

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 12 (1957)  
**Heft:** 4

**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

diese Schwierigkeit umgehen, wenn man die einfachen Konfigurationen wie F. LEVI in folgender Weise verallgemeinert:

Wenn wir in einer Geraden eine endliche Teilstrecke durch einen einfachen Bogen ersetzen, der mit den beiden restlichen Halbstrahlen der Geraden je nur den betreffenden Endpunkt gemeinsam hat, so nennen wir die entstandene Kurve eine *Pseudogerade*. Eine Pseudogerade ist sozusagen eine «verbogene» Gerade. Wir sagen,  $m$  Pseudogeralden bilden eine einfache Konfiguration, wenn sich je zwei in genau einem Punkte schneiden und diese Schnittpunkte alle verschieden sind. Nun ist es stets möglich, eine 1-Verschiebung in bezug auf ein vorgegebenes Dreieck durchzuführen. Der Satz 3 gilt natürlich auch für einfache Konfigurationen mit Pseudogeralden. Ja, es gilt sogar der viel schärfere

**Satz 4.** *Notwendig und hinreichend dafür, dass eine rechteckige Matrix  $S$  mit  $m$  Spalten, deren Elemente gleich  $+1$  oder  $-1$  sind, zu einer einfachen Konfiguration von Pseudogeralden gehört, ist die gleichzeitige Gültigkeit der drei Bedingungen I, II, III von Satz 3, wenn  $m \neq 4$  vorausgesetzt ist.*

Der Beweis zu Satz 4 ist recht langwierig und kann hier nicht gegeben werden. Er findet sich in der bereits zitierten Arbeit<sup>5)</sup>. Dort ist auch das einzige Gegenbeispiel im Falle  $m = 4$  angegeben: Eine Matrix mit 4 Spalten und 15 Zeilen, die die drei Eigenschaften I, II, III besitzt und doch nicht durch 4 Geraden (oder Pseudogeralden) realisierbar ist.

G. RINGEL, Bonn

## Kleine Mitteilungen

### Quelques propriétés de coordonnées relatives à un triangle

Etant donné un triangle  $ABC$  quelconque, prenons sur les côtés  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  des points  $C'$ ,  $A'$ ,  $B'$  tels que  $\overline{AC'} = r \cdot \overline{AB}$ ,  $\overline{BA'} = s \cdot \overline{BC}$ ,  $\overline{CB'} = t \cdot \overline{CA}$ . Les droites  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  déterminent un nouveau triangle  $A''B''C''$  dont on calcule aisément l'aire  $V$ :

$$V = V_0 \frac{[(1-r)(1-s)(1-t) - rst]^2}{(1-s+sr)(1-r+rt)(1-t+ts)} \quad (V_0 = \text{aire } ABC).$$

Lorsque

$$rst = (1-r)(1-s)(1-t), \quad (1)$$

les trois points  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$  se confondent en un point  $P$ . On peut alors considérer les valeurs  $r$ ,  $s$ ,  $t$  comme des coordonnées triangulaires du point  $P$  par rapport au triangle  $ABC$ . Tout point  $P$  a des coordonnées bien déterminées, sauf les sommets  $A$ ,  $B$ ,  $C$  qui correspondent aux valeurs  $(0, s, 1)$ ,  $(1, 0, t)$ ,  $(r, 1, 0)$  ( $r, s, t$  quelconques). Inversement, si on se donne deux des trois valeurs, on détermine univoquement le point  $P$ , exception faite des sommets et des côtés du triangle. On peut dire que les coordonnées  $(r, s, t)$  engendrent une transformation birationnelle du plan du triangle sur la surface du troisième degré  $x \cdot y \cdot z = (1-x) \cdot (1-y) \cdot (1-z)$ , les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  étant singuliers.

