

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Band:** 11 (1956)  
**Heft:** 1

**Artikel:** Entwicklung und Bedeutung der konformen Abbildung  
**Autor:** Künzi, Hans P.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-18616>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 08.11.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires — Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik*

*und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

*Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer*

---

El. Math.

Band XI

Nr. 1

Seiten 1–24

Basel, 10. Januar 1956

---

## Entwicklung und Bedeutung der konformen Abbildung<sup>1)</sup>

### 1. Einleitung

Zu den allgemeinen Abbildungen zählt der Nichtmathematiker in erster Linie Photographien oder architektonische Pläne wie auch geographische Karten und oft noch künstlerische Werke, seien es Gemälde, Skulpturen oder Plastiken, bei denen nicht nur Gegenstände, sondern sogar gewisse Gefühle des Schöpfers in die Abbildung im weiteren Sinne einbezogen sind. Wenn JOHANN WOLFGANG GOETHE meint: «Die Mathematiker sind eine Art Franzosen, redet man mit ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anderes», so mag in gewissem Masse diese Äusserung hier zutreffen, denn der Mathematiker verwendet den Abbildungsbegriff für ganz bestimmte Operationen, die durch Gesetze eindeutig festgelegt sind.

Die mathematische Forschung erhielt den entscheidenden Impuls zur Entwicklung der Abbildungslehre im Zusammenhang mit der Entstehung des Funktionsbegriffs. Nach unserer heutigen Auffassung reiht sich dieser ganze Ideenkreis als eine mehr oder weniger abstrakte Zuordnung von Zahlen als Sonderfall in den allgemeinen mathematischen Abbildungsbegriff ein, welcher nun eine abstrakte Zuordnung zwischen den Objekten von zwei verschiedenen Systemen bedeutet. Das Hauptgewicht in der mathematischen Abbildungsinterpretation liegt aber in der Untersuchung der sogenannten Invarianten, das heisst im Aufsuchen derjenigen Struktureigenschaften, die durch die Transformation unverändert wiedergegeben werden. Als Beispiel betrachten wir die geographische Karte, bei der jedem Punkt der Karte ein Punkt auf dem Globus entspricht und umgekehrt. Je nach den speziellen Bedürfnissen können wir flächentreue Karten herstellen, die durch die Forderung charakterisiert werden, dass jede geschlossene Kurve ein Flächenstück desselben Inhalts umschliesst wie ihre Bildkurve. In gleicher Weise lassen sich streckentreue Karten erzeugen. Viele geographische Karten verzichten heute auf die Flächen- oder Streckentreue, legen aber Wert auf die Winkeltreue, wo gefordert wird, dass die Winkel, unter denen sich zwei Kurven schneiden, im Bild unverzerrt wiedergegeben werden (Figur 1).

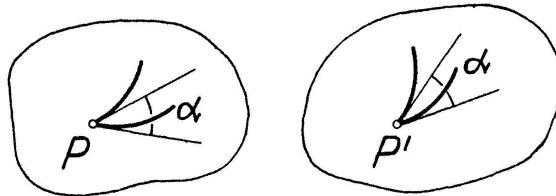
Solche Abbildungen, die sich zudem stetig verhalten und bei denen der Drehsinn der Winkel erhalten bleibt, bezeichnet man als «konforme Abbildungen».

Die so eingeführten konformen Abbildungen haben die fundamental wichtige Eigenschaft, dass sie, wie der Mathematiker zeigt, im Kleinen eine ähnliche Abbildung

---

<sup>1)</sup> Leicht abgeänderte Fassung des Vortrags, gehalten am 4. Juni 1955 als Antrittsvorlesung an der ETH. in Zürich.

liefern, so dass das Bild eines infinitesimal kleinen Kreises wiederum einen infinitesimal kleinen Kreis ergibt. Mit anderen Worten heisst das: Die Verzerrung für die Umgebung eines Gegenstandspunktes  $P$  bleibt in allen Richtungen dieselbe. Diese grundlegende Abbildung führte in der Mathematik, speziell in der Funktionentheorie zu prächtigen Anwendungen, die sich, wie später noch erwähnt werden wird, auch für weiteste Gebiete der Technik fruchtbar ausgewirkt haben. Im folgenden wollen wir in einem historischen Rückblick den Werdegang dieses Abbildungsverfahrens an Hand von charakteristischen Beispielen erläutern. Anschliessend sei versucht, die grosse Bedeutung dieser Methode im Rahmen der mathematischen Entwicklung der



Figur 1

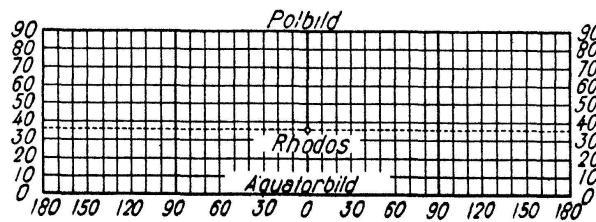
letzten Jahrhunderte zu schildern und einige moderne Betrachtungsweisen vom heutigen Standpunkt aus ins Auge zu fassen, ohne den geringsten Anspruch auf Vollständigkeit sowohl vom historischen wie vom stofflichen Standpunkt aus zu beanspruchen.

