

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 12 (1957)
Heft: 2

Artikel: Schraubung und Netzprojektion
Autor: Bereis, R. / Brauner, H.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-19207>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 14.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ändern. Man erhält:

$$E_{m+1} = E_m + \binom{m}{2}, \quad K_{m+1} = K_m + 3 \binom{m}{2}, \quad F_{m+1} = F_m + 1 + 3 \binom{m}{2}, \quad R_{m+1} = R_m + 1 + \binom{m}{2}.$$

Und hieraus ergibt sich mit $E_3 = 1$, $K_3 = 3$, $F_3 = 6$, $R_3 = 4$:

$$E_n = \binom{n}{3}, \quad K_n = 3 \binom{n}{3}, \quad F_n = 3 \binom{n}{3} + n, \quad R_n = \binom{n}{3} + n.$$

Hingegen ist es schwierig, die Gliederung im einzelnen zu kennzeichnen. Für jedes $n > 6$ ergeben sich jedenfalls wesentlich verschiedene Typen. Es scheint aber heute noch unmöglich zu sein, über die Anzahl der Typen allgemeine Aussagen zu machen. Der Beweis (Zurückführung auf die Verknüpfungs- und Anordnungsaxiome) dafür, dass der Fall $n = 6$ (der die Topologie der kubischen Raumkurven und kubischen Ebenengewinde begründet) stets denselben, im Vorangehenden anschaulich beschriebenen Gliederungstypus liefert, ist recht umständlich.

(Es folgen am eingangs genannten Orte weitere Bemerkungen und Übungen zum Thema.)

L. LOCHER-ERNST, Winterthur

Schraubung und Netzprojektion

Unter «*Netzprojektion*» versteht man jene Abbildung des projektiven Punktraumes auf die Punkte einer Bildebene, bei der die Strahlen eines Drehnetzes als Projektionsstrahlen fungieren; als Bildebene wird dabei die Mittelebene des Netzes verwendet. Der Netzriss eines Punktes P ist demnach der Bildspurpunkt des durch P legbaren Netzstrahles. Dieses Abbildungsverfahren wurde im Anschluss an eine Arbeit von L. TUSCHEL [1]¹⁾ von verschiedenen Gesichtspunkten aus untersucht [2], [3]. Das Ziel dieser Note ist es, die Netzprojektion auf elementarem Weg aus den *Gesetzen der euklidischen Schraubung* zu entwickeln und darüber hinaus einige Beispiele für die Fruchtbarkeit dieses Gedankens zu geben. Ausserdem sollen die Verhältnisse in der Bildebene konsequent unter Verwendung komplexer Zahlen beschrieben werden und so aufs neue die Zweckmässigkeit dieses Kalküls für die ebene Geometrie demonstriert werden.

Wir legen durch einen Punkt O der lotrecht gedachten Schraubachse z eine waagrechte Ebene μ und betrachten die Schraubtangente ihrer Punkte in der Rechtsschraubung mit dem Parameter p (im folgenden kurz «*Grundsraubung*» genannt). Ist r der Abstand eines Punktes A der Bildebene μ von O und α der Neigungswinkel der Schraubtangente a von A gegen μ , so gilt bekanntlich (Figur 1):

