

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 11 (1956)
Heft: 5

Artikel: Über die Grundlösungen der Gleichung $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$
Autor: Steiger, Franz
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-18627>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 02.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Interessant sind diese Beobachtungen für uns deswegen, weil die Beweisführung unseres Satzes (IX 20) bei EUKLID eindeutig transfinit ist. Es wird aus der Tatsache, dass die als Beispiel geprüfte Menge der Primzahlen *nicht* vollständig ist, auf die Existenz unendlich vieler Primzahlen geschlossen. Kein Zweifel, diese Schlussweise ist intuitionistisch unzulässig! – O. BECKER wollte also mit der Bemerkung, dass der Satz IX 20 in der ganzen antiken Arithmetik isoliert dastünde, wohl eben diese Tatsache unterstreichen. – Aber ist denn dieser Satz in der antiken Wissenschaft wirklich so vollkommen isoliert? – Nehmen wir jenen einzigen Ausnahmefall der aristotelischen Ersten Analytik, in dem ein Verstoss gegen die intuitionistische Denkweise zu beobachten ist. Es handelt sich hier¹⁶⁾ um den Satz von der Inkommensurabilität der Quadratdiagonale zur Seite, als Beispiel einer *Deductio ad absurdum*. BECKER schreibt darüber folgendes:

«Auch in diesem Fall liegt eine eigentliche transfinitive Schlussweise nicht vor. Allerdings ist die Disjunktion zwischen messbaren und unmessbaren Strecken nicht endlich entscheidbar, im Gegensatz etwa zu der zwischen geraden und ungeraden Zahlen. *Insofern besteht hier schon ein Ausnahmefall, merkwürdigerweise auch sonst bei diesem mathematischen Problem, denn in der Deductio ad absurdum der Messbarkeit der Diagonale werden leere Begriffe verwandt; die Klasse der messbaren Diagonale ist ja die Nullklasse.*»

Man muss dazu nur bemerken, dass der Satz von der Inkommensurabilität der Quadratdiagonale zur Seite ebenso pythagoreischen Ursprungs ist¹⁷⁾, wie nach unserer Vermutung auch der Satz *Euclid* IX 20.

Die bisher bekannten beiden auffallendsten Verstösse der antiken Mathematik gegen den Intuitionismus stammen also von den Pythagoreern. Man wäre also geneigt anzunehmen, dass die transfinitive Schlussweise in der ältesten Periode der griechischen Mathematik bei den Pythagoreern des 5. Jahrhunderts noch *nicht* verpönt war, sie wurde erst im 4. Jahrhundert von EUDOXOS ab vermieden. Die Logik des 5. Jahrhunderts wäre also noch nicht dieselbe wie später diejenige des ARISTOTELES.

ÁRPÁD SZABÓ, Budapest.

Über die Grundlösungen der Gleichung

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2$$

Von einer «*Grundlösung*» unserer Gleichung sprechen wir, wenn a, b, c, d natürliche Zahlen mit dem grössten gemeinschaftlichen Teiler 1 sind. Lösungen, die sich nur durch Permutation von a, b, c unterscheiden, gelten als *dieselbe* Lösung.

Man erhält *jede Grundlösung* der pythagoreischen Gleichung (G) $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$, und zwar *jede genau einmal*, wenn man in den nachfolgenden Formeln (A), (B), (C) und (D) für die Parameter s, t, u und v alle ganzen Zahlen einsetzt, die mit den

¹⁶⁾ *Analytica priora* I 31 (46 b, 28 35).

¹⁷⁾ Vgl. O. BECKER, Quell. Gesch. Math. [B.] 3, 544ff. (1936).

beigefügten Bedingungen (I), (II), ..., (VII) verträglich sind:

$$a = 2(s v + t u), \quad (\text{A})$$

$$b = 2(s u - t v), \quad (\text{B})$$

$$c = (s^2 + t^2) - (u^2 + v^2), \quad (\text{C})$$

$$d = (s^2 + t^2) + (u^2 + v^2), \quad (\text{D})$$

$$s \geq 1; \quad t \geq 0; \quad u \geq 1; \quad v \geq 0; \quad t + v \geq 1, \quad (\text{I})$$

$$s + t + u + v \equiv 1 \pmod{2}, \quad (\text{II})$$

$$s^2 + t^2 > u^2 + v^2, \quad (\text{III})$$

$$s u > t v, \quad (\text{IV})$$

$$(s^2 + t^2, \quad u^2 + v^2, \quad s v + t u) = 1 \quad (\text{V})$$

(das heisst, der grösste gemeinschaftliche Teiler der drei in der Klammer stehenden Zahlen soll 1 sein).

