**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft
**Band:** 13 (1958)
**Heft:** 5

**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

*gungsmenge von $n \leqq 3$ abgeschlossenen und konvexen Punktmengen darstellen; die Zahl 3 kann nicht durch eine kleinere ersetzt werden.*

Mühelos kann man schliessen, dass sich $A$ in $n = 2$ abgeschlossene, konvexe und disjunkte Teilmengen zerlegen lässt, wenn $A$ nicht zusammenhängend ist. Ein nicht triviales Problem liegt lediglich dann vor, wenn $A$ zusammenhängend ist.

Es ist unseres Wissens nicht geglückt, einen analogen Satz für räumliche Punktmengen zu finden. Nachdem auch der Unterzeichnete vergeblich versuchte, die Frage abzuklären, soll diese in unserer Rubrik Aufnahme finden: Das Problem lautet: *Gibt es ein räumliches Analogon zum Valentinschen Satz über ebene abgeschlossene Punktmengen mit der Dreipunktkonvexitätseigenschaft?* H. HADWIGER

# Kleine Mitteilungen

## Bemerkung zu der Arbeit von Herrn G. Kirschmer «Über eine mit den Pythagoräischen Zahlen zusammenhängende Gruppe»[1])

Durch eine Abänderung der von Herrn G. KIRSCHMER gewählten Normierung kann man den Aufbau der Gruppe besonders durchsichtig machen.

Die Gruppe $\mathfrak{G}$ enthalte die Elemente $G = (a|b; c)$, wobei die Bedingungen $c^2 = a^2 + b^2$; $a, b, c$ reell; $c > 0$ erfüllt sein sollen. Die Verknüpfungsvorschrift wird nachher angegeben werden.

Wir führen noch die komplexe Zahl $\alpha = a + i\,b$ ein. Dann ist $|\alpha| = c$. Die Bedingung $c > 0$ ist gleichbedeutend mit $\alpha \neq 0$.

Wir fassen nun die Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ ins Auge, die die Elemente $\overline{G} = (\alpha; |\alpha|)$ enthält. Als Verknüpfungsvorschrift bietet sich von selbst dar

$$\overline{G}_1 \circ \overline{G}_2 = (\alpha_1\,\alpha_2;\ |\alpha_1\,\alpha_2|). \tag{1}$$

Wie man sieht, ist $\overline{\mathfrak{G}}$ eine zur multiplikativen Gruppe des Körpers der komplexen Zahlen isomorphe Gruppe.

Da die Beziehung

$$\alpha_1\,\alpha_2 = (a_1\,a_2 - b_1\,b_2) + i\,(a_1\,b_2 + a_2\,b_1) \tag{2}$$

gilt, so wird $\mathfrak{G}$ eine zu $\overline{\mathfrak{G}}$ isomorphe Gruppe, wenn man setzt

$$G_1 \circ G_2 = ((a_1\,a_2 - b_1\,b_2)\,|\,(a_1\,b_2 + a_2\,b_1);\ c_1\,c_2). \tag{3}$$

Eine Untergruppe $\mathfrak{G}_{Gauss}$ von $\mathfrak{G}$ erhält man, wenn man $a$ und $b$ auf rationale Zahlen beschränkt; $\mathfrak{G}_{Gauss}$ ist isomorph der multiplikativen Gruppe des Körpers, den man aus dem Körper der rationalen Zahlen durch Adjunktion von $i$ gewinnt.

Verlangt man auch noch, dass $c$ rational ausfällt, so entsteht eine Untergruppe $\mathfrak{G}_{Pyth.}$ von $\mathfrak{G}_{Gauss}$. Diese Untergruppe hat in arithmetischer (zahlentheoretischer) Hinsicht einiges Interesse.

Wir führen ein Beispiel an:

$$(3|4;\ 5) \circ (5|12;\ 13) = (-33|56;\ 65). \tag{4}$$

Es ist leicht zu sehen, wie der bei $\overline{\mathfrak{G}}$ bzw. $\mathfrak{G}$ angegebene Aufbau zu modifizieren ist, wenn man statt vom Körper der reellen Zahlen vom Schiefkörper der Quaternionen ausgeht; man erhält dann natürlich eine nicht kommutative Gruppe.

