Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 13 (1958)

Heft: 2

Artikel: Das Taktionsproblem von Apollonius, angewandt auf die vier Berührungskreise eines Dreiecks

Autor: Aeppli, Alfred

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19772

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XIII Nr. 2 Seiten 25–48 Basel, 10. März 1958

Das Taktionsproblem von Apollonius, angewandt auf die vier Berührungskreise eines Dreiecks

1. Einleitung

Mit dem klassischen Taktionsproblem von APOLLONIUS, bei dem gefordert wird, alle Kreise zu finden, welche drei gegebene Kreise berühren, haben sich viele bedeutende Mathematiker beschäftigt. VIETA glaubte in seinem *Apollonius Gallus* (1600) die ursprüngliche Lösung von APOLLONIUS wieder entdeckt zu haben. Er zerlegte das Problem in zehn Einzelaufgaben, die er in einer bestimmten Reihenfolge mit Zirkel und Lineal löste, indem er bei jeder neuen Aufgabe die schon erhaltenen Resultate benutzte. DESCARTES stellte die Aufgabe seiner gelehrigen Schülerin, der Prinzessin Elisabeth, als Anwendung seiner Koordinatengeometrie. Sie fand auch durch grossen Fleiss und Ausdauer eine rechnerische Lösung, die aber so kompliziert war, dass sie praktisch wertlos ist. GERGONNE (1817) war der erste, der durch Anwendung der Descartesschen Methode seine berühmte allgemeine Lösung fand. Sein Kunstgriff bestand darin, dass er die Berührungskreise nicht selbst berechnete, sondern durch Kombination der Bedingungsgleichungen Eigenschaften der Berührungspunkte entdeckte. Seine Resultate können am einfachsten überblickt werden, indem man die Begriffe Ähnlichkeitspunkt und Ähnlichkeitsachse, Potenzlinie und Potenzpunkt, Pol und Polare einführt (MONGE, STEINER, PONCELET). Weitere elegante Konstruktionen ergaben sich durch Anwendung der Transformation durch reziproke Radien oder der Inversion (PLÜCKER, 1828). Bei Beschränkung auf unseren Spezialfall ist es nun möglich, mit den Mitteln der analytischen Geometrie einfache Konstruktionen der Berührungskreise zu finden, ihre Radien zu berechnen und interessante Beziehungen zwischen diesen Kreisen zu erhalten. Wie weit diese Resultate neu sind, ist sehr schwierig zu entscheiden, da es in den Fachzeitschriften eine ausgedehnte neuere Literatur über das Problem gibt. Da alle Berechnungen vollständig elementar sind, beschränken wir uns darauf, die Resultate anzugeben.

2. Konstruktive Lösung der Aufgabe

Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC mit seinen vier Berührungskreisen $K(\varrho)$, $K_1(\varrho_1)$, $K_2(\varrho_2)$, $K_3(\varrho_3)$; dabei bedeute ϱ den Inkreisradius und ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 die Radien der Ankreise, welche A, B bzw. C gegenüberliegen. Die Mittelpunkte dieser Kreise bezeichnen wir mit O, O_1, O_2, O_3. Wir stellen uns die Aufgabe, sämtliche Kreise, welche drei von diesen vier Berührungskreisen berühren, zu konstruieren. Es handelt sich also um die viermalige Lösung des Taktionsproblemes von APOLLONIUS. Wir wählen zuerst die Kreise K, K_2, K_3, das heisst, wir suchen alle Kreise, welche den Inkreis und den zweiten und dritten Ankreis eines gegebenen Dreieckes berühren. Bekanntlich kann es höchstens acht solche Kreise geben. Wenn wir die Gerade als Kreis mit unendlich grossem Radius auffassen, so wird hier die maximale Anzahl von Lösungen erreicht. Die Dreieckseiten a, b, c berühren K, K_2, K_3 und bedeuten daher drei Lösungen. Eine vierte Lösung ist der Kreis von FEUERBACH des gegebenen Dreiecks. Um die noch fehlenden vier Lösungen zu erhalten, benutzen wir das Mittendreieck $M_1M_2M_3$, das heisst, die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 der Dreieckseiten a, b, c werden als Ecken eines neuen Dreiecks gewählt. Die Mittelpunkte der Ankreise bzw. des Inkreises dieses Dreiecks bezeichnen wir mit A', B', C' bzw. H'. Man kann nun leicht beweisen, dass durch A' drei Kreise gehen, welche K, K_2 und K_3 berühren und deren Tangenten im Punkte A' parallel zu den Dreieckseiten a, b, c verlaufen. Damit kennt man von diesen drei Kreisen je einen Punkt mit zugehöriger Tangente und kann daher auf bekannte Weise die Berührungspunkte derselben mit den Kreisen K, K_2, K_3 konstruieren. Für die noch fehlende achte Lösung und den Feuerbach-Kreis bedeutet A' den äusseren Ähnlichkeitspunkt. Auch jetzt gestattet diese Eigenschaft, in Verbindung mit dem Satze von MONGE über die Lage der Ähnlichkeitspunkte dreier Kreise, die Berührungspunkte dieses letzten Kreises mit K, K_2 und K_3 zu konstruieren. Auf entsprechende Weise kann man die Berührungskreise von (K, K_3, K_1), (K, K_1, K_2) und (K_1, K_2, K_3) konstruieren; anstelle des Hilfspunktes A' tritt B', C' bzw. H'. Neben dem Kreise von FEUERBACH gibt es daher im allgemeinen noch 16 Kreise, welche je drei der vier Berührungskreise eines Dreiecks berühren; diese zerfallen in vier Gruppen von je vier Kreisen, welche je drei bestimmte der vier Berührungskreise berühren. Von diesen 16 Kreisen kann man auf die soeben angegebene Weise die Berührungspunkte mit den Berührungskreisen konstruieren.

