Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 13 (1958)
Heft: 5

Rubrik: Aufgaben

Der 0. September ist gegen w auch um 3 Tage voraus, daher könnte man beim September ebenfalls 2 an die Hunderttausenderstelle setzen. Da aber der September die Monatszahl 9 hat, setzt man 9 statt 2, was man unbeschadet des Restes tun kann. Beim 0. Juni ist der Wochentag gegen w um 2 Tage voraus. Man addiert 599998, ein Vielfaches von 7, zu 2, und bekommt damit 600000 oder 6 an die Hunderttausenderstelle, die Monatszahl des Juni. Damit ist auch die Jahreszeiten-Methode erklärt und bewiesen. Bei Daten vor Christus zieht man das Jahr von 7001 ab und behandelt den Rest wie ein Jahr nach Christus. Der Judenkalender beginnt mit Montag, dem 7. 10. 3761 v. Chr. ($7001 - 3761 = 3240$; $37\,932\,400:7$, Rest 2.)

Rechenvorteile

Unangenehm sind die langen Zahlen, die durch 7 zu dividieren sind, aber da gibt es Rechenvorteile. Man teilt die Zahl in die üblichen Dreiergruppen ab und bestimmt von jeder Gruppe den Rest. Bei den Tausendergruppen ist der Rest negativ zu nehmen. Zum Beispiel 38300282 : 7, Rest 6, wird zu

$$38\,300\,282 : 7$$

oder

$$(+3 \quad -6 \quad +\dot{2}) : 7, \quad \text{Rest } -1 .$$

Aus dem negativen Rest -1 wird $+6$ durch Anfügung von $+7$. Der Grund dieses Vorgehens ist, dass 999999 und 1001 Vielfache von 7 sind.

Auch für die dreistellige Zahl HZE (*H*underter, *Z*ehner, *E*iner) gibt es einen Rechenvorteil. $HZE : 7$ gibt denselben Rest wie $(2H + ZE) : 7$. So gibt $327 : 7$ denselben Rest wie $(2 \cdot 3 + 27) : 7$ oder $33 : 7$, nämlich 5. Der Grund ist, dass $100 : 7$ den Rest 2 hat.

Beispiele

Karl der Grosse wurde am Weihnachtstag 800 zum Kaiser gekrönt, an einem Freitag: $8\,000 : 7$ oder $(-1 \ +0) : 7$, Rest -1 oder $+6$. Die Sizilianische Vesper am Ostermontag 1282 war am 30. März: $30\,312\,802 : 7$ oder $(+2 - 4 + 4) : 7$, Rest 2. Die Schlacht bei Sempach am 9. Juli 1386 war an einem Montag: $39\,613\,842 : 7$ oder $(+4 - 4 + 2) : 7$, Rest 2.

Joachim Mayr, Walchsee, Tirol

Aufgaben

Aufgabe 297. Man beweise: Jede natürliche Zahl $\leqq n!$ lässt sich als Summe von höchstens $n-1$ verschiedenen Teilern von $n!$ darstellen. Lässt sich dieser Satz verschärfen?

P. Erdös, Birmingham

Lösung: Ist $1 \leqq N < n!$ und dividiert man N durch $n!/2!$, den allfälligen Rest durch $n!/3!$ und fährt so mit den Divisoren $n!/4!, \ldots, n!/(n-1)!$ weiter, so erhält man die Darstellung

$$N = \sum_{i=2}^{n} \frac{n!}{i!} q_i \qquad (0 \leqq q_i < i) .$$

Für $q_i \neq 0$ ist $q_i n!/i!$ ein Teiler von $n!$, und alle solchen Teiler sind verschieden, denn

$$\frac{n!}{i!} \leqq \frac{n!}{i!} q_i < \frac{n!}{(i-1)!} .$$

Man hat also (vorausgesetzt natürlich, dass $n \geqq 2$) die gesuchte Darstellung, da der Fall $N = n!$ trivial ist.