$$\text{Mit } t = 0 \text{ gelte } v \leq u. \quad (\text{VI})$$

$$\text{Mit } v = 0 \text{ gelte } t \leq s. \quad (\text{VII})$$

(V) ist nur dann erfüllt, wenn $(s, t, u, v) = 1$. Dass diese letzte Bedingung nicht hinreicht, wenn wir *Grundlösungen* erhalten wollen, zeigt das Beispiel $\{s; t; u; v\} = \{3; 1; 2; 1\}$, das auf $\{a; b; c; d\} = \{10; 10; 5; 15\}$ führen würde.

Unser Formelsystem geht, wenn wir *gleichzeitig* $t = 0$ und $v = 0$ setzen, genau in dasjenige über, das man für die Ermittlung der teilerfremden pythagoreischen *Zahlentripel* braucht¹⁾.

Bei der Herstellung einer Tafel der Grundlösungen von (G) liessen wir

$$k = s + t + u + v,$$

von $k = 3$ an aufsteigend, alle ungeraden Zahlen durchlaufen [siehe (I) und (II)!]. Jede mit den Bedingungen verträgliche Darstellung eines Wertes k durch vier Summanden, wobei auch deren Permutationen zu berücksichtigen waren, lieferte eine Lösung. Die doppelte Ungleichung

$$\sqrt{d} < k < 2\sqrt{d} \quad (\text{VIII})$$

ermöglichte es, eine nach aufsteigendem d geordnete, lückenlose *Tafel* zu berechnen. Ein *Beweis* der angegebenen Formeln wird demnächst in der Zeitschrift «Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht» (Dümmler, Bonn) erscheinen.

Für $d \leq 99$ hat (G) folgende 347 *Grundlösungen*:

¹⁾ HELMUT HASSE, *Proben mathematischer Forschung in allgemeinverständlicher Behandlung* (Otto Salle Verlag, Frankfurt a. M. 1955).

Grundlösungen der Gleichung $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$

<i>d</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
3	1	2	2	41	9	24	32	57	25	32	40
7	2	3	6		12	24	31		28	28	41
9	1	4	8		23	24	24	59	6	9	58
	4	4	7	43	2	9	42		6	14	57
11	2	6	9		2	18	39		6	23	54
	6	6	7		6	7	42		6	41	42
13	3	4	12		7	30	30		9	22	54
15	2	5	14		9	18	38		9	30	50
	2	10	11		18	25	30		14	39	42
17	1	12	12	45	4	28	35		30	30	41
	8	9	12		5	8	44	61	3	24	56
19	1	6	18		8	19	40		11	36	48
	6	6	17		13	16	40		12	21	56
	6	10	15		16	20	37		20	36	45
21	4	5	20		20	28	29		21	24	52
	4	8	19	47	2	21	42		24	29	48
	4	13	16		6	18	43		24	36	43
	8	11	16		6	27	38	63	2	11	62
23	3	6	22		11	18	42		2	22	59
	3	14	18		18	21	38		2	34	53
	6	13	18		18	27	34		2	43	46
25	9	12	20	49	4	9	48		5	10	62
	12	15	16		4	33	36		5	38	50
27	2	7	26		9	32	36		10	37	50
	2	10	25		12	24	41		11	22	58
	2	14	23		12	31	36		22	26	53
	7	14	22		15	24	40		22	37	46
	10	10	23		23	24	36		26	38	43
29	3	16	24	51	1	10	50		34	37	38
	11	12	24		1	22	46	65	7	24	60
	12	16	21		1	34	38		15	36	52
31	5	6	30		2	14	49		20	24	57
	6	14	27		10	10	49		20	39	48
	6	21	22		14	14	47		25	36	48
	14	18	21		14	17	46	67	6	22	63
33	1	8	32		14	31	38		6	33	58
	4	7	32		22	31	34		14	18	63
	4	17	28	53	8	12	51		15	30	58
	7	16	28		8	21	48		15	42	50
	8	8	31		12	19	48		18	42	49
	8	20	25		12	27	44		22	33	54
	17	20	20		12	36	37		30	33	50
35	1	18	30		27	28	36		31	42	42
	6	10	33	55	3	10	54	69	4	11	68
	6	17	30		3	30	46		4	16	67
	15	18	26		6	35	42		4	32	61
37	3	8	36		10	18	51		4	44	53
	3	24	28		18	26	45		5	40	56
	8	24	27		19	30	42		11	44	52
	12	21	28	57	4	23	52		16	28	61
39	2	19	34		4	32	47		16	32	59
	2	26	29		7	8	56		16	37	56
	10	14	35		7	40	40		20	35	56
	13	14	34		8	28	49		28	29	56
	14	22	29		16	17	52		35	40	44
	19	22	26		16	28	47	71	3	26	66
41	4	12	39		17	32	44		3	46	54
	4	24	33		23	28	44		10	45	54