[1]) El. Math. *12*, 49ff. (1957).

Wir bemerken noch, dass die Gruppeneigenschaft von $\mathfrak{G}$ erhalten bleibt, wenn man für $a, b, c$ statt reeller Zahlen Elemente eines angeordneten Körpers wählt; ersetzt man noch die Bedingung $c > 0$ durch $c \neq 0$, so kann man von einem völlig beliebigen Körper ausgehen, insbesondere also auch von dem Körper der komplexen Zahlen. Die Gruppeneigenschaft von $\mathfrak{G}$ drückt sich nämlich in gewissen Identitäten aus, und diese gelten für einen beliebigen Körper.

Es soll noch deutlich gemacht werden, wie die hier dargelegte Normierung mit der von Herrn KIRSCHMER zugrunde gelegten zusammenhängt, und zwar zunächst an einem Beispiel. Nach unserer Normierung gilt, wenn man die im vorigen Absatz gemachte Bemerkung beachtet,

$$(5 \,|\, 3\,i;\, 4) \circ (13 \,|\, 5\,i;\, 12) = (80 \,|\, 64\,i;\, 48),$$

nach der Normierung von Herrn KIRSCHMER ist

$$(5;\, 3;\, 4) \circ (13;\, 5;\, 12) = (80;\, 64;\, 48).$$

Allgemein kann dieser einfache Zusammenhang so ausgedrückt werden: Bei uns wird die bekannte Identität benutzt

$$(a_1^2 + b_1^2)\,(a_2^2 + b_2^2) = (a_1\,a_2 - b_1\,b_2)^2 + (a_1\,b_2 + a_2\,b_1)^2. \tag{5}$$

Setzt man hier ein

$$a_k = r_k, \quad b_k = i\,s_k,$$

so erhält man die Identität

$$(r_1^2 - s_1^2)\,(r_2^2 - s_2^2) = (r_1\,r_2 + s_1\,s_2)^2 - (r_1\,s_2 + r_2\,s_1)^2, \tag{6}$$

und diese liegt bei Herrn KIRSCHMER zugrunde. P. SENGENHORST, Münster

## Über eine Extremaleigenschaft des Simplex im $n$-dimensionalen Raum

Es sei $P$ ein beliebiger Punkt im Innern eines Simplex $A_i$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ des $n$-dimensionalen Raumes. Die Ecktransversale durch $A_i$ schneidet den gegenüberliegenden Grenzraum in $B_i$ $(i = 1, \ldots, n+1)$. Bezeichnen wir mit $R_i$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ die Strecke $\overline{PA_i}$, mit $d_i$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ die Strecke $\overline{PB_i}$, so gilt die Ungleichung

$$\prod_{i=1}^{n+1} R_i \geqq n^{n+1} \prod_{i=1}^{n+1} d_i. \tag{1}$$

*Beweis:* Seien $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ die baryzentrischen Koordinaten von $P$ bezüglich der Eckpunkte des Simplex, so gilt

$$\frac{R_i}{d_i} = \frac{x_1 + \cdots + x_{i-1} + x_{i+1} + \cdots + x_{n+1}}{x_i}. \tag{2}$$

Verwenden wir die bekannte Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel, so folgt aus (2)

$$\frac{R_i}{d_i} \geqq \frac{n\,(x_1\,x_2 \cdots x_{i-1}\,x_{i+1} \cdots x_{n+1})^{1/n}}{x_i}$$

und hieraus

$$\prod_{i=1}^{n+1} \frac{R_i}{d_i} \geqq \prod_{i=1}^{n+1} \frac{n\,(x_1\,x_2 \cdots x_{i-1}\,x_{i+1} \cdots x_{n+1})^{1/n}}{x_i}\,;$$

weiterhin

$$\prod_{i=1}^{n+1} \frac{R_i}{d_i} \geqq n^{n+1} \prod_{i=1}^{n+1} \frac{(x_i^n)^{1/n}}{x_i}. \tag{3}$$

Aus (3) folgt unmittelbar die Behauptung (1).