$$r \operatorname{tg} \alpha = p. \quad (1)$$

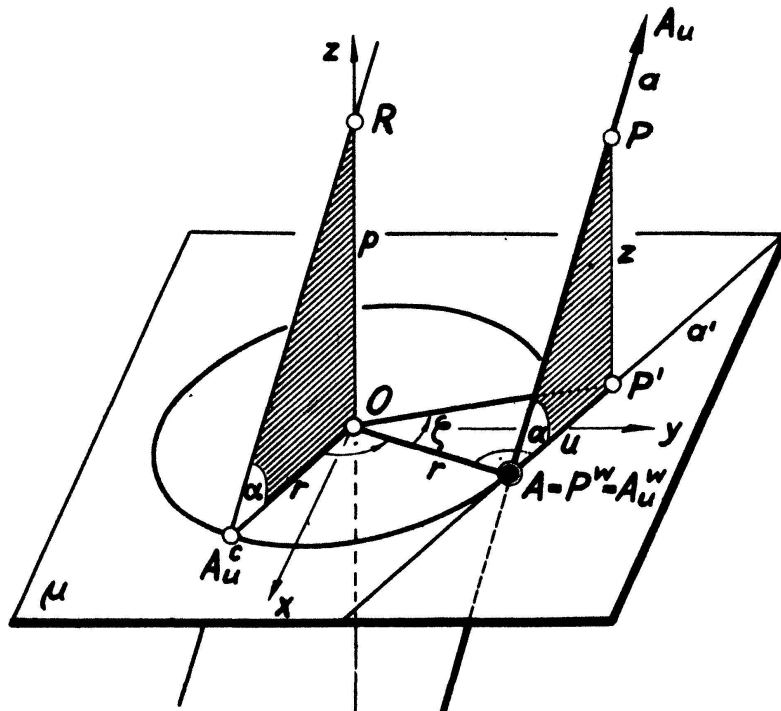
Die Gesamtheit dieser Schraubtangente a ist eine gewisse Strahlkongruenz \mathfrak{N} . Dreht sich die Schraubtangente a um die z -Achse, so überstreicht a ein Drehhyperboloid, dessen Nebenscheitel auf der z -Achse liegen und die Höhenkoten $\pm i p$ besitzen. \mathfrak{N} besteht daher aus den rechtsgewundenen Erzeugenden von ∞^1 koaxialen Dreh-

¹⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 40.

hyperboloiden mit gemeinsamen Nebenscheiteln, ist also ein *Drehnetz*. Diese kinematische Erzeugung eines Drehnetzes ist die Grundlage für die folgende kurze Darstellung der Gesetze der Netzprojektion.

Netzriss P^w eines Raumpunktes P

Liegt der Raumpunkt P auf der Bahntangente a des Punktes A von μ , so ist A der Netzriss P^w von P . Besitzt P die Höhenkote z und bezeichnet man den Abstand



Figur 1

Netzriss eines Raumpunktes.

seines Grundrisses P' von A mit u , so gilt (Figur 1):

$$\operatorname{tg} \alpha = p : r = z : u. \quad (2)$$

Ist ζ der gerichtete Winkel AOP' , so gilt ferner:

$$\operatorname{tg} \zeta = u : r. \quad (3)$$

Aus (2) und (3) erhält man

$$z = p \operatorname{tg} \zeta. \quad (4)$$

Dieser Winkel ζ heisst nach E. MÜLLER die «Winkelkote» von P . P^w geht somit aus P' durch eine *Drehstreckung* um O durch den Drehwinkel $-\zeta$ und dem Streckungsverhältnis $\cos \zeta : 1$ hervor (Figur 1).

Nimmt man O als Ursprung eines kartesischen Normalkoordinatensystems in der Ebene μ und fasst man die Koordinaten x, y eines Punktes A zu einer komplexen Zahl $A = x + iy$ zusammen (wir bezeichnen im folgenden die Punkte und die ihnen

zugeordneten komplexen Zahlen mit denselben Grossbuchstaben), so lautet die *Abbildungsgleichung der Netzprojektion* in komplexer Gestalt:

$$P^w = P' \cos \zeta e^{-i\zeta}. \tag{5}$$

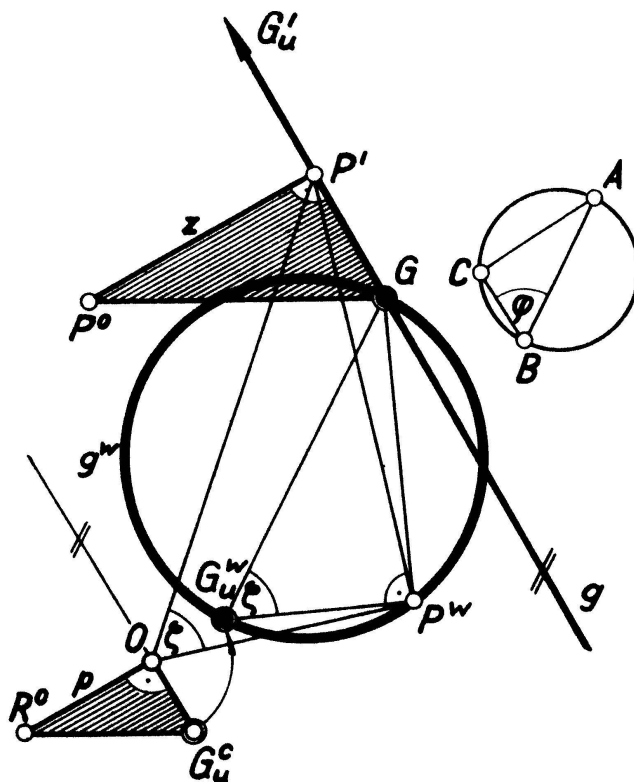
Jeder Punkt der Bildebene ist naturgemäss sein eigener Netzriss, für einen Fernpunkt jedoch versagt (5). Fasst man nach TH. SCHMID den Endpunkt R der Parameterstrecke der Grundschraubung als Auge einer Zentralprojektion nach μ auf, so ist der in μ liegende Gratpunkt A der Bahntangente a der Drehflucht Punkt von a [4]. A ist Netzriss sämtlicher Punkte von a , mithin auch des Fernpunktes A_μ von a (Figur 1).

Netzriss g^w einer Geraden g

Sind G und G_μ^c Spur- bzw. Fluchtpunkt einer Geraden g , so ist der Grundriss P' eines ihrer Punkte P gegeben durch die komplexe Zahl

$$P' = G - \lambda G_\mu^c. \tag{6}$$

Aus den ähnlichen Dreiecken $\triangle G_\mu^c O R$ und $\triangle G P' P$ (Figur 2 zeigt die nach μ umge-



Figur 2
Netzriss einer Geraden.

legten Dreiecke) folgt $z = \lambda p$, also nach (4) $\lambda = \operatorname{tg} \zeta$. Setzt man $P' = G - \operatorname{tg} \zeta G_\mu^c$ in (5) ein, so erhält man bei variablem ζ den Netzriss g^w von g als Ort der Punkte P^w

$$P^w = (G \cos \zeta - G_\mu^c \sin \zeta) e^{-i\zeta}. \tag{7}$$

Ist C ein Punkt des Kreises über den beiden Punkten A, B und bedeutet φ den orientierten Peripheriewinkel ABC , so besitzt C die Darstellung

$$C = (A \cos \varphi - i B \sin \varphi) e^{i\varphi}. \quad (8)$$

Durch Vergleich mit (7) erkennt man: *Das Netzbild g^w einer Geraden g ist ein Kreis über dem Durchmesser GG_u^w ; der Peripheriewinkel des Bogens von G zum Netzbild P^w eines Punktes P der Geraden g ist die negative Winkelkote von P .*

Der Netzriss einer μ -normalen Geraden l ist ein Kreis durch $O (=L_u^w)$, für eine μ -parallele Gerade jedoch versagt Formel (7). Nach (5) geht der Netzriss eines horizontalen Feldes aus seinem Grundriss durch eine Drehstreckung $(O; -\zeta, \cos \zeta : 1)$ hervor; das Netzbild einer horizontalen Geraden h ist daher eine Gerade h^w durch den Lotfusspunkt aus O auf den Grundriss h' , wobei der Winkel $h^w h'$ gleich ζ ist.

Netzumriss π^w einer (nicht waagrechten) Ebene π

Der Netzumriss π^w einer Ebene π ist das Netzbild des in π liegenden Projektionsstrahles. Sein Spurpunkt liegt naturgemäss auf der Spur p , sein Drehfluchtpunkt auf der Drehflucht p_u^w der Ebene π . Da der Spurpunkt eines Projektionsstrahles Netzriss seiner Punkte ist, fällt π^w in den Schnittpunkt von p mit p_u^w .