Si l'on se donne 3 valeurs  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , vérifiant (1), et un triangle quelconque (non numéroté), on pourra trouver 12 points ayant ces trois nombres pour coordonnées (dans un ordre quelconque), par rapport au triangle  $ABC$  ou  $ACB$ ; si l'on choisit une des orientations du triangle, on aura les 12 points:

$$D(a, b, c); \quad E(b, c, a); \quad F(c, a, b); \quad G(1-a, 1-c, 1-b);$$

$$H(1-c, 1-b, 1-a); \quad J(1-b, 1-a, 1-c);$$

$$D'(a, c, b); \quad E'(b, a, c); \quad F'(c, b, a); \quad G'(1-a, 1-b, 1-c);$$

$$H'(1-c, 1-a, 1-b); \quad J'(1-b, 1-c, 1-a).$$

On peut établir par un simple calcul que:  $DJ, EH, FG, F'J', D'H', E'G'$  sont parallèles au côté  $AC$ ; les milieux de tous ces segments se trouvent sur la médiane issue de  $A$ . De plus  $\overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{FG} = 0, \overrightarrow{F'J'} + \overrightarrow{D'H'} + \overrightarrow{E'G'} = 0$ . Il en est de même pour les autres côtés. Par conséquent, les points  $DEFGHJ$  sont sur une conique ayant les médianes pour diamètres; comme les diamètres conjugués de ces médianes sont parallèles aux côtés opposés du triangle, cette conique est semblable à la conique  $c$  passant par  $A, B, C$  et ayant pour tangentes en ces points les parallèles aux côtés opposés. Il en est de même pour la conique passant par  $D'E'F'G'H'J'$  (figure 1).

Si deux des coordonnées  $r, s, t$ , sont rationnelles, la troisième l'est aussi. On peut se demander quels sont les points dont les 3 coordonnées triangulaires sont un multiple

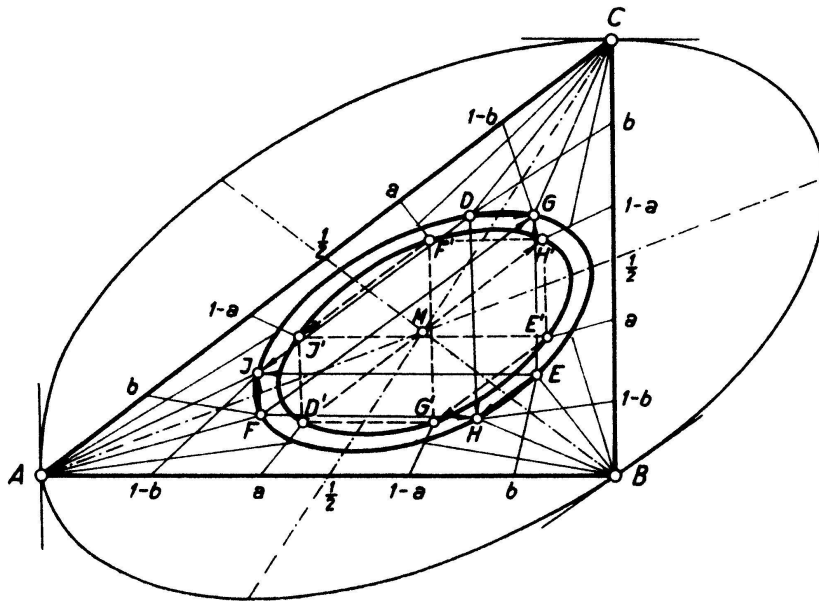


Figure 1

de  $1/n$  ( $n$  entier), ou, ce qui revient au même si l'on pose  $r = r'/n$  ( $r'$  entier), etc., quels sont les triplets de nombres entiers qui vérifient la relation

$$r' \cdot s' \cdot t' = (n - r') (n - s') (n - t').$$

Pour  $n = 1$ , il n'existe aucun point. Pour  $n = 2$ , il y a une infinité de points situés sur les médianes du triangle et pour lesquels  $s' + t' = 2, t' + r' = 2$  ou  $r' + s' = 2$ . Il y en a de même une infinité pour tout  $n$  pair, c'est pourquoi nous nous limiterons au cas:  $n$  impair.

Posons

$$R = \frac{r'}{n - r'}, \quad S = \frac{s'}{n - s'}, \quad T = \frac{t'}{n - t'}.$$

Comme  $R \cdot S \cdot T = 1$ , un des facteurs doit être positif; supposons donc

$$0 < r' < \frac{n}{2}; \quad 0 < R < 1; \quad ST > 1.$$

Comme  $S$  et  $T$  tendent vers  $-1$  lorsque  $s'$  et  $t'$  tendent vers l'infini, il ne peut y avoir qu'un nombre fini de solutions. On voit facilement que, si l'on choisit  $n < s' < t'$  ou

$n < s', t' < 0$ , on doit avoir

$$s' \leq n \frac{1 + \sqrt{R}}{1 - R}.$$

Les autres solutions correspondent aux 12 points que l'on associe à toute solution.