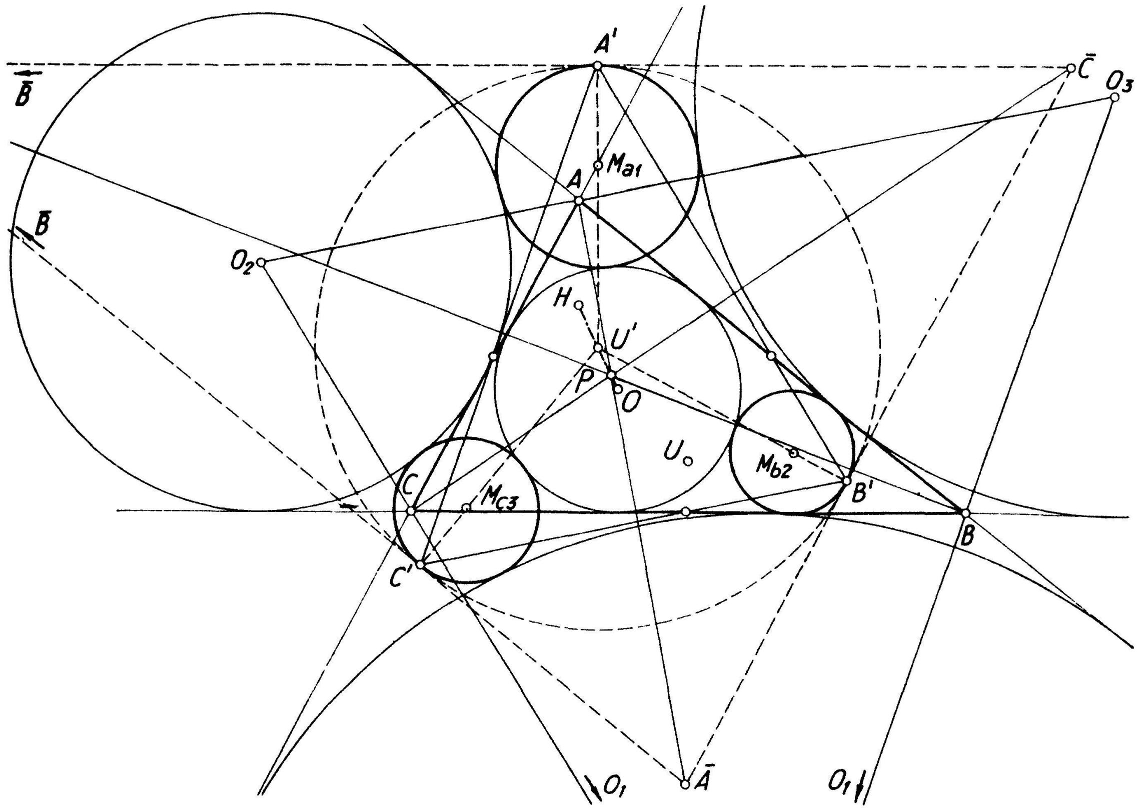
3. Bezeichnungen

K_{a1}, K_{a2}, K_{a3} sollen diejenigen Berührungskreise bedeuten, die durch A' gehen und in diesem Punkte eine Tangente besitzen, die parallel zu a, b bzw. c ist. K_a bedeutet denjenigen Berührungskreis, welcher mit dem Feuerbach-Kreis A' als äusseren Ähnlichkeitspunkt besitzt. K_{a1}, K_{a2}, K_{a3} und K_a sind daher die vier Kreise, welche K, K_2 und K_3 berühren. Entsprechend bezeichnen wir mit $(K_{b1}, K_{b2}, K_{b3}, K_b)$, $(K_{c1}, K_{c2}, K_{c3}, K_c)$ und $(K_{h1}, K_{h2}, K_{h3}, K_h)$ diejenigen Kreise, welche (K, K_3, K_1), (K, K_1, K_2) bzw. (K_1, K_2, K_3) berühren.

4. Eigenschaften der Kreise K_{a1}, K_{b2}, K_{c3}

(siehe Figur)

Der Umkreis des Dreiecks $A'B'C'$ berührt diese Kreise in den Punkten A', B' bzw. C'. Der Mittelpunkt U' dieses Umkreises halbiert die Strecke OH, und sein Radius ist gleich dem Umkreisradius r des gegebenen Dreiecks ABC; dabei bedeutet H den Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC. Die Tangenten in A', B' und C' bestimmen ein Dreieck $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, welches perspektiv ähnlich ist zum Dreieck ABC. Der Ähnlichkeitspunkt P dieser beiden Dreiecke teilt die Strecke OU' im Verhältnis $\varrho : r$ von innen und ist gleichzeitig Potenzzentrum der drei Kreise K_{a1}, K_{b2}, K_{c3}.



5. Die zwölf Berührungskreise

Die zwölf Berührungskreise, welche durch A', B', C' bzw. H' gehen, zerfallen in vier Gruppen von je drei Kreisen, wobei die Kreise einer Gruppe denselben Umkreis eines der Dreiecke $A'B'C'$, $A'B'H'$, $B'C'H'$ bzw. $C'A'H'$ berühren. Die Mittelpunkte dieser Umkreise halbieren die Strecken OH, O_3H, O_1H bzw. O_2H, und ihre Radien sind alle gleich dem Umkreisradius r des Dreiecks ABC.