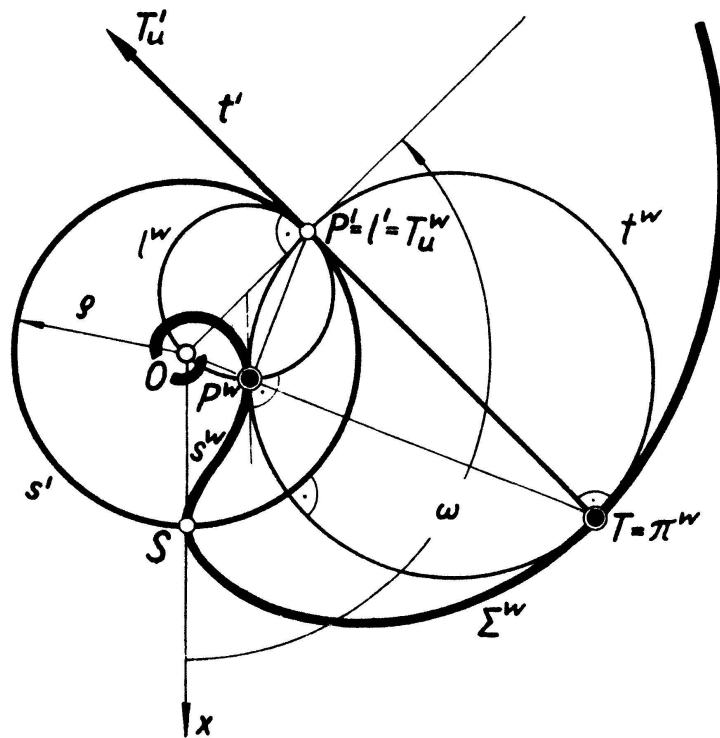
Die Ebene π besitzt in der Grundschraubung eine Grattangente t , deren Grundriss t' mit der Drehflucht p_u^w von π zusammenfällt [4]; der Netzumriss π^w von π ist daher *der Spurpunkt T ihrer Grattangente t .*

Damit sind die Grundlagen einer konstruktiven Behandlung der Netzprojektion gezeigt. Die kinematische Einführung des Abbildungsmittels der Netzprojektion legt die *Netzabbildung einer Schraubung* nahe. Dabei ergeben sich nicht uninteressante Zusammenhänge, wie an einigen Beispielen gezeigt werden soll.

Netzriss eines Schmiegeelementes (P, t, π) einer Schraublinie s der Grundschraubung

Ist P ein Punkt der Schraublinie s , t die Tangente in P an s und π die Schmiegeebene von s in P , so ist der Grundriss P' von P der Lotfusspunkt aus O auf den Grundriss t' der Grattangente t von π (Figur 3). P' liegt auf dem Grundriss s' von s , einem Kreis um O vom Radius ρ . Der Netzriss t^w von t ist ein Kreis, der durch den Spurpunkt T von t (Netzumriss π^w von π) und durch P' (Netzbild T_u^w des Fernpunktes T_u von t) geht; $P'T$ ist daher ein Durchmesser von t^w . Die lotrechte Gerade l durch P besitzt den Kreis mit dem Durchmesser OP' als Netzbild l^w ; im Restschnitt von t^w und l^w liegt das Netzbild P^w von P . Da t^w die beiden Kreise s' und l^w in P' normal durchsetzt, liegen *die Punkte $T = \pi^w$ und P^w invers zum Kreis s' .* – Durch Vorgabe des Netzbildes eines Bestandteiles des Schmiegeelementes ist dieses *zweideutig* festgelegt. Gibt man P^w bzw. $T = \pi^w$ vor, so sind die möglichen Gratpunkte der zugehörigen Schmiegeelemente jene Punkte des Drehzylinders durch s , die auf dem Strahl des Grunddrehnetzes durch P^w liegen. Ist jedoch t^w als Orthogonalkreis zu s' bekannt, so sind jene Punkte des Drehzylinders durch s mögliche Gratpunkte,

die auf jenem Strahl des zum Grundnetz coaxialen Drehnetzes vom Parameter 2ϕ aufgefädelt sind, dessen Spurpunkt die Mitte der gemeinsamen Sehne von t^w und s' ist. Dies folgt aus einer kurzen elementaren Überlegung.