*Exemples*

$$n = 3; \quad r' = 1; \quad R = \frac{1}{2}; \quad s' = 4, \dots, 10.$$

Solutions: (1, 4, -3); (1, 5, -12); (1, 6,  $\infty$ ); (1, 7, 24); (1, 8, 15); (1, 9, 12).  
 Pour  $n = 3$ , on a donc  $n P_3 = \underline{6 \cdot 12}$  points.

$$n = 5; \quad r' = 1; \quad R = \frac{1}{4}; \quad s' = 6, \dots, 10.$$

Solutions: (1, 6, -10); (1, 7, 40); (1, 8, 15); (1, 10, 10).

$$n = 5; \quad r' = 2; \quad R = \frac{2}{3}; \quad s' = 6, \dots, 28.$$

Solutions: (2, 9, -10); (2, 10, -15); (2, 12, -35);  
 (2, 13, -60); (2, 14, -135); (2, 15,  $\infty$ );  
 (2, 16, 165); (2, 17, 90); (2, 18, 65);  
 (2, 20, 45); (2, 21, 40); (2, 25, 30).

$n P_5 = 16 \cdot 12$  points, etc.

Remarquons que, pour  $n = 3$  et  $n = 4$ , aucun des points obtenus ne tombe à l'intérieur du triangle  $ABC$ . Nous abordons ici le problème que M. SCHOPP a posé [n° 280, El. Math. 11, 114 (1956)]: Quelle est la première valeur de  $n$  pour laquelle on trouve un point situé dans le triangle. Il faut donc supposer  $r', s', t' < n$ . Comme  $n$  divise

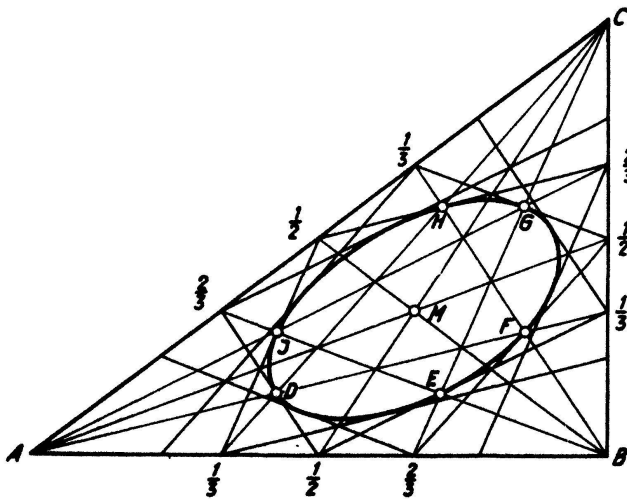


Figure 2

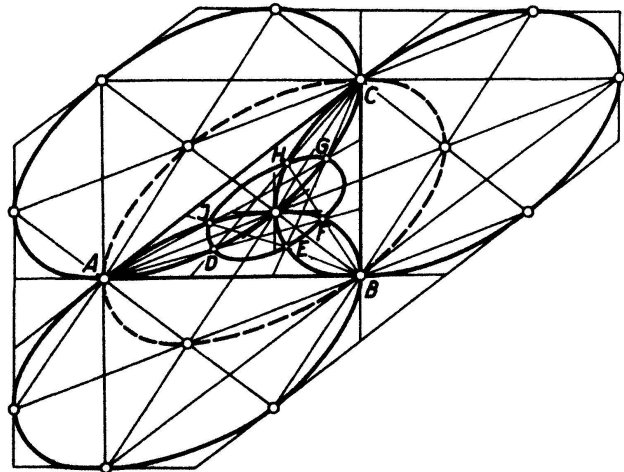


Figure 3

$r' \cdot s' \cdot t'$ , il faut que  $n$  ne soit pas premier, par conséquent  $n = 9, 15, 21, \dots$ . On vérifie que  $n = 9$  est impossible, mais que, pour  $n = 15$ , on a la solution  $r' = 10, s' = 10, t' = 3$ . Comme  $r' = s'$ , les 12 solutions générales sont confondues deux à deux en 6 points  $D, E, F, G, H, J$  qui sont sur une conique  $c$ , homothétique à la conique  $c(ABC)$  circonscrite à  $ABC$  et tangente en ces points aux parallèles des côtés opposés. L'aire de  $c(ABC)$  est 7 fois plus grande que celle de  $c$ . Les tangentes en  $D$  et  $E$  passent par le