Gleichheit tritt nur dann ein, wenn sämtliche $x_i$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ gleich sind, also wenn $P$ der Schwerpunkt des Simplex ist. Bezeichnen wir jetzt mit $r_i$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ den Abstand des $A_i$ gegenüberliegenden Grenzraumes von $P$, so gilt auch die Ungleichung

$$\prod_{i=1}^{n+1} R_i \geqq n^{n+1} \prod_{i=1}^{n+1} r_i. \tag{1*}$$

*Beweis:* Es ist leicht einzusehen, dass

$$d_i \geqq r_i \; (i = 1, \ldots, n+1). \tag{2*}$$

So folgt aus (1) und (2*) unmittelbar die Behauptung (1*).

Gleichheit tritt nur dann ein, wenn sämtliche Ecktransversalen durch den Schwerpunkt zu dem gegenüberliegenden Grenzraum senkrecht stehen, das heisst, wenn das Simplex regulär ist.

Die Behauptung der Ungleichung (1*) ist für $n = 2$ längst bekannt. Ein Polygonungleichungssatz von FEJES TÓTH[1]) enthält auch (1*) für $n = 2$.

Einen elementaren Beweis der Ungleichung (1*) gab unlängst BERKES[2]) für den Fall $n = 2$, und $n = 3$.

J. SCHOPP, Budapest

*Anmerkung der Redaktion:* Herr J. BERKES teilte uns nachträglich mit, dass die in seinem Artikel verwendete Methode auch zum Beweis für ein allgemeines $n$ benutzt werden kann. Der wesentliche Schritt in seiner Ableitung ist erschienen als Aufgabe Nr. 329 (dieser Band, S. 67).

## Tetrahedra Equivalent to Cubes by Dissection

It is known that one cannot, in general, dissect a tetrahedron by plane cuts into a finite number of pieces which can be assembled to form a cube[1]). However, special cases can be so dissected. Among these are three one-parameter families of tetrahedra and one special tetrahedron described by M. J. M. HILL[2]). In a recent publication[3]), J.-P. SYDLER described four new special dissectible tetrahedra, designated by the symbols $T_1$, $T_2$, $T_3$ and $T_4$, which are not included in the cases described by HILL.

The tetrahedron $T_1$ has a trirectangular vertex. The tetrahedron $T_2$ is formed by joining $T_1$ with a symmetric tetrahedron at one of the right-triangular faces. SYDLER seems to have overlooked the possibility of combining these two tetrahedra at the other right-triangular faces. These will give the new tetrahedra designated by $T_5$ and $T_6$ in the accompanying table.

[1]) L. FEJES TÓTH, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum* (Springer-Verlag, Berlin 1953), S. 33.

[2]) J. BERKES, *Einfacher Beweis und Verallgemeinerung einer Dreiecksungleichung*, El. Math. *12*, 121–123 (1957).

[1]) M. DEHN, *Über den Rauminhalt*, Math. Ann. *55*, 465–478 (1902).

[2]) M. J. M. HILL, *Determination of the Volume of Certain Species of Tetrahedrons*, Proc. London Math. Soc. *27*, 39–52 (1896).

[3]) J.-P. SYDLER, *Sur les tétraèdres équivalents à un cube*, El. Math. *11*, 78–81 (1956).

| Edge | HILL, first type | | HILL, second type | | HILL, third type | | HILL, special | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Length | Dihedral angle | Length | Dihedral angle | Length | Dihedral angle | Length | Angle |
| $AB$ | $\sin\alpha$ | $\alpha$ | $2\sin\alpha$ | $\alpha$ | $2\sin\alpha$ | $\alpha$ | $3^{1/2}$ | $\pi/3$ |
| $AC$ | $3^{1/2}\cos\alpha$ | $\pi/3$ | $3^{1/2}\cos\alpha$ | $\pi/3$ | $12^{1/2}\cos\alpha$ | $\pi/6$ | $2^{1/2}$ | $\pi/2$ |
| $AD$ | $1$ | $\pi/2$ | $2$ | $\pi/2$ | $\sqrt{2+\sin^2\alpha}$ | $\pi-\cos^{-1}(3^{-1/2}\cos\alpha)$ | $2$ | $\pi/4$ |
| $BC$ | $1$ | $\pi/2$ | $\sqrt{5\sin^2\alpha-1}$ | $\pi-\cos^{-1}[(\cot\alpha)/2]$ | $2$ | $\pi/2$ | $1$ | $\pi/2$ |
| $BD$ | $\sin\alpha$ | $\pi-2\alpha$ | $2\sin\alpha$ | $\pi/2-\alpha$ | $\sin\alpha$ | $\pi-2\alpha$ | $3^{1/2}$ | $\pi/3$ |
| $CD$ | $\sin\alpha$ | $\alpha$ | $\sqrt{5\sin^2\alpha-1}$ | $\cos^{-1}[(\cot\alpha)/2]$ | $\sqrt{2+\sin^2\alpha}$ | $\cos^{-1}(3^{-1/2}\cos\alpha)$ | $2^{1/2}$ | $\pi/2$ |