## 2. Die stereographische Projektion

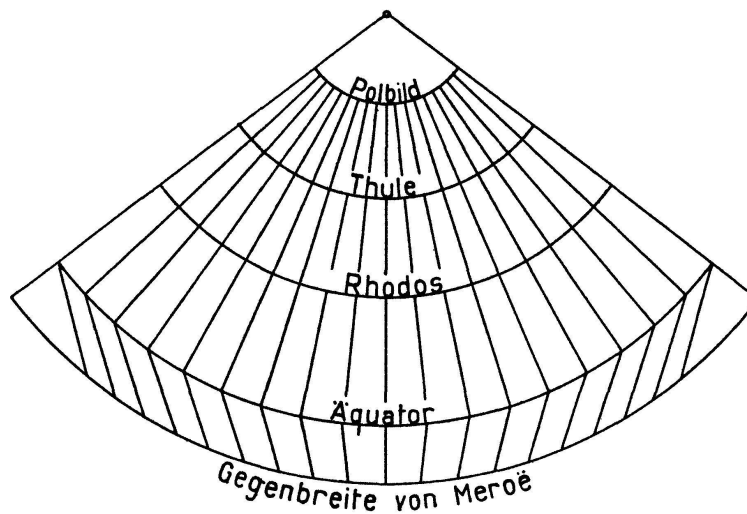
Schon vor Christi Geburt bemühte man sich, nach verschiedenen Methoden geographische Karten herzustellen. Dadurch wurde bei den alten Griechen bereits der Grundstein zu einer eigentlichen Wissenschaft, der *Geodäsie*, gelegt. Hauptvertreter dieser Richtung wurde der grosse griechische Astronom, Mathematiker und Geodät, CLAUDIUS PTOLEMÄUS, der um 140 Jahre nach Christus in Alexandria lebte und in seinem achtbändigen Werke *Γεωγραφικὴ Ὑφήγησις*, oder zu deutsch *Anleitung zum Kartenzichnen*, eine strenge und vielseitige Methode zur Kartenerstellung entwickelte. Er weist in seiner Arbeit auf drei Abbildungsverfahren des Globus hin: zunächst auf dasjenige des MARINUS VON TYRUS, bei welchem der Parallelkreis von Rhodos längentreu auf eine Gerade und alle Meridiane ebenfalls längentreu auf dazu senkrechte Gerade abgebildet werden (Figur 2a). Weiter folgen die beiden Ptolemäischen Projektionsarten. Bei der ersten werden die Breitenkreise auf konzentrische Kreise und die Meridiane auf Radien dieser Kreise bezogen. Für alle Meridiane sowie für den Breitenkreis von Rhodos ist die Abbildung längentreu (Figur 2b). Die zweite Methode bildet die Breitenkreise ebenfalls auf konzentrische Kreise ab, aber nur ein Meridian in der Mitte wird auf eine Gerade bezogen. Dieser und die Breitenkreise von Thule ( $T$ ) und Syene ( $S$ ) sowie der Gegenbreitenkreis von Meroë ( $M$ ) werden längentreu abgebildet, die übrigen Meridiane ergeben sich als Kreise, die durch je drei Punkte auf den Breitenkreisen ( $T$ ), ( $S$ ) und ( $M$ ) bestimmt sind (Figur 2c)<sup>2)</sup>.

<sup>2)</sup> Vgl. *Des Klaudios Ptolemaios Einführung in die darstellende Erdkunde*, 1. Teil, von HANS V. MŽIK und FRIEDR. HOFFNER bearbeitet (Wien 1938).

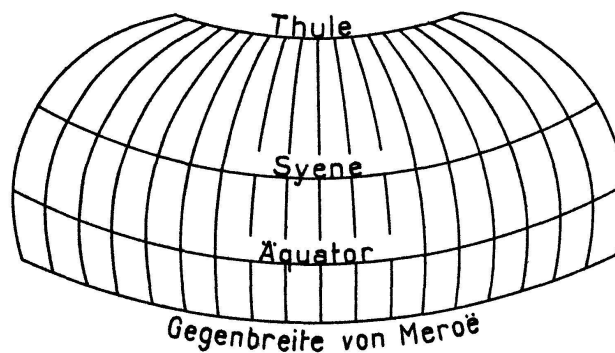
Diese drei Abbildungsverfahren sind, global betrachtet, in ihren kleinsten Teilen nicht ähnlich, also auch nicht konform. Im *Planisphärium*<sup>3)</sup> hingegen behandelt PTOLEMÄUS die stereographische Projektion des Himmelsgewölbes, und diese Abbildungsart ist für unsere Untersuchungen wohl die interessanteste<sup>4)</sup>.



Figur 2a



Figur 2b



Figur 2c

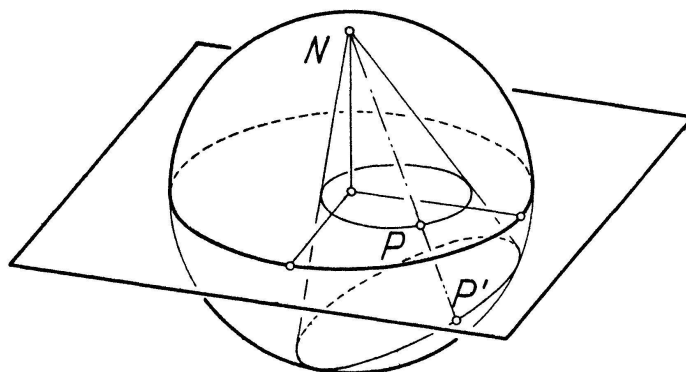
Eine Kugel wird hier vom Nordpol aus auf die Äquatorebene projiziert. Dabei entspricht jedem Punkt  $P'$  der Kugel ein Punkt  $P$  der Ebene.

Dem Nordpol selbst ordnet man das unendlich Ferne der Ebene zu. Schon mit den einfachsten Mitteln der Mittelschulmathematik kann man zeigen, dass diese

<sup>3)</sup> PTOLEMÄUS, *Planisphärium*, Opera II (HEIBERG).

<sup>4)</sup> Die stereographische Projektion muss schon HIPPARCH bekannt gewesen sein, er wird auch häufig als Entdecker dieser Abbildung bezeichnet. HIPPARCH lebte um 190–125 vor Christus auf Rhodos und führte dort astronomische Betrachtungen durch.

Abbildung der Kugel auf die Ebene eine winkeltreue Abbildung darstellt, die wir, da auch der Drehsinn der Winkel erhalten bleibt, als konform bezeichnen dürfen. Eine Haupteigenschaft der stereographischen Kugelprojektion liegt nun in der sogenannten Kreistreue, bei der ein Kreis auf der Kugel wiederum in einen Kreis der Ebene übergeht. Verläuft der Kreis auf der Kugel durch den Nordpol, so entspricht ihm in der Ebene ein Kreis mit unendlich grossem Radius, also eine Gerade. Drehen wir zum Beispiel die Kugel um einen beliebigen Durchmesser, um einen bestimmten Winkel, so dass alle Kugelkreise  $K'$  in entsprechende Kreise  $\bar{K}'$  übergehen, und projizieren diese Kugel vor und nach der Drehung vom Nordpol aus auf die Ebene, so erhalten wir



Figur 3

eine Abbildung der Ebene auf sich, in der Kreise in Kreise übergehen. Diese wichtige Klasse von Transformationen bezeichnet der Mathematiker als Kreisverwandtschaften.