d	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c
71	18	19	66	81	28	41	64	93	4	13	92
	18	46	51		32	49	56		4	52	77
	19	42	54		40	44	55		8	11	92
	26	42	51	83	2	18	81		8	29	88
	30	35	54		2	54	63		8	53	76
	30	45	46		15	42	70		8	64	67
73	1	12	72	18	18	79	11	28	88		
	8	9	72	18	33	74	13	52	76		
	8	36	63	18	47	66	20	32	85		
	12	12	71	28	42	63	20	43	80		
	12	33	64	30	33	70	28	44	77		
	12	44	57	30	42	65	32	35	80		
	24	28	63	33	38	66	32	43	76		
	28	36	57	42	47	54	32	56	67		
	33	44	48	85	4	45	72	43	52	64	
	7	10	74		5	12	84	52	53	56	
75	7	26	70	12	59	60	95	5	54	78	
	10	14	73	21	40	72		6	42	85	
	10	22	71	24	32	75		6	58	75	
	10	41	62	24	45	68		14	27	90	
	14	23	70	32	51	60		21	22	90	
	22	46	55	87	2	13		86	21	50	78
	25	34	62		2	26	83	22	54	75	
	34	38	55		2	29	82	27	30	86	
	38	41	50		2	61	62	30	58	69	
	77	3	12	76	13	26	82	97	42	50	69
3		36	68	13	50	70	7		12	96	
4		27	72	14	22	83	7		48	84	
5		48	60	14	38	77	12		39	88	
12		32	69	19	22	82	12		47	84	
12		36	67	19	58	62	12		52	81	
12		48	59	22	34	77	16		63	72	
13		24	72	22	58	61	24		33	88	
24		27	68	35	38	70	25		60	72	
27		40	60	35	50	62	33		56	72	
32		48	51	89	8	36	81		39	52	72
40		45	48		9	28	84		47	60	60
79		6	11	78	15	36	80		48	56	63
		6	27	74	15	60	64		99	1	14
	6	38	69	17	24	84	1	70		70	
	6	43	66	24	28	81	2	31		94	
	11	42	66	24	48	71	2	49		86	
	18	21	74	24	57	64	10	26		95	
	18	34	69	36	36	73	10	65		74	
	21	30	70	36	55	60	14	14		97	
	21	38	66	39	48	64	14	47		86	
	27	34	66	91	6	18	89	14		58	79
81	1	28	76		6	26	87	17		26	94
	1	44	68		6	39	82	17	46	86	
	8	16	79		6	54	73	26	49	82	
	8	49	64		9	10	90	26	65	70	
	16	23	76		9	46	78	31	38	86	
	16	41	68		9	62	66	31	46	82	
	16	47	64		18	54	71	31	58	74	
	17	56	56	26	57	66	38	46	79		
	20	44	65	30	55	66	46	47	74		
	20	55	56	39	54	62	49	50	70		
	23	44	64	46	54	57	101	