| Edge | SYDLER, $T_1$ | | SYDLER, $T_2$ | | SYDLER, $T_3$ | | SYDLER, $T_4$ | | GOLDBERG, $T_5$ | | GOLDBERG, $T_6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Length | Angle | Length | Angle | Length | Angle | Length | Angle | Length | Angle | Length | Angle |
| $AB$ | $\tau$ | $\pi/2$ | $3^{1/2}$ | $2\pi/3$ | $5^{1/4}\tau^{1/2}$ | $\pi/5$ | $5^{1/4}\tau^{1/2}$ | $\pi/5$ | $5^{1/4}\tau^{1/2}$ | $2\pi/5$ | $5^{1/4}\tau^{1/2}$ | $4\pi/5$ |
| $AC$ | $\tau^{-1}$ | $\pi/2$ | $5^{1/4}\tau^{1/2}$ | $\pi/5$ | $3^{1/2}$ | $\pi/3$ | $3^{1/2}$ | $\pi/3$ | $3^{1/2}$ | $\pi/3$ | $5^{1/4}\tau^{-1/2}$ | $\pi/5$ |
| $AD$ | $1$ | $\pi/2$ | $5^{1/4}\tau^{1/2}$ | $\pi/5$ | $2$ | $\pi/2$ | $2\tau^{-1}$ | $\pi/2$ | $3^{1/2}$ | $\pi/3$ | $5^{1/4}\tau^{-1/2}$ | $\pi/5$ |
| $BC$ | $3^{1/2}$ | $\pi/3$ | $5^{1/4}\tau^{-1/2}$ | $2\pi/5$ | $5^{1/4}\tau^{-1/2}$ | $3\pi/5$ | $5^{1/4}\tau^{-1/2}$ | $\pi/5$ | $5^{1/4}\tau^{-1/2}$ | $2\pi/5$ | $3^{1/2}$ | $\pi/3$ |
| $BD$ | $5^{1/4}\tau^{1/2}$ | $\pi/5$ | $5^{1/4}\tau^{-1/2}$ | $2\pi/5$ | $3^{1/2}\tau^{-1}$ | $\pi/3$ | $3^{1/2}\tau^{-1}$ | $2\pi/3$ | $5^{1/4}\tau^{-1/2}$ | $2\pi/5$ | $3^{1/2}$ | $\pi/3$ |
| $CD$ | $5^{1/4}\tau^{-1/2}$ | $2\pi/5$ | $2$ | $\pi/2$ | $5^{1/4}\tau^{-3/2}$ | $2\pi/5$ | $5^{1/4}\tau^{-3/2}$ | $3\pi/5$ | $2\tau$ | $\pi/2$ | $2\tau^{-1}$ | $\pi/2$ |

All the known tetrahedra $ABCD$, which can be deformed by dissection into cubes, are given in the table, where $\pi/3 < \alpha < \pi/2$. At the suggestion of H. S. M. COXETER, the table has been simplified by the use of the relation $\sin\alpha = \sqrt{1+r^2}/2$ which replaces HILL's parameter $r$ by the new parameter $\alpha$. Also, the relation $\tau = (\sqrt{5}+1)/2$ simplifies SYDLER's surds. M. GOLDBERG, Washington, D.C.

## Wochentag-Mathematik

Braucht man schnell den Wochentag eines historischen Datums, so benützt man eine Tabelle, die man irgendwo hat und meistens nicht findet. Daher ist es nützlich, den Wochentag nach einer Methode bestimmen zu können, die man leicht im Gedächtnis behält.