Figur 3

Netzriss einer Schraublinie und Netzumriss einer Schraubtorse der Grundschraubung.

Netzriss s^w einer Schraublinie s und Netzumriss Σ^w einer Schraubtorse Σ der Grundschraubung

Durchläuft der Punkt P eine Schraublinie s der Grundschraubung, so beschreibt P^w ihr Netzbild s^w . Die Spurpunkte T der Tangenten t von s erfüllen die *Evolvente* von s' , die durch die komplexe Gleichung

$$T = \rho (1 - i \omega) e^{i\omega} \tag{9}$$

beschrieben wird, wenn der Bildspurpunkt S von s auf der positiven x -Achse angenommen wird (Figur 3). ω bedeutet dabei den Winkel, durch den S um O gedreht werden muss, um nach P' zu gelangen. Durch Inversion an s' geht die Kreisevolvente (9) über in das Netzbild s^w von s :

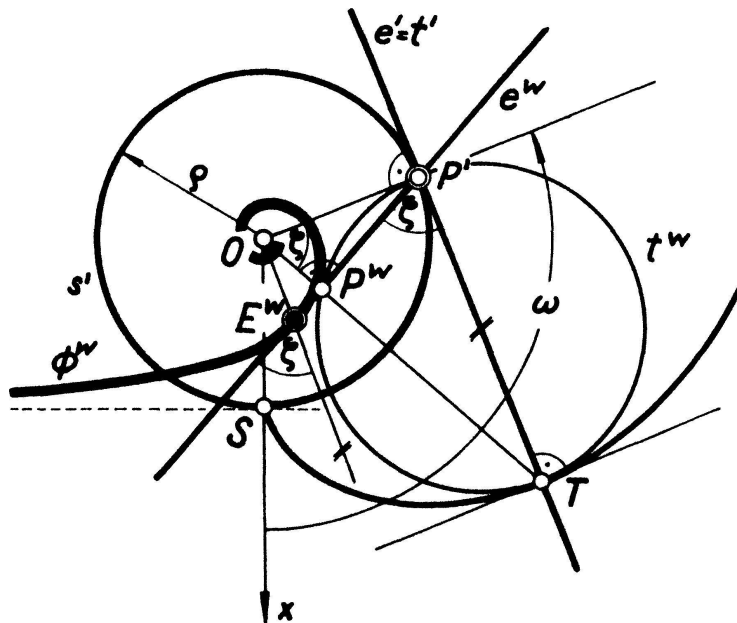
$$P^w = \rho^2 : \bar{T} = \frac{\rho}{1 + \omega^2} (1 - i \omega) e^{i\omega}. \tag{10}$$

Bei dieser Inversion gehen ferner die Tangenten t' von s' über in die s' berührenden Kreise l^w durch O . Da die Evolvente (9) die Gerade t' normal durchsetzt, ist s^w eine orthogonale Trajektorie der Kreisschar (l^w) . s^w ist somit eine *Kreistraktrix* vom parabolischen Typ, also eine *Traktrix complicata* [5], [6]. Durchläuft die Ebene π die Schraubtorse Σ mit der Gratlinie s , so beschreibt ihr Netzumriss π^w den Netzumriss

Σ^w ; Σ^w ist daher die Kreisevolvente (9). Fasst man dagegen Σ als Tangentenfläche von s auf, so tritt zur Kreisevolvente Σ^w noch der Netzriss s^w der Gratlinie s von Σ hinzu, gehört doch s zum wahren Umriss von Σ . Dies drückt sich auch im Netzbild aus. Die Kreise t^w sind Orthogonalkreise von s' und berühren die Kreisevolvente (9) in den Punkten T . t^w bleibt bei der betrachteten Inversion als Ganzes fest, muss daher die Kurve s^w im Punkt P^w berühren. Die Hüllkurve dieser Kreise t^w setzt sich daher aus der Spurkurve der Torse und ihrer Inversen bezüglich s' zusammen.