Stellen wir uns jetzt die Frage, welche Eigenschaften dieser ersten konformen Abbildung, also der stereographischen Projektion<sup>5)</sup>, den alten Griechen schon bekannt waren, so lässt sich darauf kaum eine bestimmte Antwort geben, und weitgehend bleiben wir auf Vermutungen angewiesen. Mit Sicherheit dürfen wir aber behaupten, dass man die Kreistreue bereits im frühen Altertum erkannt hat, denn das lässt sich an Hand verschiedener Beispiele zeigen. In unserem Falle berufen wir uns auf ein astronomisches Instrument, das Astrolabium, welches auch von PTOLEMÄUS im *Planisphärium* erwähnt wird<sup>6)</sup>, und bei dem das Himmelsgewölbe unter strenger Beachtung der erwähnten Kreistreue stereographisch auf die Äquatorebene bezogen ist. Das älteste, uns erhalten gebliebene Astrolabium, ein arabisches Modell, stammt aus dem Jahre 984. Nach VITRUVIUS (*Architectura* IX, 8) geht die Erfindung dieses Instruments entweder auf EUDOXUS zurück, der von 408 bis 355 vor Christus lebte, oder dann auf APOLLONIUS von Perga, der um 200 vor Christus in Alexandria arbeitete.

Tafel 1 zeigt uns ein persisches Astrolabium aus dem Jahre 1647.

Interessanterweise erwähnen aber HIPPARCH, EUDOXUS und PTOLEMÄUS, soweit wir dies überblicken können, nie die Winkeltreue der stereographischen Abbildung, was zwar nicht ohne weiteres heissen will, dass ihnen diese nicht bekannt war.

<sup>5)</sup> Der Name «Stereographische Projektion» wurde der Abbildung erst im Jahre 1613 durch AIGUILLON gegeben.

<sup>6)</sup> Für weitere Angaben über das Astrolab vergleiche man: O. NEUGEBAUER, *The early history of the Astrolabe*, Isis 40, 240 (1949).

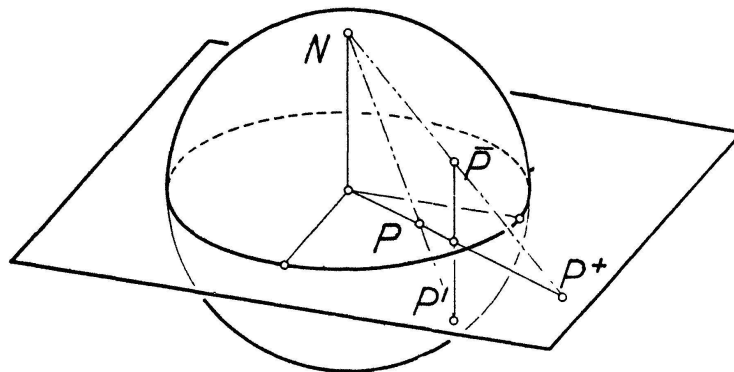


Tafel I

Man erkennt bei dem Astrolabium einen äusseren Ring, der in  $360^\circ$  eingeteilt ist, sowie eine Kreisscheibe, die dasselbe Zentrum aufweist wie der Ring. Die Scheibe, genannt Spinne, ist Träger eines exzentrischen Kreises, der die Ekliptik darstellt. Die Spinne veranschaulicht eine stereographische Projektion des Himmelsgewölbes. Durch ihre Drehung im Ring wird die scheinbare tägliche Bewegung des Sternenhimmels beschrieben. Die Spinne liegt auf einer festen Scheibe, in die verschiedene Kreise eingraviert sind. Der mittlere Kreisbogen, der die obere Kreisschar von der unteren Kurvenschar trennt, stellt den Horizont dar, die darüberliegenden Kreise sind die stereographische Projektion der Höhenkreise. Dreht man die Spinne nach

rechts, so lässt sich neben Länge und Breite auch die Bahn eines beliebigen Gestirns, insbesondere sein Auf- und Untergehen am Horizont bestimmen. Für neuere Angaben verweisen wir auf das Werk von GUNTHER, *The astrolabes of the world* (Oxford 1932), sowie auf B. L. VAN DER WAERDEN, *Science Awakening* (P. Noordhoff, Groningen), und B. L. VAN DER WAERDEN, *Les Mathématiques Appliquées dans l'antiquité*, *Ens. math.* (1955). Der Verfasser verdankt Herrn Prof. Dr. B. L. VAN DER WAERDEN auch verschiedene wichtige Hinweise bei der Bearbeitung des vorliegenden Artikels.

Eine weitere Interpretation der stereographischen Abbildung finden wir in der Inversion am Kreis. Man erhält diese, indem der Punkt  $P'$  der Kugel an der Äquator-ebene in den Kugelpunkt  $\bar{P}$  gespiegelt wird, darauf entwirft man von  $P'$  bzw.  $\bar{P}$  die stereographischen Projektionen  $P$  bzw.  $P^+$ .  $P$  heisst dann das inverse Bild von  $P^+$  bezüglich des Äquatorkreises. Auch diese Abbildung, die das Kreisäussere in das Kreisinnere, und umgekehrt, überträgt, ist winkel- und kreistreu<sup>7)</sup>.



Figur 4

In diesem Zusammenhang erwähnen wir noch einen interessanten Satz von APOLLONIUS, der uns durch PAPPUS wie folgt überliefert wurde: «Von einem oder von zwei festen Punkten werden zwei Strecken so gezogen, dass

- a) die eine in der Verlängerung der andern liegt, oder
- b) die beiden Strecken parallel verlaufen, oder
- c) die beiden Strecken einen festen Winkel einschliessen.

Bewegen sich die Endpunkte der beiden Strecken so, dass

- A) diese ein bestimmtes Verhältnis bilden, oder
- B) diese ein bestimmtes Produkt bilden,

so beschreibt der Endpunkt der zweiten Strecke dann einen Kreis oder eine gerade Linie, wenn der Endpunkt der ersten ebenfalls einen Kreis oder eine gerade Linie durchläuft.»

Es ist leicht einzusehen, dass die Inversionsbildung, die Ähnlichkeitstransformation und die Kreisverwandtschaften in diesem interessanten Beispiel von APOLLONIUS enthalten sind!

Im Jahre 1613 gibt AIGUILLON in seiner *Abbildungslehre* eine eingehende Darstellung zur stereographischen Projektion. Es werden in diesem über 100 Seiten umfassenden Quartband alle erdenklichen Möglichkeiten stereographischer Projektionen

<sup>7)</sup> Vgl. zum Beispiel STIEFEL, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie* (Birkhäuser Verlag, Basel 1947).

behandelt, ohne wieder mit einem Wort die Winkeltreue zu erwähnen. Es drängt sich somit die Vermutung auf, dass das erste klassische Beispiel der konformen Abbildung bis weit ins Mittelalter hinein noch nicht als konform erkannt wurde.