Es sollen zwei Methoden vorgeführt werden. Bei der ersten braucht man einen beliebigen Kalender, bei der zweiten geht es auch ohne Kalender. Freilich sind bei der zweiten Methode Regeln zu merken, jedoch diese Regeln können in manchen Fällen eine recht einfache Gestalt annehmen. Will man zum Beispiel den Wochentag des 18. 9. 1456 wissen, so fügt man diese drei Zahlen zusammen, hängt eine Null an und dividiert durch 7. Kommt als Rest 0, so bedeutet dies Samstag. Bei einem andern Rest zählt man vom Samstag so viele Tage weiter, als der Rest anzeigt. Im obigen Fall ist also zu bilden 18914560 : 7, Rest 0, Samstag. Der Wochentag vom 20. 3. 1208 wird gefunden aus 20312080 : 7, Rest 5, also Donnerstag.

### *Die Kalendermethode*

Man ermittelt den Wochentag von Weihnachten und schliesst dann mit Hilfe eines beliebigen Kalenders auf die Wochentage der übrigen Daten. Den Wochentag von Weihnachten findet man beim Julianischen Kalender durch Anhängen einer Null an die Jahreszahl bei Schaltjahren. Bei Gemeinjahren hängt man an die Jahreszahl des vorhergehenden Schaltjahres statt der Null die Anzahl der seit jenem Schaltjahr verflossenen Jahre an. Man bildet bei 1456 also 14560, bei 1457 bildet man 14561, bei 1458 kommt 14562 usw. Dividiert man diese Zahl durch 7, so ist der Rest die Wochentagszahl für Weihnachten; für 1456 also Samstag, für 1457 Sonntag, für 1458 Montag, denn 14562 : 7 gibt Rest 2. Algebraisch drückt man dies aus für die Jahreszahl $J$, indem man sagt $J:4$, Rest $r$, und die Wochentagszahl $w$ erhält man aus $[10\,(J-r)+r]:7$, Rest $w$.

Will man den Wochentag vom 20. Juli 1456 wissen und hat man einen Kalender von 1958, so sieht man, dass 1958 Weihnachten an einem Donnerstag ist und der 20. Juli an einem Sonntag. Der 20. Juli ist also um 3 Tage voraus. Da 1456 Weihnachten an einem Samstag war, muss der 20. Juli an einem Dienstag gewesen sein, 3 Wochentage später. Diesen Schluss zieht man für Daten ab 1. März. Für Jänner und Februar sucht man den Wochentag von Weihnachten des Vorjahres, der zugleich der Wochentag von Neujahr ist.

Dies alles gilt wohlgemerkt nur für den Julianischen Kalender. Für den Gregorianischen Kalender ist eine kleine Korrektur anzubringen, von der die Rede sein wird, nachdem für die Weihnachtsmethode der Beweis geliefert ist. Bei diesem Beweis geht man so vor:

Man entnimmt einer Tabelle, dass der 1. Jänner 1 ein Samstag war; dann war auch der 25. Dezember des Jahres 0 ein Samstag. Gäbe es keine Schaltjahre, so würde man den Weihnachtswochentag $w$ von $J$ finden aus $J:7$, Rest $w$. Weil nun jede vierteilige Jahreszahl die eines Schaltjahres ist und in einem solchen der Weihnachtswochentag um 2 Tage vorrückt, so findet man $w$ aus

$$\left(J + \frac{J-r}{4}\right) : 7, \quad \text{Rest } w,$$

wobei $r$ sich aus $J:4$, Rest $r$, ergibt. Der Rest $w$ bleibt derselbe, wenn zum Dividend ein Vielfaches von 7 hinzugefügt wird, zum Beispiel

$$7\,J + 7\,\frac{J-r}{4} - 7\,r,$$

wobei zu betonen ist, dass $(J - r)/4$ eine ganze Zahl ist. Wir bekommen demnach

$$\left(J + 7J + \frac{J-r}{4} + 7\,\frac{J-r}{4} - 7r\right) : 7, \quad \text{Rest } w,$$