Ist speziell $1/a = 1/b + 1/c$, so fallen die Kreise K_a, K_{b3}, K_{c2} und K_{h1} zusammen mit dem Umkreis des Dreiecks $B'C'H'$. Ein solches Dreieck besitzt also ausser dem Feuerbach-Kreis noch einen zweiten Kreis, welcher alle vier Berührungskreise berührt, sein Mittelpunkt halbiert die Strecke O_1H, und sein Radius ist gleich r. Für diesen Kreis und den Feuerbach-Kreis ist A' äusserer Ähnlichkeitspunkt.

6. Eigenschaften der Kreise K_a, K_b, K_c, K_h

Die Mittelpunkte M_a, M_b, M_c, M_h dieser Kreise liegen auf einer Geraden g, welche durch den Umkreismittelpunkt U des Dreiecks ABC geht, und es gilt

$$\overrightarrow{M_hU} : \overrightarrow{M_aU} : \overrightarrow{M_bU} : \overrightarrow{M_cU} = -s : (s-a) : (s-b) : (s-c),$$

wobei
$$s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Für die kürzesten Abstände der Ecken A, B bzw. C von der Geraden g gilt
$$d_A : d_B : d_C = \frac{b^2-c^2}{a^2} : \frac{c^2-a^2}{b^2} : \frac{a^2-b^2}{c^2}.$$

Die Schnittpunkte der Seiten des Dreiecks $A'B'C'$ mit g sind die äusseren Ähnlichkeitspunkte der Kreise K_a, K_b, K_c, und die Schnittpunkte der Höhen desselben Dreiecks mit g sind die innern Ähnlichkeitspunkte des Kreises K_h mit den Kreisen K_a, K_b und K_c.

7. Die Radien der 17 Berührungskreise

Die Radien der 17 Berührungskreise können auf folgende Weise aus den Seiten a, b, c des gegebenen Dreiecks berechnet werden:

Für den Radius des Feuerbach-Kreises gilt $r_f = a\,b\,c/8\,F$.