### 3. Die Mercator-Projektion

Die Ungewissheit in unserer geschichtlichen Betrachtung, wie weit den Mathematikern und Geodäten die Grundeigenschaften ihrer stets verwendeten Projektionsmethoden bekannt waren, dauerte bis ins 16. Jahrhundert hinein. Diese Erscheinung ist insofern begreiflich, als das frühe Mittelalter weder speziell in der mathematischen noch in der geographischen Forschung wesentliche Fortschritte aufzuweisen vermag. Die Erkenntnisse eines PTOLEMÄUS konnten sich nicht weiter verbreiten, da erst im Anfang des 15. Jahrhunderts sein Werk dem Abendlande in lateinischer Übersetzung erschlossen wurde. Auf die Weiterentwicklung wirkte es sich dann hemmend aus, dass, wie ARISTOTELES im Reiche der Philosophie, PTOLEMÄUS in Reichen der Astronomie und Geographie als absoluter Herrscher verehrt wurde. Der leiseste Zweifel an ihrer Autorität galt ja als Ketzerei.

In der Mitte des 16. Jahrhunderts beschäftigte sich aber mit dem Vermächtnis des PTOLEMÄUS ein junger Mathematiker und gewiegter Geograph, GERHARD KREMER, genannt MERCATOR<sup>8)</sup>. Dieser interessierte sich für die von PTOLEMÄUS stammenden astronomischen Instrumente und konstruierte sodann für Kaiser Karl V. neben zahlreichen geographischen Instrumenten auch ein Astrolab. Von diesem MERCATOR existiert weiter eine erste Theorie des Erdmagnetismus, die sich für die einsetzende Schifffahrt als besonders wichtig herausgestellt hat. Das eingangs erwähnte Werk des PTOLEMÄUS über wissenschaftliche Geographie ist sehr wahrscheinlich nicht von ihm selber mit Karten versehen worden, wenigstens stammen diejenigen, die sich bei den alten Handschriften vorfanden, von einem späteren Geographen, namens AGATHODÄMON, und sie stimmen nicht überall mit dem ptolemäischen Text überein. Es war deshalb seit dem Wiedererwachen der Wissenschaften bereits mehrfach der Wunsch geäußert worden, endlich echte Karten zum PTOLEMÄUS zu besitzen, solche, die sich seinen Angaben genau anschließen. Der Aufgabe unterzog sich nun MERCATOR und gab die verlangten Karten 1578 zu Köln heraus. Durch diese eingehenden Studien und dank seiner Tüchtigkeit scheint MERCATOR alle wichtigen Eigenschaften der angewandten Projektionsmethoden von PTOLEMÄUS und seinen Schülern erkannt zu haben. Leider ist uns sein Hauptwerk, *Über geographische Kunst*, welches vermutlich gerade die erwähnten Probleme behandelt, nicht erhalten geblieben; aber die einzelnen zerstreuten Mitteilungen, die sich auf den Karten selber befinden, scheinen den Beweis zu liefern, wie tief MERCATOR in die Lehre der Projektionen eingedrungen ist. Wir dürfen auf Grund dieser Unterlagen annehmen, dass MERCATOR in der Mitte des 16. Jahrhunderts als erster den Begriff der Konformität klar postulierte und die Anforderungen aussprach, denen eine Abbildung genügen müsse, damit eine ebene Figur die grösstmögliche Ähnlichkeit mit einer entsprechenden auf der Kugeloberfläche erhalte. Als MERCATOR den Plan zu einem Atlas fasste, entschloss er sich, als erstes Blatt die beiden Halbkugeln in

<sup>8)</sup> Geboren 1512 in Rupelmonde in Flandern, lebte später vorwiegend in Duisburg, wo er 1594 starb.



stereographischer Projektion mit dem Augenpunkte im Äquator darzustellen. Der Grund, weshalb er diese Methode wählte, findet sich im Beibext zur Karte selber angegeben. Es heisst dort: «Weil die Vierecke bleiben und auch die Breiten- und Längengrade unter sich dasselbe Verhältnis bewahren wie auf der Kugeloberfläche,



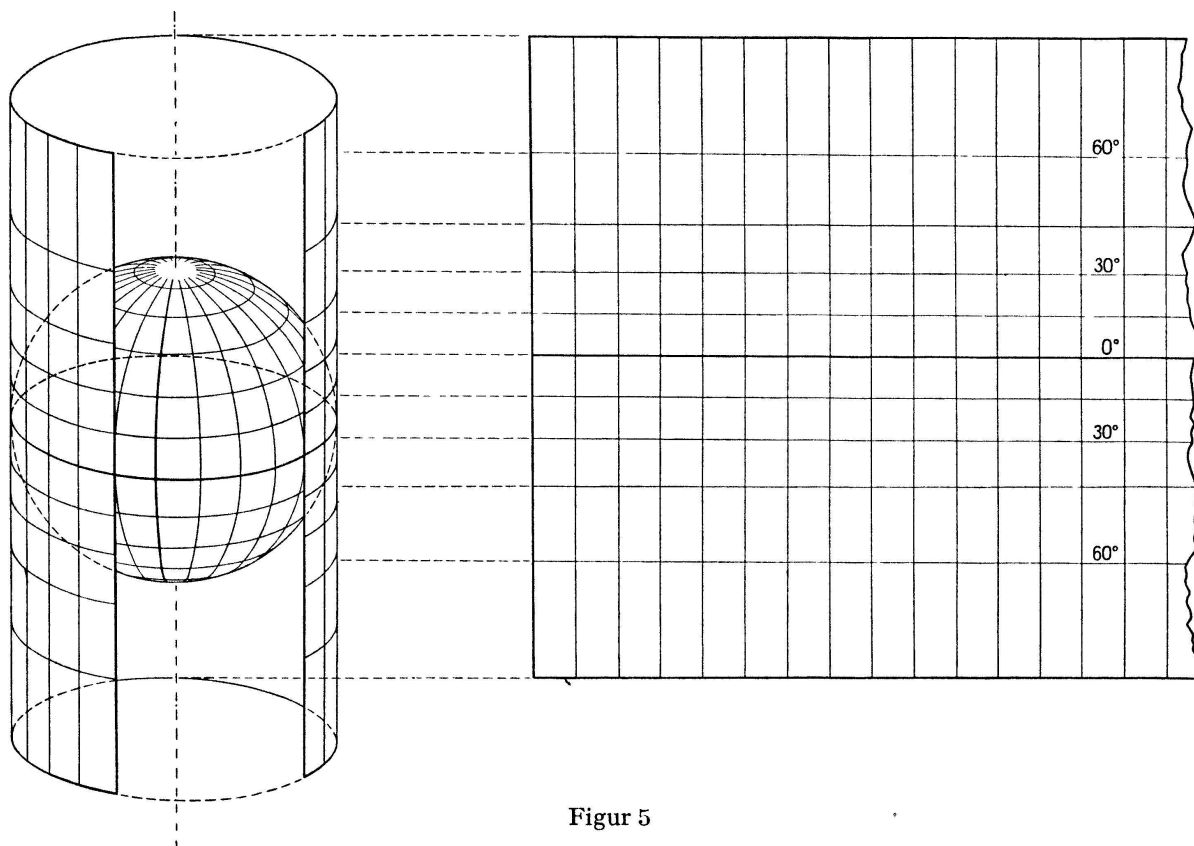
Tafel 2

so behält das Bild überall seine ursprüngliche Gestalt, ohne irgendwelche Verzerrung.» (Tafel 2 zeigt uns eine der beiden Halbkugeln des ersten Blattes.)

