

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Band:** 11 (1956)  
**Heft:** 3  
  
**Rubrik:** Ungelöste Probleme

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 08.11.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Alle bisher bekannten Beispiele solcher Funktionen  $f(x, y)$  haben aber, wie die überall stetigen Funktionen, die beiden folgenden Eigenschaften:

1. Sie sind in jedem abgeschlossenen Quadrat  $|x|, |y| \leq c$  beschränkt.
2. Sie nehmen in jedem abgeschlossenen Quadrat  $|x|, |y| \leq c$  ihre dortige untere Grenze  $\inf f(x, y)$  und obere Grenze  $\sup f(x, y)$  als Funktionswerte an.

Es dürfte daher die Bemerkung von Interesse sein, dass keine dieser beiden Eigenschaften für alle Funktionen der betrachteten Art gilt. Das soll durch zwei einfache, durch leichte Abänderung der Funktion (2) gebildete Beispiele belegt werden.

Zunächst ist die Funktion

$$F(x, y) = \frac{x^2 y^3}{(x^2 + y^4)^2} \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \quad F(0, 0) = 0 \quad (3)$$

wieder im Nullpunkt linear stetig, aber nicht stetig, und in allen anderen Punkten stetig. Wegen

$$F(y^2, y) = \frac{1}{4y} \quad \text{für } y \neq 0$$

ist sie aber in keinem Quadrat  $|x|, |y| \leq c$  beschränkt.

Ebenfalls ist die Funktion

$$G(x, y) = \frac{x y^2}{(x^2 + y^4)(1 + x^2 + y^2)} \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \quad G(0, 0) = 0 \quad (4)$$

im Nullpunkt linear stetig, aber nicht stetig, und in allen anderen Punkten stetig. Weiter gilt wegen

$$|G(x, y)| < \frac{1}{2}, \quad \lim_{y \rightarrow 0} G(\pm y^2, y) = \pm \frac{1}{2}$$

in jedem abgeschlossenen Quadrat  $|x|, |y| \leq c$

$$-\frac{1}{2} = \inf G(x, y) < G(x, y) < \sup G(x, y) = \frac{1}{2};$$

die Funktion (4) nimmt also weder ihre untere noch ihre obere Grenze als Funktionswert an.

HEINZ KÖNIG, Würzburg.

## Ungelöste Probleme

**Nr. 11.** Herr MARTIN KNESER machte bei verschiedenen Gelegenheiten auf ein Problem aufmerksam, das nach erstem Augenschein einen fast elementaren Charakter zu haben scheint, dessen Lösung aber, wie wir von verschiedener Seite vernehmen, noch nicht restlos glückte. Es handelt sich hierbei um folgendes: Es sollen  $P_1, \dots, P_n; Q_1, \dots, Q_n$   $2n$  Punkte des  $k$ -dimensionalen euklidischen Raumes bezeichnen, und für die Distanzen gelte  $d(P_i, P_j) \leq d(Q_i, Q_j)$  für jedes Indizespaar  $1 \leq i, j \leq n$ .

Bedeutet  $A$  bzw.  $B$  die Vereinigungsmenge der  $n$  Einheitskugeln mit den Mittelpunkten  $P_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) bzw.  $Q_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) und  $V(A)$  bzw.  $V(B)$  ihre Volumina, so gilt vermutlich  $V(A) \leq V(B)$ .

Diese Aussage würde, falls sichergestellt, innerhalb der Masstheorie nützliche Dienste als Hilfssatz leisten.

Beispielsweise würde sich mühelos folgern lassen, dass das untere Minkowskische Mass einer beliebigen beschränkten Punktmenge sich bei dehnungsloser Abbildung

nicht vergrössern kann und damit mindestens so gross ist wie das Kolmogoroffsche Minimalmass. Darüber kann man nachlesen bei M. KNESER in einer jüngst erschienenen Abhandlung<sup>1)</sup>.

Die vermutete Aussage ist nur in einigen Sonderfällen bewiesen worden. 1.  $k = 1$  (Beweis durch Induktion nach  $n$ ). 2.  $n \leq k + 1$ . 3. Die Menge der  $P_i$  ist ähnlich zur Menge der  $Q_i$ ; [Beweis von G. BOULIGAND<sup>2)</sup>]. 4.  $k = 2$ ; die Menge der  $P_i$  lässt sich stetig in die Menge der  $Q_i$  so überführen, dass die Distanzen entsprechender Punkte nie abnehmen (nach brieflicher Mitteilung von W. HABICHT an M. KNESER).

