und nur dann, wenn das Rechteck mit den Seiten a, d flächengleich ist dem Rechteck mit den Seiten b, c . (Man beachte, dass die Flächengleichheit zweier [kurz gesagt] um 90° gegeneinander gedrehter Rechtecke sich durch gleichsinnige Kongruenzen beweisen lässt.) Geben wir den Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seiten a, b durch « $a \times b$ » an, so haben wir hiernach das Gesetz: Es ist $a : b = c : d$ dann und nur dann, wenn $a \times d = b \times c$ ³⁾. Auf Grund der Beziehung $a \times b = b \times a$ ergibt sich nun die Vertauschbarkeit der Innenglieder sowie der Aussenglieder in einer Proportion. Wir haben also, wenn $a : b = c : d$ auch $a : c = b : d, d : c = b : a, b : a = d : c$.

Für das Weitere führen wir noch eine *Streckenmultiplikation* in folgender Weise ein: Wir nehmen eine Strecke e und erklären für zwei Strecken a, b , welche kleiner oder gleich e sind, als das « e -Produkt von a und b » diejenige eindeutig bestimmte Strecke c , für welche die Proportion $e : a = b : c$ und somit auch die Gleichung $e \times c = a \times b$ besteht. Dieses e -Produkt⁴⁾, symbolisch $a \cdot_e b$, ist dann wieder kleiner oder gleich e . Ferner ergibt sich mühelos (für $a, b, c \leq e$):

$$a \cdot_e b = b \cdot_e a, \quad (a \cdot_e b) \cdot_e c = a \cdot_e (b \cdot_e c).$$

Wegen des assoziativen Gesetzes dürfen wir fortlaufende e -Produkte ohne Klammern bilden. Aus der Beziehung von $a \cdot_e b$ zu $a \times b$ folgt noch: wenn $a \cdot_e b = c \cdot_e d$ ist, dann $a \times b = c \times d$, und daher auch $a : c = d : b$. Da ferner auf Grund der Grösseneigenschaft der Rechtecksinhalte aus einer Gleichung $a \times a = b \times b$ stets $a = b$ folgt, so ergibt sich (für $a, b \leq e$) aus $a \cdot_e a = b \cdot_e b$ wiederum $a = b$.

Seien jetzt c die Hypotenuse, a, b die Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes, h die zu c gehörige Höhe und p, q die Projektionen von a und b auf die Hypotenuse. Dann gelten, wie man aus dem Euklidischen Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes weiss – man beachte, dass bei diesem Beweis nur gleichsinnige Kongruenzen verwendet werden! –, die Flächengleichheiten

$$a \times a = p \times c, \quad b \times b = q \times c.$$

¹⁾ Diese Ausdrucksweise ist auf Grund der Anordnungsaxiome sinnvoll; vgl. D. HILBERT, l. c., S. 75.

²⁾ Wir haben ja weder das Archimedische Axiom noch auch die stärkere Fassung des Parallelenaxioms (als Inzidenzaxiom) zur Verfügung.

³⁾ Die Anwendung des gewöhnlichen Gleichheitszeichens sowohl für die Gleichheit von Verhältnissen wie für die Flächengleichheit birgt hier gewiss keine Gefahr einer Vieldeutigkeit.

⁴⁾ Das e -Produkt liesse sich natürlich noch in weiterem Umfange einführen, doch werden wir davon nicht Gebrauch zu machen haben.

Somit liefert uns die Flächeninhaltslehre Proportionen, die zwischen entsprechenden Seiten von *ungleichsinnig bezogenen* rechtwinkligen Dreiecken bestehen. Es handelt sich nun darum, von diesen zu einer Proportion zwischen ungleichsinnig bezogenen *Kathetenpaaren* überzugehen. Das gelingt nach den getroffenen Vorbereitungen folgendermassen: Zu den beiden erhaltenen Proportionen fügen wir noch die weitere $p : h = h : q$ hinzu, welche direkt im Sinne unserer Definition des Verhältnisses besteht. Nehmen wir jetzt eine Strecke $e \geq c$, so gilt

$$a : a = p : c, \quad b : b = q : c, \quad p : q = h : h,$$

und demnach: $p : p : b : b = p : p : q : c = p : q : p : c = h : h : a : a$,

folglich $(p : b) : (p : b) = (h : a) : (h : a)$,

und somit $p : b = h : a$,

also auch $p : h = a : b$.

Seien nun A, B, C in der üblichen Schreibweise die Ecken unseres rechtwinkligen Dreiecks und werde BC über C hinaus um die Strecke a verlängert (der Endpunkt heisse B'), dann besagt unsere erhaltene Proportion, dass $\sphericalangle ABC = \sphericalangle AB'C$. Andererseits folgt aus dem pythagoreischen Lehrsatz als Flächensatz – wenn mit c' die Länge von $B'A$ bezeichnet wird –

$$c' \times c' = a \times a + b \times b = c \times c,$$

also $c' = c$. Hiernach ergibt sich folgender Satz:

Wenn, in irgendeinem Dreieck ABC , D die Mitte von AB ist und $CD \perp AB$, so sind die Winkel bei A und B gleich, und es ist $CA = CB$.