Dann findet man:

$$r_a = \left(\frac{a-b}{c} + \frac{a-c}{b} + \frac{b+c}{a} - 1\right) r_f, \qquad r_b = \left(\frac{b-c}{a} + \frac{b-a}{c} + \frac{c+a}{b} - 1\right) r_f,$$

$$r_c = \left(\frac{c-a}{b} + \frac{c-b}{a} + \frac{a+b}{c} - 1\right) r_f, \qquad r_h = \left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + 1\right) r_f.$$

$$\begin{array}{l|l|l|l}
r_{a1} = -\left(\dfrac{a}{b+c}\right) r_a & r_{b1} = \left(\dfrac{a}{c-b}\right) r_b & r_{c1} = \left(\dfrac{a}{b-c}\right) r_c & r_{h1} = \left(\dfrac{a}{b+c}\right) r_h \\
r_{a2} = \left(\dfrac{b}{c-a}\right) r_a & r_{b2} = -\left(\dfrac{b}{a+c}\right) r_b & r_{c2} = \left(\dfrac{b}{a-c}\right) r_c & r_{h2} = \left(\dfrac{b}{c+a}\right) r_h \\
r_{a3} = \left(\dfrac{c}{b-a}\right) r_a & r_{b3} = \left(\dfrac{c}{a-b}\right) r_b & r_{c3} = -\left(\dfrac{c}{a+b}\right) r_c & r_{h3} = \left(\dfrac{c}{a+b}\right) r_h
\end{array}$$

Speziell für ein rechtwinkliges Dreieck ($\gamma = 90°$) reduzieren sich diese Formeln auf:

$$\begin{array}{l|l|l|l}
r_a = \dfrac{c^2-a\,b}{4\,(s-b)} & r_b = \dfrac{c^2-a\,b}{4\,(s-a)} & r_c = \dfrac{c^2+a\,b}{4\,s} & r_h = \dfrac{c^2+a\,b}{4\,(s-c)} \\
r_{a1} = -\left(\dfrac{c^2-a\,b}{4\,s}\right) & r_{b1} = \dfrac{c^2-a\,b}{4\,(s-c)} & r_{c1} = -\dfrac{c^2+a\,b}{4\,(s-b)} & r_{h1} = \dfrac{c^2+a\,b}{4\,(s-a)} \\
r_{a2} = \dfrac{c^2-a\,b}{4\,(s-c)} & r_{b2} = -\left(\dfrac{c^2-a\,b}{4\,s}\right) & r_{c2} = -\left(\dfrac{c^2+a\,b}{4\,(s-a)}\right) & r_{h2} = \dfrac{c^2+a\,b}{4\,(s-b)} \\
r_{a3} = \dfrac{c\,(c^2-a\,b)}{4\,(b-a)\,(s-b)} & r_{b3} = \dfrac{c\,(c^2-a\,b)}{4\,(a-b)\,(s-a)} & r_{c3} = \dfrac{c\,(c^2+a\,b)}{4\,(a+b)\,s} & r_{h3} = \dfrac{c\,(c^2+a\,b)}{4\,(a+b)\,(s-c)}
\end{array}$$

Die Vorzeichen dieser Kreisradien sind folgendermassen festgesetzt: Alle Kreise sollen im Gegenuhrzeigersinne durchlaufen werden; dann begegnen sich bei äusserer Berührung im Berührungspunkte zwei entgegengesetzt gerichtete Drehungen, bei innerer Berührung dagegen sind in dem Berührungspunkte die Umlaufsinne beider

Kreise gleichgerichtet. Daher wollen wir äussere Berührung zweier Kreise als negative, innere Berührung als positive Berührung bezeichnen. Ein Berührungsradius erhält nun das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem die Anzahl der negativen, das heisst äusseren Berührungen, gerade oder ungerade ist. Ausnahme: r_f wird immer positiv gewählt.

Aus den Formeln für die Berührungskreisradien kann man folgende weitere Resultate gewinnen:

1. Für heronische bzw. pythagoreische Dreiecke werden alle Radien rational.
2. Für rechtwinklige Dreiecke gibt es vier Paare gleicher Berührungskreise. Man kann zeigen, dass sie symmetrisch liegen in bezug auf die Winkelhalbierende des rechten Winkels oder seines Nebenwinkels.
3. Es gelten folgende Spaltenbeziehungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_{a1}}+\frac{1}{r_{a2}}+\frac{1}{r_{a3}}+\frac{1}{r_f}&=0,\\
\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_{b1}}+\frac{1}{r_{b2}}+\frac{1}{r_{b3}}+\frac{1}{r_f}&=0,\\
\frac{1}{r_c}+\frac{1}{r_{c1}}+\frac{1}{r_{c2}}+\frac{1}{r_{c3}}+\frac{1}{r_f}&=0,\\
\frac{1}{r_h}+\frac{1}{r_{h1}}+\frac{1}{r_{h2}}+\frac{1}{r_{h3}}-\frac{1}{r_f}&=0.
\end{aligned}\right\}\quad A$$