Mit fast denselben Worten, welche MERCATOR für die konformen Eigenschaften seiner Abbildungen brauchte, drückte sich fast zweihundert Jahre später der grosse Mathematiker LAMBERT aus, weshalb die Geschichte gerne die obigen Verdienste LAMBERT zuschreibt, allerdings mit gewissem Unrecht.

Fällt heute MERCATORS Name, so erinnert man sich in erster Linie an die nach ihm benannte Mercator-Projektion oder Mercator-Karte, in der der deutsche Geograph als

erster eine Abbildung des Globus angab, die in ihren kleinsten Teilen ähnlich ausfiel und zudem gegenüber der stereographischen Karte den Vorteil hatte, dass die Meridiane und die Breitenkreise, welche sich rechtwinklig schneiden, im Bild in parallele Gerade zum Kartenrand übergehen. Das Prinzip dieser für die Seeleute so wichtigen Karte ist das folgende: Auf dem Globus nimmt die Distanz zwischen zwei Meridianen, gemessen auf den Breitenkreisen, gegen die Pole hin ständig ab. «Um nun diese Meridiane trotzdem als parallele Gerade auf einen Zylinder zu zeichnen, habe ich», so schreibt MERCATOR selber, «die Breitengrade nach beiden Polen zu allmählich in demselben Verhältnis vergrößert, wie die Breitenkreise in ihrem Verhältnis zum Äquator



Figur 5

abnehmen.» Interpretiert man diese Abbildungsart mathematisch, so können wir aus Figur 5 entnehmen, dass der Abstand der Meridiane mit wachsender geographischer Breite  $\varphi$  auf der Kugel mit dem Radius  $R$  proportional dem  $\cos \varphi$  abnimmt. Da dieser Abstand aber in der Mercator-Projektion unverändert bleibt, so nimmt das Vergrößerungsverhältnis unserer Abbildung mit zunehmender Breite im Verhältnis  $1:\cos \varphi$  zu, also gilt die Beziehung

$$\frac{dy}{R d\varphi} = \frac{1}{\cos \varphi}.$$

Daraus schliesst man für den Abstand  $y$  des Breitenkreises  $\varphi$  vom Äquator in der Mercator-Projektion auf den Wert

$$y = R \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = R \ln \sqrt{\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}} = R \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right).$$

Für den Pol ( $\varphi = \pi/2$ ) wird  $y$  unendlich gross, was heissen will, dass die Bilder vom Nord- und Südpol in der Projektion unendlich weit vom Äquator entfernt liegen. Neben der stereographischen Projektion ist also die Mercator-Projektion die zweite bekannte konforme Abbildung, die allerdings von allem Anfang an durch GERHARD KREMER in vollem Umfang erfasst und beherrscht wurde.

An dieser Stelle sei noch erwähnt, dass unsere neuesten eidgenössischen Kartenwerke nach dem obigen Mercator-Prinzip hergestellt werden. Genau ausgedrückt, handelt es sich um eine sogenannte winkeltreue, schiefachsige Zylinderprojektion, bei der die Zylinderachse nicht mit der Erdachse zusammenfällt, sondern mit dieser einen Winkel bildet, gleich der geographischen Breite von Bern. So berührt der Zylinder die Erdkugel längs des Grosskreises, der durch Bern geht und senkrecht zum Berner Meridian steht. Diese winkeltreue Abbildung ist natürlich weder längen- noch flächentreu. Die grössten Verzerrungen treten bei Chiasso auf, wo die maximale Streckenverzerrung  $0,19\text{‰} = 19 \text{ cm/km}$  beträgt und die maximale Flächenverzerrung  $0,38\text{‰}$  <sup>9)</sup>.

#### 4. Die weitere Entwicklung der Geodäsie

Auch in späteren Zeiten war es wieder die Geodäsie, welche der Abbildungslehre, insbesondere unserer konformen Abbildung, oder noch allgemeiner der Funktionentheorie, wesentliche Impulse verlieh. GAUSSENS Lehrer, ABRAHAM GOTTLIEB KÄSTNER, schrieb im Jahre 1771 eine Dissertation, die sich nochmals mit der stereographischen Projektion befasste. JOHANN HEINRICH LAMBERT, der 1728 in der damals mit der Schweiz als «zugewandter Ort» verbündeten Stadt Mülhausen geboren wurde, interessierte sich in seiner Arbeit über *Beiträge zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendung* eingehend für die verschiedenen Forderungen, die an eine Karte zu stellen sind, um winkeltreue, flächentreue und andere Abbildungen zu erzielen. Er schuf auch eine analytische Darstellung der stereographischen Projektion.

Besonders fruchtbare Beiträge lieferte der geniale Schweizer Mathematiker LEONHARD EULER. In seiner Arbeit *De repraesentatione superficiei sphaericae super plano* aus dem Jahre 1777 behandelt er die Aufgabe, die Koordinaten eines Punktes  $x, y$  der Ebene als Funktion der sphärischen Koordinaten, nämlich der geographischen Breite  $\varphi$  und der Länge  $\vartheta$ , so darzustellen, dass gewisse Forderungen erfüllt werden. EULER weist zuerst darauf hin, dass kongruente Abbildungen der Kugel auf die Ebene nicht möglich seien. Weiter werden auf analytischem Wege die Bedingungen genau festgelegt, damit zum Beispiel Meridiane und Parallelkreise sich in zwei orthogonale Kurvensysteme abbilden. Gehen diese Systeme in Parallele zu den Koordinatenachsen über, so erhalten wir bekanntlich die Mercator-Projektion, die EULER ebenfalls interessierte. Auch die flächentreue Abbildung erfuhr durch ihn eine tiefgreifende Würdigung. In den weiteren Betrachtungen wird die grundlegende *Hypothesis, qua regiones terrae per similes figuras exhibentur*, das heisst die winkeltreue Abbildung, eingehend untersucht. Wiederum behandelt er mit seiner ausserordentlichen Präzision die allgemeine Lösung auf analytischem Wege, um eine Kugel so auf

<sup>9)</sup> Für weitere Angaben über das schweizerische Kartenwerk verweisen wir auf: Prof. ED. IMHOF, *Gelände und Karte* (Eugen Rentsch Verlag, Zürich-Erlenbach 1950). Aus diesem Buch wurde uns freundlicherweise das Cliché zu Figur 5 zur Verfügung gestellt.

die Ebene abzubilden, dass die kleinsten Teile ihren Bildern ähnlich werden. In diesen Rechnungen müssen wir ein historisches Moment für die Funktionentheorie erblicken, weil hier zum ersten Male komplexe Grössen zur konformen Abbildung herangezogen wurden, wodurch eine Methode in die Abbildungslehre Eingang fand, die bis auf den heutigen Tag das beherrschende Element der Funktionentheorie blieb. In einer späteren Arbeit zeigt EULER, dass die stereographische Projektion einen Spezialfall der von ihm aufgestellten konformen Abbildungen darstellt.