Hieraus kann nun der Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck folgendermassen bewiesen werden: Es seien im Dreieck ABC die Seiten a und b gleich. Wir konstruieren die Mitte D von AB und errichten dort auf AB die Senkrechte. Geht diese durch C , so ist die Gleichheit der Basiswinkel bewiesen. Andernfalls müsste diese Senkrechte eine der Seiten AC, BC schneiden; schneide sie etwa AC im Punkte E , dann würde nach dem vorher Bewiesenen $AE = EB$, also auf Grund der Voraussetzung und wegen der Additivität der Streckenlängen, $BE + EC = BC$ sein. Somit brauchen wir, um diese Möglichkeit auszuschliessen, nur noch zu zeigen, dass die Summe zweier Seiten im Dreieck grösser ist als die dritte.

Dieses geschieht in üblicher Weise mit Fallunterscheidung und Verwendung des Satzes, dass in einem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse grösser ist als jede der Katheten – welcher sich als Folgerung aus dem pythagoreischen Lehrsatz (als Flächensatz) ergibt. Beachtung erfordert dabei freilich der Umstand, dass die Konstruktion des Lotfällens auf eine Gerade von einem gegebenen Punkte bei unseren Voraussetzungen nicht ohne weiteres zur Verfügung steht. Wir brauchen aber diese Konstruktion nur für den Fall, dass der gegebene Ausgangspunkt C des Lotes mit zwei Punkten A, B auf der betreffenden Geraden ein solches Dreieck bildet, das bei A und B spitze Winkel hat. Hier erhalten wir die Höhe auf AB , indem wir den Komplementwinkel des Winkels bei A an AC im Punkte C nach der Seite von B antragen; der freie Schenkel fällt dann, auf Grund des Satzes von der Winkelsumme im Dreieck, ins

Innere des Winkels ABC und schneidet daher (auf Grund der Anordnungsaxiome) die Strecke AB , und zwar senkrecht. Somit kann dann der Beweis auf die übliche Art zu Ende geführt werden.

Bemerkung: Ob ohne Verwendung der Axiome des Polygoninhaltes, allein aus den Axiomen (1) bis (6), die Möglichkeit der Konstruktion des Lotfällens generell erweisbar ist, bleibt hier unentschieden.

PAUL BERNAYS, Zürich.

*Nachtrag*¹⁾

Vom axiomatischen Standpunkt aus kann es als unerwünscht erscheinen, dass in den Axiomen (7) des Polygoninhaltes implizite, durch den Polygonbegriff, der (sonst nicht auftretende) Begriff der endlichen Zahl zur Anwendung kommt. Diesem weniger elementaren Charakter der Axiome (7) kann abgeholfen werden, indem man die Axiome (7a) und (7c) folgendermassen abändert:

(a) Die Flächen der Dreiecke bilden ein Grössensystem,

(c) bei der Zerlegung eines Dreiecks in zwei Teildreiecke durch eine Transversale ist der Inhalt des ganzen Dreiecks gleich der Summe der Inhalte der Teildreiecke.

Auf Grund dieser «Axiome des Dreiecksinhaltes» kann zunächst der folgende Satz bewiesen werden: Wird ein Viereck durch beide Diagonalen in Teildreiecke zerlegt, so ist für jede der beiden Zerlegungen die Summe der Dreiecksinhalte die gleiche. Dieser Fall liegt insbesondere bei jedem Parallelogramm vor. Wir können demgemäss als Flächeninhalt eines Parallelogramms eindeutig die Summe der Teildreiecksinhalte bei der Zerlegung durch eine Diagonale erklären. Hiernach haben gleichsinnig kongruente Parallelogramme, insbesondere kongruente Rechtecke, gleiche Flächeninhalte. Ferner ergibt sich der Satz, dass Parallelogramme mit gleicher Grundlinie und gleicher Höhe gleichen Flächeninhalt haben, und somit lässt sich auch der Euklidische Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes durchführen. Endlich erhalten wir auch den Satz vom Gnomon, und damit sind alle flächentheoretischen Hilfsmittel für unsere Beweisführung gewonnen.

Es sei noch bemerkt, dass mittels der Axiome des Dreiecksinhaltes die allgemeine Lehre vom Polygoninhalt begründet werden kann. Man hat dazu insbesondere den Satz zu beweisen, dass bei jeder beliebigen Zerlegung eines Dreiecks in Teildreiecke der Inhalt des ganzen Dreiecks gleich der Summe der Inhalte der Teildreiecke ist. Daraus lässt sich dann weiter folgern, dass für alle Zerlegungen eines Polygons in Teildreiecke die Summe der Inhalte der Teildreiecke die gleiche Grösse ergibt. Diese eindeutig bestimmte Grösse kann als der Polygoninhalt definiert werden, und es ist dann der Satz beweisbar, dass Polygone dann und nur dann den gleichen Inhalt haben, wenn sie (im üblichen Sinne dieses Terminus) ergänzungsgleich sind.

Kleine Mitteilungen

Einige Parabeleigenschaften

Die übliche Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes M in einem beliebigen Punkt P einer nicht zerfallenden Kurve zweiter Ordnung verläuft nach folgendem Satz: Projiziert man den Schnittpunkt der Kurvennormalen n in P mit der

¹⁾ Bei der Korrektur hinzugefügt.