4. Weiter gelten folgende Zeilenbeziehungen:

$$\left.\begin{aligned}
r_a+r_b+r_c-r_h+4\,r_f&=0,\\
r_{a1}+r_{b1}+r_{c1}-r_{h1}+4\,r_f&=0,\\
r_{a2}+r_{b2}+r_{c2}-r_{h2}+4\,r_f&=0,\\
r_{a3}+r_{b3}+r_{c3}-r_{h3}+4\,r_f&=0.
\end{aligned}\right\}\quad B$$

5. Einige weitere einfache Formeln sind:

$$\frac{1}{r_a-r_f}+\frac{1}{r_b-r_f}+\frac{1}{r_c-r_f}=\frac{1}{r_h+r_f},$$

$$F_\Delta=\varrho\sqrt{\varrho\,(4\,r_h-\varrho)}=\varrho_1\sqrt{\varrho_1\,(4\,r_a-\varrho_1)}=\varrho_2\sqrt{\varrho_2\,(4\,r_b-\varrho_2)}=\varrho_3\sqrt{\varrho_3\,(4\,r_c-\varrho_3)},$$

$$\varrho\,r_h+\varrho_1\,r_a+\varrho_2\,r_b+\varrho_3\,r_c=4\,r^2.$$

8. Allgemeiner Satz

Die Gleichungen A sind Spezialfälle von folgendem allgemeinem Satze, den man auch mit den Hilfsmitteln der analytischen Geometrie beweisen kann: *Die Summe der reziproken Werte der Radien der acht Berührungskreise von drei beliebigen Kreisen* *ist gleich Null,* dabei müssen die Radien auf die oben angegebene Weise als relative Zahlen aufgefasst werden.

Betrachtet man die verlängerten Seiten des Dreiecks ABC als drei Kreise von unendlich grossem Radius und beachtet, dass vier Berührungskreise dieser Kreise auch unendlich gross sind, so geht dieser allgemeine Satz über in die bekannte Beziehung:

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} - \frac{1}{\varrho} = 0 .$$

ALFRED AEPPLI, Zürich

Ungelöste Probleme

Nr. 22. L. FEJES TÓTH[1]) gab für eine heute noch nicht vollständig bewiesene Aussage die nachfolgend wiedergegebene Einkleidung:

a) Ist A eine Punktmenge in der Ebene E und befindet sich in E eine Kreisscheibe K in zufallsartig bestimmter Lage und ist W die Wahrscheinlichkeit dafür, dass K genau einen Punkt der Menge A bedeckt, so gilt

$$W \leqq \sqrt{48} - 6 = 0{,}928 \ldots .$$

Eine anschaulich-geometrische Formulierung der gleichen Behauptung ist die folgende:

b) Durch lauter kongruente Kreisbereiche lassen sich höchstens 92,8% der Ebene einfach bedecken.

Endlich wollen wir die Aussage noch genauer formulieren:

c) In der Ebene E sei eine Menge M kongruenter Kreisbereiche K von positivem Radius $R > 0$ vorgegeben. Es bezeichne T die Menge derjenigen Punkte in E, die genau einem Kreis K der Kreismenge M angehören. Ist S_r ein Kreisbereich vom Radius r um einen festen Ursprung Z der Ebene E als Zentrum, so gilt

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{F(S_r \cap T)}{\pi r^2} \leqq \sqrt{48} - 6 ,$$

wo F den Flächeninhalt und $S_r \cap T$ den Durchschnitt des Kreisbereichs S_r mit der Punktmenge T bezeichnet. In der obenstehenden Ungleichung gilt dann das Gleichheitszeichen, wenn M aus abzählbar-unendlich vielen Kreisen vom Radius R besteht, deren Mittelpunkte ein rhombisches Punktgitter bilden, wobei der Fundamentalrhombus den spitzen Winkel $\varphi = \pi/3$ und die Seitenlänge $s = \sqrt{2 + \sqrt{3}}\, R = 1{,}931 \ldots R$ aufweist.

Unsere Abbildung zeigt die erwähnte extremale Kreismenge M, wobei der unschraffierte Teil der Ebene E die Menge T darstellt, während die Schraffur die Menge der durch die Kreisbereiche von M keinfach oder zweifach überdeckten Punkte andeutet.

---

[1]) L. FEJES TÓTH, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum* (Springer-Verlag, Berlin, Göttingen und Heidelberg 1953), insbesondere S. 97/98.