Zur gleichen Zeit studierten noch andere Mathematiker geodätische Abbildungsprobleme, wir begnügen uns mit der Erwähnung einer kleineren Schrift von SCHUBERT (1758–1825) mit dem Titel *De projectione sphaeroidis ellipticae geographicae*. Der Verfasser interessierte sich für den Fehler, den man begeht, wenn bei der Kartenprojektion die Erde als Kugel angenommen wird. In dieser Untersuchung ist auch die Rede von einer «proiectio figurae ellipticae conformis», und es scheint, dass das Wort «Konforme Abbildung» von dieser Arbeit herrührt.

Wir dürfen aber die Geodäsie nicht verlassen, bevor wir noch die enormen Verdienste von CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) erwähnen, im Zusammenhang mit den von ihm durchgeführten Vermessungsproblemen. Im Jahre 1816 erging an C. F. GAUSS die Aufforderung der Regierung, eine Vermessung des Landes Hannover durchzuführen. Der grosse deutsche Gelehrte führte diese Aufgabe zwischen 1821 und 1825 aus. Die Arbeit regte GAUSS dazu an, eigene Forschungen im Gebiete der Geodäsie zu betreiben, und so entstanden die beiden Abhandlungen *über die Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona* vom Jahre 1828 und, etwas später, *die Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie*.

In seinen zahlreichen Betrachtungen benützte GAUSS mit Vorliebe eine bestimmte konforme Projektion des Ellipsoides auf die Ebene. Mit seinen fruchtbaren und genialen Arbeiten auf dem Gebiete der Differentialgeometrie griff GAUSS auch bestimmend in die eigentliche Abbildungslehre ein. Durch das Gaußsche Krümmungsmass wurden weitgehend die Fragen über die Abbildung von krummen Flächen aufeinander abgeklärt. Auch das berühmte Plateausche Problem der Minimalflächen konnte dank seiner Ideen gelöst werden, im Zusammenhang mit konformen Abbildungen. Dem grossen Förderer der Funktionentheorie zu Ehren wurde später die komplexe Zahlenebene als «Gaußsche Ebene» bezeichnet.

## 5. Klassische Probleme der konformen Abbildung

Die schöpferischen Mathematiker des 18. und 19. Jahrhunderts erweiterten den Begriff der konformen Abbildung in der Richtung, dass sie sich nicht bloss für die Beziehungen Kugel-Zylinder oder Kugel-Ebene interessierten, sondern die konformen Relationen studierten, die zwischen zwei ebenen Gebieten auftreten.

Eine Hauptaufgabe der klassischen Funktionentheorie des 19. Jahrhunderts stellte sich in dem Problem, zwei ebene, einfach zusammenhängende<sup>10)</sup> Gebiete konform auf-

<sup>10)</sup> Ein beschränktes Gebiet heisst einfach zusammenhängend, wenn die Randpunkte eine einzige zusammenhängende Punktmenge, zum Beispiel eine geschlossene Kurve, bilden. Das Gebiet heisst zweifach, dreifach oder mehrfach zusammenhängend, wenn die Begrenzung aus zwei, drei oder mehreren paarweise getrennten (geschlossenen) Kurven besteht.

einander abzubilden vermittelt einer komplexen Funktion  $w = f(z)$ . Dabei sei verlangt, dass die Abbildung sich stetig verhalte, und aus diesem Grunde sehen wir, dass ein Kreisring, also ein zweifach zusammenhängendes Gebiet, unmöglich auf das Innere eines Kreises abgebildet werden kann, denn sonst müsste die Kreisperipherie auf zwei getrennte Konturen bezogen werden, was unmöglich stetig auszuführen wäre. Die Lösung dieses zentralen Abbildungsproblems blieb weitgehend BERNHARD RIEMANN (1826–1866) vorbehalten, der als Schöpfer und Begründer der modernen geometrischen Funktionentheorie bezeichnet werden darf. Die nach ihm bezeichnete *Riemannsche Fläche* gehört zu den geistreichsten Ergebnissen, die das mathematische Schaffen seines Jahrhunderts erreichte. Eine nähere Betrachtung dieser Untersuchungen würde wiederum den uns gelegten Rahmen weit überschreiten, doch sei erwähnt, dass mit dieser Riemannschen Idee, durch die die Ebene mehrfach mit Blättern überdeckt wird, die Schwierigkeiten, welche bei mehrdeutigen Funktionen auftreten, überwunden wurden. BERNHARD RIEMANN hat, neben zahlreichen weiteren Untersuchungen, den oben erwähnten Abbildungssatz in der Form aufgestellt, dass jedes ebene Gebiet, das aber nicht die ganze Ebene umfasst und das sich umkehrbar eindeutig und stetig auf die Kreisscheibe abbilden lässt, auch konform auf diese abbildbar sei.

Dieser zentrale Abbildungssatz, heute als Hauptsatz der konformen Abbildung bezeichnet, wurde allerdings von RIEMANN selber nicht streng bewiesen, sondern nur als Äquivalent eines Variationsproblems, des sogenannten «Dirichletproblems», erkannt, von dem RIEMANN aber die Existenz als evident annahm. Der ebenfalls für die Funktionentheorie bahnbrechend wirkende WEIERSTRASS bezweifelte die Richtigkeit der Riemannschen Hypothese, und es bedurfte eines DAVID HILBERT, um mit vollständigen Beweisen der Riemannschen Annahme zum Durchbruch zu verhelfen.