milieu du côté  $AB$ . La tangente en  $D$  coupe le côté  $AC$  au tiers de  $AC$ . La deuxième tangente issue de ce point est parallèle à la tangente en  $E$  (figure 2). On a ainsi trois parallélogrammes circonscrits à la conique  $c$  et dont les côtés sont parallèles aux différentes droites joignant les sommets du triangle aux tiers des côtés opposés. Le pôle de  $DE$  étant au milieu de  $AB$ , la conique coupe les médianes en des points dont les tangentes sont parallèles aux côtés opposés correspondants. La conique  $c(AB)$  tangente en  $A$  et  $B$  aux droites  $AC$  et  $AB$  et passant par  $J$  passe aussi par  $F$ ; elle passe encore par  $M$ , intersection des médianes, et y a une tangente parallèle à  $AB$ . Les coniques  $c(BC)$  et  $c(CA)$  ont des propriétés analogues (figure 3). Ces trois coniques sont congruentes à la conique  $c(ABC)$ .

J.-P. SYDLER, Zurich

## Ungelöste Probleme

**Nr. 18.** Herr H. LENZ (München) macht uns auf die folgende ungeklärte Frage aufmerksam: Es sei  $k \geq 2$ ,  $A$  ein  $k$ -dimensionaler Eikörper von positivem Volumen  $V(A) > 0$ ,  $n \geq k + 1$  eine vorgegebene natürliche Zahl und  $P_n$  ein in  $A$  enthaltenes Eipolyeder mit höchstens  $n$  Eckpunkten. Für festes  $A$  und  $n$  sei

$$p_n = p_n(A) = \sup \frac{V(P_n)}{V(A)} \quad [P_n \subset A]$$

gesetzt. Die affinvariante Masszahl  $p_n$  bezeichnet also das Volumverhältnis, das sich bei einem dem Eikörper  $A$  eingelagerten zulässigen Eipolyeder  $P_n$  grösstmöglichen Volumens einstellt.

Wie A. M. MACBEATH<sup>1)</sup> mit Hilfe der von W. BLASCHKE<sup>2)</sup> und W. GROSS<sup>3)</sup> erfolgreich auf Sonderfälle angewandten Methode gezeigt hat, gilt

$$p_n(A) \geq p_n(E),$$

wobei  $E$  ein Ellipsoid bezeichnet. Die Ellipsoide haben demnach die extremale Eigenschaft, sich für die volummässige Approximation durch einbeschriebene Polyeder beschränkter Eckenzahl am schlechtesten zu eignen. Unbewiesen ist bis heute die Vermutung geblieben, dass die Ellipsoide die einzigen Eikörper mit dieser Eigenschaft sind, so dass für jedes Nichtellipsoid  $A$

$$p_n(A) > p_n(E) \quad [A \neq E]$$

gilt. In speziellen Fällen trifft dies in der Tat zu. Dies hat für  $n = k + 1$  bereits W. GROSS<sup>3)</sup> gezeigt. Für  $k = 2$  und  $n \geq 3$  wurde das nämliche von L. FEJES TÓTH<sup>4)</sup> mit Hilfe Fourierscher Reihen nachgewiesen.

<sup>1)</sup> A. M. MACBEATH, *An Extremal Property of the Hypersphere*, Proc. Camb. philos. Soc. 47, 245–247 (1951).

<sup>2)</sup> W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, II (Springer, Berlin 1923).

<sup>3)</sup> W. GROSS, *Über affine Geometrie*, XIII: *Eine Minimumseigenschaft der Ellipse und des Ellipsoids*, Leipziger Ber. 70, 38–54 (1918).

<sup>4)</sup> L. FEJES TÓTH, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum* (Springer-Verlag, Berlin, Göttingen und Heidelberg 1953).