

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 12 (1957)  
**Heft:** 5

**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 14.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Kleine Mitteilungen

### Formules sur les valeurs absolues des nombres réels

*Notations.*  $E \equiv \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$  l'ensemble des nombres réels indiqués.

Si  $a_1 > a_2 > \dots > a_s$ , alors

$$\left. \begin{aligned} \max_p E &\equiv a_{p+1} \\ \min_p E &\equiv a_{s-p} \end{aligned} \right\} p = 0, 1, 2, \dots, s-1,$$

avec  $\max_0 E \equiv \max E$  et  $\min_0 E \equiv \min E$ .

1. Nous avons démontré les formules suivantes:

$$\sum_{1 \leq n < m \leq 2k} |a_n - a_m| \equiv \sum_{i=1}^k (2i-1) (\max_{k-i} E - \min_{k-i} E), \quad (1)$$

$$\sum_{1 \leq n < m \leq 2k+1} |a_n - a_m| \equiv \sum_{i=1}^k 2i (\max_{k-i} E - \min_{k-i} E). \quad (2)$$

Comme point de départ dans l'établissement des formules (1) et (2) nous avons pris la formule connue

$$|a_n - a_m| \equiv \max(a_n, a_m) - \min(a_n, a_m).$$

Les formules (1) et (2) peuvent être démontrées par l'induction complète, mais nous omettons la démonstration.

2. Les identités indiquées (1) et (2) restent également valables si parmi les nombres  $a_1, a_2, \dots, a_s$  il y en a de tels qui sont égaux entre eux.

Dans ce cas

$$\max_p E = a_{p+1} = a_q,$$

lorsque

$$a_1 = a_2 = \dots = a_q > a_{q+1} \dots > a_s \quad (p < q).$$

3. Voici quelques formules particulières:

$$|a_1 - a_2| \equiv \max(a_1, a_2) - \min(a_1, a_2);$$

$$\begin{aligned} |a_1 - a_2| + |a_1 - a_3| \\ + |a_2 - a_3| \equiv 2 \{ \max(a_1, a_2, a_3) - \min(a_1, a_2, a_3) \}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |a_1 - a_2| + |a_1 - a_3| + |a_1 - a_4| \\ + |a_2 - a_3| + |a_2 - a_4| \\ + |a_3 - a_4| \equiv 3 \{ \max(a_1, a_2, a_3, a_4) - \min(a_1, a_2, a_3, a_4) \} \\ + \{ \max_1(a_1, a_2, a_3, a_4) - \min_1(a_1, a_2, a_3, a_4) \}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |a_1 - a_2| + |a_1 - a_3| + |a_1 - a_4| + |a_1 - a_5| \\ + |a_2 - a_3| + |a_2 - a_4| + |a_2 - a_5| \\ + |a_3 - a_4| + |a_3 - a_5| \\ + |a_4 - a_5| \\ \equiv 4 \{ \max(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) - \min(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \} \\ + 2 \{ \max_1(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) - \min_1(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& |a_1 - a_2| + |a_1 - a_3| + |a_1 - a_4| + |a_1 - a_5| + |a_1 - a_6| \\
& \quad + |a_2 - a_3| + |a_2 - a_4| + |a_2 - a_5| + |a_2 - a_6| \\
& \quad \quad + |a_3 - a_4| + |a_3 - a_5| + |a_3 - a_6| \\
& \quad \quad \quad + |a_4 - a_5| + |a_4 - a_6| \\
& \quad \quad \quad \quad + |a_5 - a_6| \\
& \equiv 5 \{ \max(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) - \min(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \} \\
& + 3 \{ \max_1(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) - \min_1(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \} \\
& + \{ \max_2(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) - \min_2(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \}; \\
& |a_1 - a_2| + |a_1 - a_3| + |a_1 - a_4| + |a_1 - a_5| + |a_1 - a_6| + |a_1 - a_7| \\
& \quad + |a_2 - a_3| + |a_2 - a_4| + |a_2 - a_5| + |a_2 - a_6| + |a_2 - a_7| \\
& \quad \quad + |a_3 - a_4| + |a_3 - a_5| + |a_3 - a_6| + |a_3 - a_7| \\
& \quad \quad \quad + |a_4 - a_5| + |a_4 - a_6| + |a_4 - a_7| \\
& \quad \quad \quad \quad + |a_5 - a_6| + |a_5 - a_7| \\
& \quad \quad \quad \quad \quad + |a_6 - a_7| \\
& \equiv 6 \{ \max(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) - \min(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) \} \\
& + 4 \{ \max_1(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) - \min_1(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) \} \\
& + 2 \{ \max_2(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) - \min_2(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) \}.
\end{aligned}$$

$\max_p(a_1, a_2, \dots, a_s)$  signifie le plus grand des nombres  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_s$ , où l'on a omis au préalable les  $p$  ( $p < s$ ) des plus grands parmi les nombres en question.

$\min_p(a_1, a_2, \dots, a_s)$  signifie le plus petit des nombres  $a_1, a_2, \dots, a_s$ , où l'on a omis, préalablement, les  $p$  ( $p < s$ ) des plus petits parmi ces nombres.

4. Cette note se rattache à la note suivante:

D. S. MITRINOVITCH, *Sur quelques identités élémentaires*, Rev. Math. élément. 10, 65-66 (1955)<sup>1</sup>.  
D. S. MITRINOVITCH, Belgrade

## Aufgaben

**Aufgabe 272.** Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que le produit de  $n$  nombres naturels, où  $n > 2$ , soit égal au produit du plus grand commun diviseur de ces nombres par leur plus petit commun multiple. W. SIERPIŃSKI, Varsovie

*Lösung:* Sind  $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$  die Exponenten der Primzahl  $p$  in der Zerlegung der natürlichen Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , dann ist  $\alpha_1$  der Exponent von  $p$  im grössten gemeinsamen Teiler  $T$  und  $\alpha_n$  der Exponent von  $p$  im kleinsten gemeinsamen Vielfachen  $V$ . Das Produkt der  $a_i$  ist dann und nur dann gleich  $TV$ , wenn für jede Primzahl  $p$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_n$$

gilt. Da die  $\alpha_i$  nichtnegativ sind, folgt daraus  $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$ . Wegen  $\alpha_1 \leq \alpha_2$  ist auch  $\alpha_1 = 0$ , das heisst,  $p$  kann nur in einem einzigen  $a_i$  aufgehen. Die  $a_i$  sind also paarweise teilerfremd.

Lösungen sandten A. ADAM (Debrecen), R. LAUFFER (Graz), J. SCHOPP (Budapest).

**Aufgabe 273.** Gegeben sind vier Kugeln  $K_1, K_2, K_3, K_4$  und ein Punkt  $P$ . Gesucht werden zwei sich in  $P$  berührende Kugeln, von denen die eine  $K_1$  und  $K_3$ , die andere  $K_2$  und  $K_4$  berührt. C. BINDSCHIEDLER, Küsnacht

<sup>1</sup>) Voir aussi: D. S. MITRINOVITCH, *Sur certaines relations restant valables si l'on permute les opérateurs y intervenant*, Bull. Soc. Math. Phys. Serbie 8, 15-22 (1956).