Durch die Riemannschen Untersuchungen eroberte sich die Funktionentheorie, und mit ihr die konforme Abbildung, innerhalb der Mathematik den ihr zukommenden dominierenden Platz. Es wäre unmöglich, an dieser Stelle den weiteren geschichtlichen Verlauf auch nur annähernd zu schildern. Wir begnügen uns hier, neben RIEMANN noch besonders die beiden Begründer der analytischen Funktionentheorie, CAUCHY und WEIERSTRASS, zu erwähnen sowie KLEIN und POINCARÉ, die unter anderem das umfassende Uniformisierungsproblem lösten. Neben sie reihen wir die beiden bedeutenden Lehrer an der Eidgenössischen Technischen Hochschule, H. A. SCHWARZ und HURWITZ.

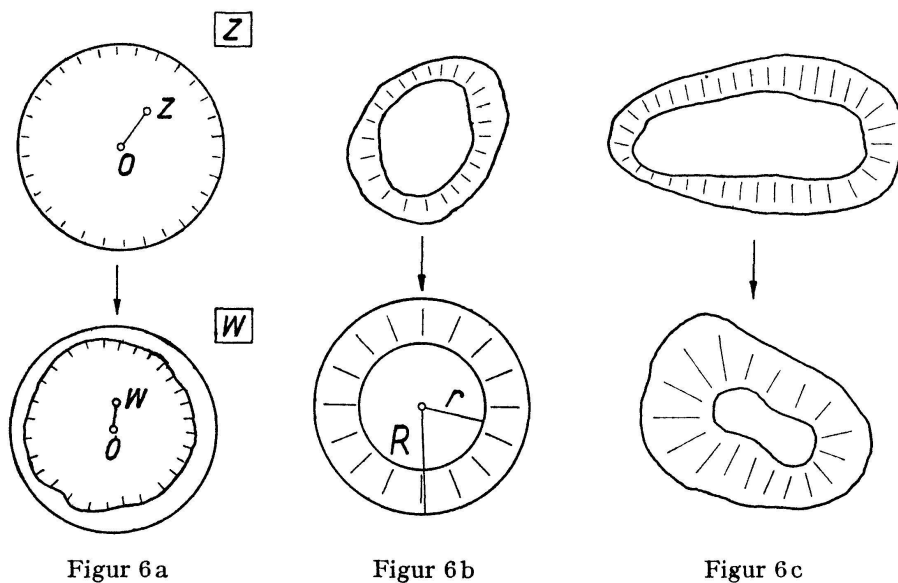
Durch das gewaltige Eingreifen dieser Mathematiker profitierte auch die Technik in stärkstem Masse von der Funktionentheorie. Wiederum gehört es zu den Verdiensten RIEMANNS, den Zusammenhang zwischen konformer Abbildung und der Strömungslehre erkannt zu haben. Weitere Anwendungen in mehr potentialtheoretischer Richtung finden wir für die Elektrostatik und die Elektro- und Hydrodynamik, um nur einige der wichtigsten zu nennen.

Ausgehend vom Riemannschen Abbildungssatz, und im Zusammenhang mit den soeben erwähnten technischen Gebieten, entwickelten sich ganz besonders in unserem Jahrhundert verschiedene praktische Methoden der konformen Abbildung. Für ein vorgegebenes Gebiet, zum Beispiel ein Tragflügelprofil, oder für ein kreisähnliches Gebiet wurden die Abbildungsfunktionen explizit bestimmt. Hierzu benützte man im allgemeinen bestimmte Iterationsverfahren oder neuerdings auch gewisse Integralgleichungen.

## 6. Neuere Betrachtungen und allgemeinere Abbildungen

Um das Wesen der konformen Abbildung auch vom heutigen mehr theoretischen Standpunkt aus überblicken zu können, wenden wir uns noch einigen neueren Problemstellungen zu.

Der Riemannsche Abbildungssatz lehrt, dass bei einem vorgegebenen Gebiet, das sich auf eine Kreisscheibe konform abbilden lässt, die Abbildungsfunktion durch die Vorgabe der Gebiete weitgehend bestimmt wird; nach gewissen Normierungen ist die Funktion sogar eindeutig festgelegt. Einen integrierenden Bestandteil in derartigen Aufgaben bilden die Verzerrungseigenschaften, die sich besonders eindrücklich am klassischen Beispiel des Schwarzschen Lemmas erläutern lassen, nach welchem die



Figur 6a

Figur 6b

Figur 6c

Abbildung einer Kreisscheibe mit dem Radius  $r = 1$  in das Innere eines gleich grossen Kreises so beschaffen sein muss, dass der Bildpunkt stets einen kleineren Abstand vom Nullpunkt aufweist als der Originalpunkt, unter der Voraussetzung, dass sich die beiden Kreismittelpunkte entsprechen (Figur 6a). Verallgemeinerungen dieses Verzerrungssatzes führen zu dem berühmten Lindelöfschen Prinzip sowie zum grossen Fragenkreis des Blochschen Satzes.

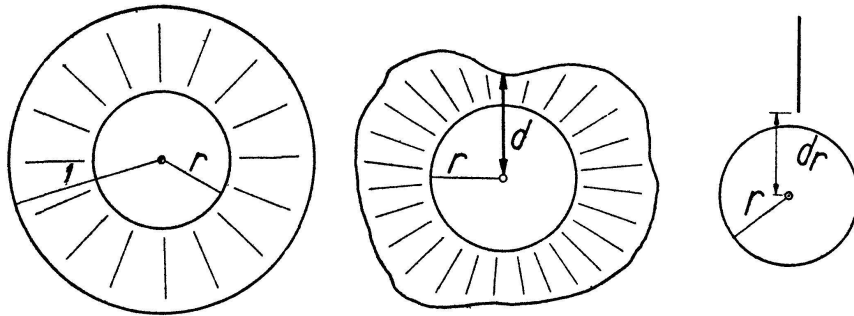
Betrachten wir an Stelle eines einfach zusammenhängenden Gebietes ein zweifach zusammenhängendes, zum Beispiel ein Ringgebiet, so lässt sich dieses, wie bereits erwähnt wurde, nicht mehr konform auf die Kreisscheibe beziehen. Hingegen kann man ein derartiges Ringgebiet immer konform in einen Kreisring abbilden (Figur 6b).

Bei einem bestimmten Ringgebiet ist aber wieder durch die Form dieses Gebietes bereits das Radiusverhältnis  $R/r$  des Bildkreisrings vorgegeben. Dieses charakteristische Verhältnis heisst Modul des Ringgebietes, und es gilt der zentrale Satz, dass sich zwei beliebige Ringgebiete nur dann konform aufeinander abbilden lassen, wenn sie in den Moduln übereinstimmen (Figur 6c), und weiter gilt, dass die Fläche  $F$  des Ringgebietes, gemessen in einer logarithmischen Metrik, stets grösser oder gleich dem Modul des Gebietes, multipliziert mit  $2\pi$ , ausfällt. Im engsten Zusammenhang

mit solchen Modulbetrachtungen stehen auch die Extremalenprobleme der konformen Abbildung, die eingehend durch den noch lebenden deutschen Mathematiker GRÖTZSCH studiert wurden. Das folgende Beispiel möge diese Forschungsrichtung näher erläutern.