Netzumriss einer geraden, offenen Strahlschraubfläche Φ der Grundschraubung

Die Fläche Φ wird von den horizontalen Geraden e überstrichen, die den Drehzylinder durch eine Schraublinie s der Grundschraubung in den Punkten P von s berühren. Der Netzumriss Φ^w von Φ ist die Hüllkurve der Netzrisse e^w der Erzeugenden e von Φ . Ein solcher Netzriss e^w ist eine Gerade durch den Lotfusspunkt P' aus O auf den Grundriss e' von e und trägt P^w (Figur 4); e^w ist daher die Polare des Spurpunktes T der Schraubtangente t von P bezüglich des Kreises s' . Die Kurve Φ^w ist



Figur 4

Netzumriss einer geraden, offenen Strahlschraubfläche der Grundschraubung.

somit als Polarkurve der Kreisevolvente (9) eine *hyperbolische Spirale*. Die Evolvententangente in T steht normal zu t' und geht im Polarsystem über in den Berührungspunkt E^w von Φ^w mit e^w . E^w liegt also auf der Parallelen zu e' durch O , der Winkel $P'E^wO$ ist die Winkelkote ζ von P . Die Gleichung der Spirale Φ^w lautet daher:

$$E^w = -i \rho \operatorname{ctg} \zeta e^{i\omega}. \quad (11)$$

Da die Höhenkote z von P einerseits $\rho \operatorname{tg} \zeta$, andererseits (da P auf der Schraublinie s

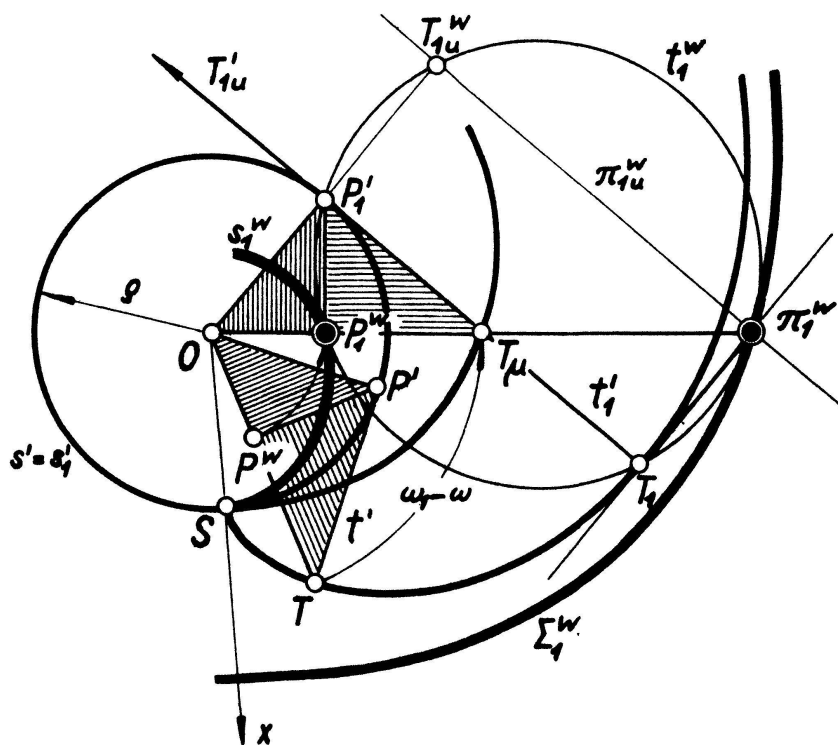
liegt) $p \omega$ beträgt, gilt $\omega = \operatorname{tg} \zeta$ und somit

$$E^w = \frac{\varrho}{i \omega} e^{i \omega}. \quad (12)$$

Treffen die Erzeugenden e die Schraubachse z , ist also Φ eine *Wendelfläche*, so bilden die Geraden e^w das Strahlbüschel O .