H. HADWIGER.

## Aufgaben

**Aufgabe 232.** Eine veränderliche Tangente eines Kegelschnitts schneide zwei feste Tangenten desselben in  $A$  und  $B$ . Über  $AB$  wird das Dreieck  $ABC$  errichtet, das zu einem festen Dreieck gleichsinnig ähnlich ist. Gesucht wird der geometrische Ort für die Spitze  $C$ .  
C. BINDSCHEDLER, Küsnacht, und J. P. SYDLER, Zürich.

*Lösung:* Die Ordnung der Ortskurve ist gleich der Anzahl ihrer Schnittpunkte mit einer Geraden in allgemeiner Lage. Es sei  $g$  eine solche und  $C$  ein Punkt auf ihr. Das Dreieck  $ABC$ , dessen Eckpunkte  $A$  und  $B$  auf den Tangenten  $t_1$  bzw.  $t_2$  des Kegelschnittes  $K$  liegen und das dem gegebenen Dreieck gleichsinnig ähnlich ist, ist durch  $C$  eindeutig bestimmt. Denn die Drehstreckung aus  $C$  um den Dreieckswinkel  $\gamma$  im gegebenen Sinn mit dem Streckungsverhältnis  $\lambda = \overline{BC}/\overline{AC}$  muss  $A$  in  $B$  überführen.  $B$  ist also der Schnittpunkt der Transformaten  $t'_1$  von  $t_1$  mit  $t_2$ . Ein Ausnahmefall tritt ein, wenn  $t'_1 \parallel t_2$ , das heisst, wenn  $\sphericalangle(CA, CB)$  nach Grösse und Sinn dem Winkel  $(t_1, t_2)$  gleich ist. Bewegt sich  $C$  auf  $g$ , so verschiebt sich  $t'_1$  parallel und schneidet aus  $t_2$  eine zu  $C$  ähnliche Punktreihe  $B$  aus. Dasselbe gilt für  $A$ .  $AB$  umhüllt also eine Parabel  $P$ , die  $t_1$  und  $t_2$  berührt. Ist  $K$  ein Mittelpunktskegelschnitt, so führen die beiden weiteren gemeinsamen Tangenten von  $K$  und  $P$  zu je einem Dreieck  $ABC$ , für welches  $AB$  Tangente von  $K$  ist. Der geometrische Ort von  $C$  ist also eine Kurve zweiter Ordnung, und zwar eine Hyperbel, da die beiden uneigentlichen Punkte reell sind.

Ist  $K$  eine Parabel, so hat diese mit  $P$  neben  $t_1, t_2$  und der uneigentlichen Geraden nur eine gemeinsame Tangente, die zu einem Dreieck  $ABC$  mit  $C$  auf  $g$  führt; der geometrische Ort ist also eine Gerade.

Im oben erwähnten Ausnahmefall  $t'_1 \parallel t_2$  muss  $t'_1$  mit  $t_2$  zusammenfallen, damit das Dreieck möglich wird. Das Verhältnis der Abstände des Punktes  $C$  von  $t_1$  und  $t_2$  muss dann nach Grösse und Vorzeichen einen bestimmten Wert  $\lambda$  haben; der geometrische Ort ist also eine Gerade durch den Schnittpunkt von  $t_1$  und  $t_2$ .

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht.

Weitgehende Verallgemeinerungen dieser Resultate gibt J. P. SYDLER in seiner Arbeit: *Le triangle comme opérateur géométrique* (El. Math. 10, 100–105 [1955]). Analytische Lösungen gaben C. BINDSCHEDLER und R. LAUFFER (Graz).

**Aufgabe 233.** D'un point  $M$  sur le diamètre  $AB$  d'une hyperbole équilatère on mène la tangente  $MT$  ( $A, B, T$  se trouvent sur la courbe). Démontrer

$$\frac{\overline{AT}^2}{\overline{BT}^2} = \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}.$$

G. VLAHAVAS, London.

<sup>1)</sup> M. KNESER: *Einige Bemerkungen über das Minkowskische Flächenmass*, Arch. Math. 6, 382–390 (387) (1955).

<sup>2)</sup> G. BOULIGAND, *Ensembles impropres et nombre dimensionnel*, Bull. Sci. Math. 52, 320–344 (324) (1928).