Ein Bereich  $K_r$  ( $0 < r < |z| < 1$ ) werde konform und schlicht so auf einen endlichen Bereich  $B_r$  abgebildet, dass  $|z| = r$  als Ganzes in  $|w| = r$  übergeht und kein Punkt von  $|w| < r$  Bildpunkt ist.  $|z| = 1$  entspreche die äussere Begrenzung von  $B_r$ . Diese hat von  $w = 0$  einen Abstand  $d$ , der grösser oder gleich dem entsprechenden Abstand  $d_r$  ausfällt, der bei derjenigen Abbildung von  $K_r$  auftritt, bei welcher  $|z| = r$  in  $|w| = r$  übergeht und  $|z| = 1$  in einen Halbstrahl transformiert, der nach Unendlich führt und dessen Verlängerung den Punkt  $w = 0$  enthält (Figur 7).

*Die quasikonforme Abbildung:* Um zwei Ringgebiete, die in ihren Moduln nicht übereinstimmen und somit nicht konform aufeinander bezogen werden können,



Figur 7

trotzdem stetig ineinander abzubilden, entwickelt man seit etwa 25 Jahren auch eine Theorie der quasikonformen Abbildungen. Bei diesen Transformationen verzichtet man auf die Ähnlichkeit im Kleinen und begnügt sich damit, dass ein infinitesimal kleiner Kreis in eine infinitesimal kleine Ellipse übergeführt wird. Das Achsenverhältnis solcher Ellipsen – es kann für jeden abzubildenden Punkt anders ausfallen – heisst Dilatationsquotient. Dieser endliche Quotient ist nach Definition stets grösser als eins; nur bei einer konformen Abbildung wird er gleich eins. Man kann auch leicht zeigen, dass es unendlich viele Möglichkeiten gibt, zwei Gebiete, die sich konform oder nicht konform aufeinander beziehen lassen, quasikonform aufeinander abzubilden. Diese Theorie der quasikonformen Abbildungen wurde in letzter Zeit durch AHLFORS, GRÖTZSCH, LAURENTIEFF, PFLUGER und WITTICH besonders gefördert, da diese erkannten, dass zahlreiche Probleme der eigentlichen Funktionentheorie durch den Umweg über die quasikonformen Abbildungen besser zugänglich werden. In diesem Zusammenhang sei besonders an das Typenproblem sowie an Aufgaben aus der neueren Nevanlinnaschen Wertverteilungslehre erinnert.

Der junge Mathematiker OSWALD TEICHMÜLLER stellte sich auch die Frage, ob unter den unendlich vielen, oben erwähnten quasikonformen Abbildungen von zwei aufeinander nicht konform äquivalenten Gebieten eine Grenzfunktion existiere, bei der das Maximum des Dilatationsquotienten möglichst klein werde. TEICHMÜLLER betrachtete allerdings nicht nur Ringgebiete, sondern untersuchte eine viel allgemeinere Klasse von Riemannschen Mannigfaltigkeiten, in denen die Ringgebiete als

Spezialfälle enthalten sind, und schrieb über dieses Gebiet 1938 ein umfangreiches Buch, in welchem unter anderem auch kühnste Vermutungen und Behauptungen ausgesprochen sind, die bis heute noch keineswegs allgemein abgeklärt werden konnten. Erst vor zwei Jahren brachte der finnische Mathematiker LARS AHLFORS weiteres Licht in die Teichmüllerschen Probleme. Heute steht fest, dass unter bestimmten Voraussetzungen stets eine derart geforderte Abbildung mit kleinstem Dilatationsquotienten existiert, wobei interessanterweise bei dieser Extremalenabbildung der Quotient für alle Punkte des Bereiches konstant bleibt. OSWALD TEICHMÜLLER, dessen Probleme die heutige Funktionentheorie noch Jahre hindurch beschäftigen werden, ist im November 1943 im Alter von erst 30 Jahren im Krieg gefallen. Mit ihm hat die Mathematik unserer Zeit allzu früh einen ihrer hervorragendsten Vertreter verloren.

Es steht uns nicht zu, die weitere mögliche Entwicklung unseres Forschungsgebietes zu diskutieren; doch dürfen wir mit Bestimmtheit behaupten, dass die Lehre der konformen Abbildung auch in Zukunft als integrierender Teil der Mathematik, sowohl in rein theoretischer wie in angewandter Richtung, neue und fruchtbare Resultate zeitigen wird.

HANS P. KÜNZI, Zürich.

## Ungelöste Probleme

**Nr. 9.** Herr L. LOCHER-ERNST machte wiederholt auf eine reizvolle Fragestellung aufmerksam (Briefwechsel mit dem Unterzeichneten), welche hier vorgelegt werden soll. Wir betrachten Geraden, die durch den Ursprung eines rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems des gewöhnlichen Raumes hindurchlaufen und mit den drei Koordinatenachsen Winkel bilden, die mit  $\pi$  kommensurabel sind. Es gibt unendlich viele Geraden dieser Art, doch sind sie fast alle trivial in dem Sinne, als sie in Koordinatenebenen liegen. Im Hinblick auf mannigfaltige Zusammenhänge mit andern geometrischen Fragen sind nur die nicht trivialen Lösungen wichtig, das heisst diejenigen Geraden der bezeichneten Art, die durch das Innere von Raumoktanten hindurchlaufen. Es gibt nun, wie uns Herr LOCHER-ERNST mitteilte, genau 36 verschiedene nichttriviale Geraden mit kommensurablen Achsenwinkeln. Das Problem, dessen Lösung unseres Wissens noch aussteht, geht dahin, für diese Behauptung einen mit einfachen geometrischen Mitteln auskommenden Beweis zu finden.

Unsere Frage lässt sich in arithmetischer Einkleidung wie folgt formulieren: Man ermittle alle Lösungen  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  der Gleichung

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

unter der Nebenbedingung, dass

$$\alpha = u\pi, \quad \beta = v\pi, \quad \gamma = w\pi \quad \left(0 < u, v, w < \frac{1}{2}\right)$$

gilt, wobei  $u$ ,  $v$  und  $w$  drei rationale Zahlen des rechts angegebenen Intervalls bedeuten. Wenn Lösungen, die durch Permutation ineinander übergehen, identifiziert