oder

$$(8J + 2J - 2r - 7r) : 7, \quad \text{Rest } w,$$

oder

$$(10J - 9r) : 7, \quad \text{Rest } w,$$

oder

$$[10\,(J - r) + r] : 7, \quad \text{Rest } w.$$

Damit ist die Methode bewiesen. Will man den Weihnachtswochentag beim Gregorianischen Kalender wissen, so bedenke man, dass dieser Kalender seit 1900 dem Julianischen um 13 Tage voraus ist. Wir rechnen also in den Julianischen Kalender um und sagen: Wenn im Julianischen Kalender der Weihnachtswochentag in einem Jahr ab 1900 $w$ ist, so ist er im Gregorianischen 13 Wochentage früher oder einen Wochentag später, also $w + 1$. Ab 1800 ist der Unterschied 12 Tage, ab 1700 ist er 11 Tage, und ab 1582 ist er 10 Tage. Daher bekommen wir für den Weihnachtswochentag ab 1800 $w + 2$, ab 1700 $w + 3$, ab 1582 $w + 4$.

Diese Korrektur ist unschwer zu merken. Man kann sie aber eleganter gestalten, wenn man statt $w + 1$ sagt $w + 1 - 1001$. Das kann man tun, weil 1001 durch 7 ohne Rest teilbar ist. Braucht man also den Weihnachtswochentag von 1958, so bildet man zuerst julianisch 19562 : 7, Rest 4, und dann gregorianisch (19562 – 1000) : 7 oder 18562 : 7, Rest 5, Donnerstag. Man hat also, statt $w + 1$ zu bilden, die Jahrhundertzahl 19 um 1 vermindert auf 18. Ab 1800 vermindert man die Jahrhundertzahl um 2, ab 1700 um 3, ab 1582 um 4. Braucht man den Wochentag von Weihnachten 1600, so bildet man 12000 : 7, Rest 2.

## *Die Jahreszeiten-Methode*

Die kalenderlose Methode kann man auch die Jahreszeiten-Methode nennen, und wir werden gleich sehen warum. Brauchen wir den Wochtentag vom $x$-ten März, und haben wir bereits den Weihnachtswochentag $w$, so sieht man aus dem Kalender, dass der 1. März 2 Tage gegen $w$ voraus ist, der 0. März also um 1 Tag. Wir finden demnach den Wochentag $w'$ des $x$-ten März aus $(w + 1 + x) : 7$, Rest $w'$, oder wenn wir Vielfache von 7 hinzuzählen, $999999\,x + 299999$, aus $(w + 1000000\,x + 300000) : 7$, Rest $w'$, oder ganz allgemein aus $[1000000\,x + 300000 + 10\,(J - r) + r] : 7$, Rest $w'$, für den julianischen Kalender, und mit der Korrektur an der Jahrhundertzahl für den Gregorianischen Kalender. Man findet also $w'$ vom 27. 3. 1187 aus 27311843 : 7, Rest 6, Freitag, und $w'$ vom 20. 3. 1958 aus 20318562 : 7, Rest 5, Donnerstag.

Wie mit dem März kann man es nicht auch mit dem April machen, sondern nur mit dem Juni, dem September und dem Dezember, also mit den Monaten, in denen eine Jahreszeit beginnt. Die Daten der andern Monate muss man in ein Datum eines Jahreszeitmonats verwandeln. Der $x$-te April ist der $(31 + x)$-te März, der $x$-te Mai der $(31 + 30 + x)$-te März, der $x$-te August der $(30 + 31 + x)$-te Juni, der $x$-te Februar der $(31 + 31 + x)$-te Dezember. Bei Jänner und Februar ist also der Weihnachtswochentag des Vorjahres zu nehmen.

Sehr zu achten ist bei diesen Bildungen auf den Stellenwert. Das Monatsdatum muss an der Millionenstelle stehen, die Monatszahl an der Hunderttausenderstelle. Will man also den Wochentag vom 7. 4. 30 wissen, so bildet man 38 300 282 : 7, Rest 6, Freitag, das heisst, die Jahreszahl muss immer vierstellig sein. Aus 30 hat man 0030 zu machen.

Deshalb ist auch bei der Monatszahl 12 für den Dezember eine Korrektur vorzunehmen. Man kann nicht die zweistellige Zahl 12 an die einstellige Hunderttausenderstelle setzen. Es stellt sich heraus, dass es genügt, statt 12 bloss 2 zu setzen. Befragt man einen Kalender, so ist der 0. Dezember (30. November) gegen den Weihnachtswochentag um 3 Tage voraus. Man findet also $w'$ des $x$-ten Dezember aus $(w + 3 + x) : 7$, Rest $w'$, oder aus $(w + 3 + 199997 + x + 999999\,x) : 7$, Rest $w'$, oder $(1000000\,x + 200000 + w) : 7$, Rest $w'$.

