

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 13 (1958)
Heft: 5

Rubrik: Ungelöste Probleme

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 02.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ten, dass B_n je ein Glied mit der Periode 2 und der Periode 5 enthalten muss; $(-1)^n$ hat die Periode 2, $\Omega(n)$ die Periode 5. SYLVESTER hat für diese periodischen Anteile den Begriff *Wellenfunktion* geprägt.

Nach (5) ist nun etwa

$$A_{100} = \sum_{k=0}^{10} B_k B_{100-10k}.$$

Berechnet man die hierin vorkommenden B_k auf Grund von (12), so findet man

$$\begin{aligned} A_{100} &= 1 \cdot 541 + 1 \cdot 442 + 2 \cdot 353 + 2 \cdot 274 + 3 \cdot 205 + 4 \cdot 146 \\ &\quad + 5 \cdot 97 + 6 \cdot 58 + 7 \cdot 29 + 8 \cdot 10 + 10 \cdot 1 = 4562 \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit dem in (2) angegebenen Wert.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] L. EULER, *Introductio in analysin infinitorum*, Opera omnia, series I, volumen VIII (Leipzig-Berlin 1922), speziell Kap. 16, *De partitione numerorum*, S. 313–338.
- [2] G. POLYA und G. SZEGÖ, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Band I (Berlin 1925).
- [3] E. NETTO, *Lehrbuch der Kombinatorik*, 2. Aufl. (Leipzig-Berlin 1927).
- [4] P. A. MAC MAHON, *Combinatory Analysis*, Proc. Lond. Math. Soc. 28, 5–12 (1897).
- [5] J. J. SYLVESTER, *The Partitions of Numbers*, Proc. Lond. Math. Soc. 28, 33–96 (1897).
- [6] W. AHRENS: *Altes und Neues aus der Unterhaltungsmathematik* (Berlin 1918), S. 34–40.
- [7] P. VON SCHAEWEN, *Bericht über ein Preisausschreiben*, Z. math. naturw. Unterricht 42, 192–195 (1911).
- [8] L. BIEBERBACH, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, Bd. 1, 4. Aufl. (Leipzig 1934), S. 177.
- [9] G. POLYA, *Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen*, Acta math. 68, 145–253 (1937).

M. JEGER, Luzern

Ungelöste Probleme

Nr. 25. Eine euklidische Punktmenge A weist die Dreipunktconvexitätseigenschaft auf, wenn A mit drei Punkten $P, Q, R \in A$ stets wenigstens eine der drei Verbindungsstrecken QR, RP, PQ ganz enthält. Diese schwächere Variante zu der üblichen Konvexitätsbedingung wurde von F. A. VALENTINE¹⁾ eingehend untersucht. Es ist naheliegend, eine erschöpfende direkte Charakterisierung derjenigen Punktmenge zu suchen, welche die erwähnte Dreipunktforderung erfüllen. Diese Aufgabe – übrigens eine typische Fragestellung kombinatorisch-geometrischer Art – ist aber anscheinend nicht leicht zu lösen. Lediglich für ebene Punktmenge kann eine Antwort gegeben werden.

F. A. VALENTINE bewies die folgende Aussage: *Eine abgeschlossene Punktmenge A der euklidischen Ebene mit der Dreipunktconvexitätseigenschaft lässt sich als Vereini-*

¹⁾ F. A. VALENTINE, *A Three Point Convexity Property*, Pacific J. Math. 7, 1227–1235 (1957).

gungsmenge von $n \leq 3$ abgeschlossenen und konvexen Punktmengen darstellen; die Zahl 3 kann nicht durch eine kleinere ersetzt werden.

Mühe los kann man schliessen, dass sich A in $n = 2$ abgeschlossene, konvexe und disjunkte Teilmengen zerlegen lässt, wenn A nicht zusammenhängend ist. Ein nicht triviales Problem liegt lediglich dann vor, wenn A zusammenhängend ist.

Es ist unseres Wissens nicht gelungen, einen analogen Satz für räumliche Punktmengen zu finden. Nachdem auch der Unterzeichnete vergeblich versuchte, die Frage abzuklären, soll diese in unserer Rubrik Aufnahme finden: Das Problem lautet: *Gibt es ein räumliches Analogon zum Valentinschen Satz über ebene abgeschlossene Punktmengen mit der Dreipunktconvexitätseigenschaft?* H. HADWIGER

Kleine Mitteilungen

Bemerkung zu der Arbeit von Herrn G. Kirschmer

«Über eine mit den Pythagoräischen Zahlen zusammenhängende Gruppe»¹⁾

Durch eine Abänderung der von Herrn G. KIRSCHMER gewählten Normierung kann man den Aufbau der Gruppe besonders durchsichtig machen.

Die Gruppe \mathfrak{G} enthalte die Elemente $G = (a|b; c)$, wobei die Bedingungen $c^2 = a^2 + b^2$; a, b, c reell; $c > 0$ erfüllt sein sollen. Die Verknüpfungsvorschrift wird nachher angegeben werden.

Wir führen noch die komplexe Zahl $\alpha = a + ib$ ein. Dann ist $|\alpha| = c$. Die Bedingung $c > 0$ ist gleichbedeutend mit $\alpha \neq 0$.

Wir fassen nun die Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ ins Auge, die die Elemente $\overline{G} = (\alpha; |\alpha|)$ enthält. Als Verknüpfungsvorschrift bietet sich von selbst dar

$$\overline{G}_1 \circ \overline{G}_2 = (\alpha_1 \alpha_2; |\alpha_1 \alpha_2|). \quad (1)$$

Wie man sieht, ist $\overline{\mathfrak{G}}$ eine zur multiplikativen Gruppe des Körpers der komplexen Zahlen isomorphe Gruppe.

Da die Beziehung

$$\alpha_1 \alpha_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \quad (2)$$

gilt, so wird \mathfrak{G} eine zu $\overline{\mathfrak{G}}$ isomorphe Gruppe, wenn man setzt

$$G_1 \circ G_2 = ((a_1 a_2 - b_1 b_2) | (a_1 b_2 + a_2 b_1); c_1 c_2). \quad (3)$$

Eine Untergruppe $\mathfrak{G}_{\text{Gauss}}$ von \mathfrak{G} erhält man, wenn man a und b auf rationale Zahlen beschränkt; $\mathfrak{G}_{\text{Gauss}}$ ist isomorph der multiplikativen Gruppe des Körpers, den man aus dem Körper der rationalen Zahlen durch Adjunktion von i gewinnt.

Verlangt man auch noch, dass c rational ausfällt, so entsteht eine Untergruppe $\mathfrak{G}_{\text{Pyth}}$ von $\mathfrak{G}_{\text{Gauss}}$. Diese Untergruppe hat in arithmetischer (zahlentheoretischer) Hinsicht einiges Interesse.

Wir führen ein Beispiel an:

$$(3|4; 5) \circ (5|12; 13) = (-33|56; 65). \quad (4)$$

Es ist leicht zu sehen, wie der bei $\overline{\mathfrak{G}}$ bzw. \mathfrak{G} angegebene Aufbau zu modifizieren ist, wenn man statt vom Körper der reellen Zahlen vom Schiefkörper der Quaternionen ausgeht; man erhält dann natürlich eine nicht kommutative Gruppe.

¹⁾ El. Math. 12, 49ff. (1957).