Netzriss s_1^w einer Schraublinie s_1 und Netzumriss Σ_1^w einer Schraubtorse Σ_1 , einer zur Grundsraubung coaxialen Schraubung

Durchläuft der Punkt P_1 eine Schraublinie s_1 einer zur Grundsraubung coaxialen Schraubung vom Parameter $p_1 = \mu p$ und ist P ein Punkt, der dieselbe Höhenkote wie P_1 besitzt und auf der Schraublinie s der Grundsraubung liegt, die denselben Bildspurpunkt S wie s_1 aufweist, so geht P_1' aus P' und P_1^w aus P^w durch eine Drehung



Figur 5

Netzriss einer Schraublinie und Netzumriss einer Schraubtorse einer coaxialen Schraubung.

um O durch den Winkel

$$\omega_1 - \omega = \omega \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right) \quad (13)$$

hervor (Figur 5). ω bzw. ω_1 ist dabei jener Winkel, durch den S um O gedreht werden muss, um nach P' bzw. P_1' zu gelangen. Die Gleichung des Netzbildes s_1^w von s_1 entsteht daher aus der Gleichung von s^w (10) durch Multiplikation mit $\exp i (\omega_1 - \omega)$ und lautet daher:

$$P_1^w = \frac{\varrho}{1 + \omega^2} (1 - i \omega) e^{i \omega / \mu}. \quad (14)$$

Unterwirft man den Spurpunkt T der Tangente t der Schraublinie s in P derselben Drehung um O , so ist der gedrehte Punkt T_μ zu P_1^w bezüglich s' invers. Ist T_1 der Spurpunkt der Tangente t_1 der Schraublinie s_1 in P_1 , so ist das Teilverhältnis

$$T_\mu T_1 : P_1' T_1 = \varrho (\omega_1 - \omega) : \varrho \omega_1 = 1 - \mu, \quad (15)$$

also konstant. P_1' ist die Krümmungsmitte der Evolvente (9) in T_1 , T_μ durchläuft daher die $(1 - \mu)$ -Zwischenevolute ([5], S. 275 ff.)

$$T_\mu = \varrho (1 - i \omega) e^{i \omega / \mu} \quad (16)$$

der Kreisevolvente (9), das heisst: *Das Netzbild einer coaxialen Schraublinie der Schraubung mit dem Parameter μp ist bezüglich ihres Grundrisskreises invers zur $(1 - \mu)$ -Zwischenevolute der Spurkurve ihrer Tangentenfläche.*

Die Tangentialebene π_1 der Torse Σ_1 von s_1 längs t_1 besitzt die Tangente in T_1 an die Evolvente (9) als Spur; auf ihr liegt der Netzumriss π_1^w von π_1 . Die Netzflucht π_{1u}^w von π_1 geht zufolge der Parameterrelation aus t_1' durch Streckung aus O im Verhältnis $1 : \mu$ hervor. π_1^w liegt auf π_{1u}^w , besitzt also von T_1 den konstanten Abstand $\varrho (1/\mu - 1)$. Der Netzumriss Σ_1^w der Schraubtorse Σ_1

$$\pi_1^w = \frac{\varrho}{\mu} (1 - i \omega) e^{i \omega / \mu} \quad (17)$$

ist demnach einerseits die $\varrho (1/\mu - 1)$ -Tangentiale der Spurkurve von Σ , andererseits zur $(1 - \mu)$ -Zwischenevolute (16) der Spurkurve zentrisch ähnlich. Fasst man dagegen Σ_1 als Tangentenfläche von s_1 auf, so tritt zum Netzumriss Σ_1^w noch der Netzumriss s_1^w der Gratlinie s_1 von Σ_1 hinzu. Die Kreise t_1^w berühren demnach – wie man aus Figur 5 leicht erkennt – sowohl s_1^w wie auch Σ_1^w .