Der 0. September ist gegen $w$ auch um 3 Tage voraus, daher könnte man beim September ebenfalls 2 an die Hunderttausenderstelle setzen. Da aber der September die Monatszahl 9 hat, setzt man 9 statt 2, was man unbeschadet des Restes tun kann. Beim 0. Juni ist der Wochentag gegen $w$ um 2 Tage voraus. Man addiert 599998, ein Vielfaches von 7, zu 2, und bekommt damit 600000 oder 6 an die Hunderttausenderstelle, die Monatszahl des Juni. Damit ist auch die Jahreszeiten-Methode erklärt und bewiesen. Bei Daten vor Christus zieht man das Jahr von 7001 ab und behandelt den Rest wie ein Jahr nach Christus. Der Judenkalender beginnt mit Montag, dem 7. 10. 3761 v. Chr. ($7001 - 3761 = 3240$; $37\,932\,400:7$, Rest 2.)

*Rechenvorteile*

Unangenehm sind die langen Zahlen, die durch 7 zu dividieren sind, aber da gibt es Rechenvorteile. Man teilt die Zahl in die üblichen Dreiergruppen ab und bestimmt von jeder Gruppe den Rest. Bei den Tausendergruppen ist der Rest negativ zu nehmen. Zum Beispiel 38300282 : 7, Rest 6, wird zu

$$38\,300\,282 : 7$$

oder

$$(+3 \quad -6 \quad +2) : 7, \quad \text{Rest } -1 .$$

Aus dem negativen Rest $-1$ wird $+6$ durch Anfügung von $+7$. Der Grund dieses Vorgehens ist, dass 999999 und 1001 Vielfache von 7 sind.

Auch für die dreistellige Zahl $HZE$ (*H*underter, *Z*ehner, *E*iner) gibt es einen Rechenvorteil. $HZE : 7$ gibt denselben Rest wie $(2H + ZE) : 7$. So gibt $327 : 7$ denselben Rest wie $(2 \cdot 3 + 27) : 7$ oder $33 : 7$, nämlich 5. Der Grund ist, dass $100 : 7$ den Rest 2 hat.

*Beispiele*

Karl der Grosse wurde am Weihnachtstag 800 zum Kaiser gekrönt, an einem Freitag: $8\,000 : 7$ oder $(-1 \; +0) : 7$, Rest $-1$ oder $+6$. Die Sizilianische Vesper am Ostermontag 1282 war am 30. März: $30\,312\,802 : 7$ oder $(+2 - 4 + 4) : 7$, Rest 2. Die Schlacht bei Sempach am 9. Juli 1386 war an einem Montag: $39\,613\,842 : 7$ oder $(+4 - 4 + 2) : 7$, Rest 2.

JOACHIM MAYR, Walchsee, Tirol

# Aufgaben

**Aufgabe 297.** Man beweise: Jede natürliche Zahl $\leqq n!$ lässt sich als Summe von höchstens $n-1$ verschiedenen Teilern von $n!$ darstellen. Lässt sich dieser Satz verschärfen?

P. ERDÖS, Birmingham

*Lösung:* Ist $1 \leqq N < n!$ und dividiert man $N$ durch $n!/2!$, den allfälligen Rest durch $n!/3!$ und fährt so mit den Divisoren $n!/4!, \ldots, n!/(n-1)!$ weiter, so erhält man die Darstellung

$$N = \sum_{i=2}^{n} \frac{n!}{i!} q_i \qquad (0 \leqq q_i < i) .$$

Für $q_i \neq 0$ ist $q_i n!/i!$ ein Teiler von $n!$, und alle solchen Teiler sind verschieden, denn

$$\frac{n!}{i!} \leqq \frac{n!}{i!} q_i < \frac{n!}{(i-1)!} .$$

Man hat also (vorausgesetzt natürlich, dass $n \geqq 2$) die gesuchte Darstellung, da der Fall $N = n!$ trivial ist.