Für $\mu = 1$ geht die $(1 - \mu)$ -Zwischenevolute (16) über in die Spurkurve (9) der Tangentenfläche, was obige Aussagen über Schraublinien und Schraubtorsen der Grundsraubung liefert.

In analoger Weise lassen sich die verschiedenartigsten, mit einer Schraubung verknüpften Probleme untersuchen, wie etwa die Netzabbildung von Schraubflächen, das mit einer Schraubung verbundene kubische Nullsystem sowie die automorphen involutorischen Korrelationen coaxialer Schraubungen, ferner Netzumrisse von Drehflächen mit lotrechter Achse usw. Über diese den hier gesteckten Rahmen überschreitenden Fragen wird an anderer Stelle berichtet werden.

R. BEREIS und H. BRAUNER, Wien

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] L. TUSCHEL, *Über die Schraubliniengeometrie und deren konstruktive Verwendung*. Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien 120, 233–254 (1911).
- [2] E. KRUPPA, *Über die Misesche Abbildung räumlicher Kräftesysteme*, Z. angew. Math. Mech. 4, 146–155 (1924).
- [3] F. HOHENBERG, *Parallelprojektion in nichteuklidischen Räumen*, Mh. Math. Phys. 42, 425–437 (1935).
- [4] TH. SCHMID, *Darstellende Geometrie II*, Sammlung Schubert, Bd. 66, 2. Aufl. (1923), S. 225 ff.

- [5] G. LORIA, *Spezielle algebraische und transzendente Kurven II* (Teubner, Leipzig 1911), S. 195 ff.
 [6] W. WUNDERLICH, *Über die Schleppkurven des Kreises*, Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien 156, 155–173 (1948).

Ungelöste Probleme

Nr. 16. Es sei K ein eigentlicher ebener Eibereich. Für einen inneren Punkt $P \in K$ bilde man das Integral des reziproken Stützabstandes

$$B(P) = \int \frac{ds}{p},$$

wobei ds das Längendifferential der Randkurve von K und p den Abstand der zugehörigen Stützgeraden von P bedeuten und die Integration über den gesamten Rand von K erstreckt werden soll. Es existiert dann die untere Grenze

$$B = \inf B(P) \quad [P \in K],$$

wo P alle inneren Punkte von K durchläuft.

In der von G. PÓLYA¹⁾ und seinen Mitarbeitern behandelten Theorie der physikalischen Eibereichsfunktionale spielt die Grösse

$$\Phi = A^2 B I^{-1},$$

wo A den Flächeninhalt und I das auf den Schwerpunkt bezogene Trägheitsmoment von K bezeichnen, eine wichtige Rolle als Vergleichsfunktional.

Nach einer durch zahlreiche Sonderuntersuchungen gestützten Vermutung von Herrn G. PÓLYA²⁾ gilt die Ungleichung

$$36 < \Phi \leq 54,$$

wo rechts Gleichheit für das reguläre Dreieck besteht, während die Schranke links durch sehr schmale gleichschenklige Dreiecke angenähert wird. Spezielle Zwischenwerte des interessanten Funktionals sind ferner:

$$\Phi = 4\pi^2 \quad [K = \text{Ellipse}]; \quad \Phi = 48 \quad [K = \text{Parallelogramm}].$$

Von verschiedenen Seiten wurde bisher vergeblich versucht, die obenstehende Ungleichung zu beweisen. H. HADWIGER

Aufgaben

Aufgabe 258. Von einer rationalen, bizirkularen Quartik q mit dem Doppelpunkt D kennt man eine der beiden (als reell vorausgesetzten) Doppelpunkt tangenten sowie die beiden restlichen aus D an q legbaren Tangenten t_1, t_2 samt ihren Berührungspunkten T_1, T_2 . Man konstruiere die Quartik, wenn t_1, t_2 ebenfalls reell sind.

R. BEREIS und H. BRAUNER, Wien

¹⁾ Vergleiche G. PÓLYA und G. SZEGÖ, *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics* (Princeton University Press 1951).

²⁾ Brief von G. PÓLYA an den Unterzeichneten vom 3. Juli 1956.