Es ist bemerkenswert, dass sich diese Darstellungsmöglichkeit eo ipso bis zu $N = n! + (n-1)! + \cdots + 2!$ fortsetzt. Wesentlich hierbei ist, dass jedes dieser $n-1$ Glieder ein Teiler von $n!$ ist, und weiter, dass ein Teiler eines dieser Glieder kleiner als und daher verschieden von jedem vorangehenden Glied ist. Da alle übrigen Fälle trivial sind, können wir

$$\sum_{=k+1}^{n} j! < N < \sum_{j=k}^{n} j! \qquad (k \leqq n-1)$$

annehmen. Wir setzen

$$M = N - \sum_{j=k+1}^{n} j! \tag{1}$$

und haben $1 \leqq M < k!$. Daher ist nach dem bereits bewiesenen

$$M = d_1 + d_2 + \cdots + d_m \qquad (m \leqq k-1), \tag{2}$$

wo d_r $(r = 1, 2, \ldots, m)$ ein Teiler von $k!$ und damit auch von $n!$ ist und $d_r \neq 0$ gilt. Aus (1) und (2) ergibt sich eine Darstellung von N mit höchstens $n-1$ verschiedenen Teilern von $n!$. A. BAGER, Hjørring

Eine weitere Lösung legte M. SEKANINA (Brno/ČSR) vor.

Aufgabe 298. Gegeben sind drei Kreise, von denen keine zwei in der gleichen Ebene (oder auf der gleichen Kugel) liegen. Gesucht wird ein Kreis, der die drei gegebenen Kreise je zweimal schneidet. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Lösung: k_1, k_2, k_3 seien die gegebenen Kreise. Man lege durch k_1 und k_2 je eine beliebige Kugel. Die Potenzebene dieser Kugeln und die Ebenen der Kreise k_1 und k_2 schneiden sich in einem Punkt P. P hat gleiche Potenz bezüglich der beiden Kugeln und deshalb auch bezüglich k_1 und k_2. Jede Ebene durch P schneidet also k_1 und k_2 in je zwei (eventuell imaginären) Punkten, die auf demselben Kreis liegen. Auf gleiche Weise erhält man mit k_2 und k_3 den Punkt Q, mit k_3 und k_1 den Punkt R. Die Ebene PQR schneidet die drei gegebenen Kreise in je zwei Punkten, die auf demselben Kreis liegen. Nehmen wir nämlich an, dass die sechs Schnittpunkte zu je vieren auf drei Kreisen liegen, die nicht in einen zusammenfallen, dann hat ein jeder der Punkte P, Q, R die gleiche Potenz bezüglich dieser Kreise. P, Q und R müssten dazu aber auf einer Geraden liegen, was nur dann eintritt, wenn die Ebenen der Kreise k_1, k_2, k_3 sich in einer Geraden schneiden. Diese Schnittgerade enthält dann die Punkte P, Q, R und ist als Kreis mit unendlichem Radius die Lösung in diesem Spezialfall. J. SCHOPP, Budapest

Weitere Lösungen sandten M. ANDRE (Zürich), J. BASILE (Brüssel), R. LAUFFER (Graz).

Aufgabe 299. Solve the following equation for $f(a)$:

$$\sum_{a=0}^{p-1} \left(\frac{a+b}{p}\right) f(a) = g(b) \qquad (b = 0, 1, \ldots, p-1), \tag{1}$$

where $g(b)$ is given and (a/p) denotes the Legendre symbol.

L. CARLITZ, Duke University, Durham, N.C. (USA)

Solution by the author: For brevity we write

$$\sum_a = \sum_{a=0}^{p-1}.$$

It follows from (1) that

$$\sum_b g(b) = 0, \tag{2}$$

which is a necessary condition for the solvability of (1). In the next place, multiplying both sides of (1) by $((b+c)/p)$ and summing, we get

$$\sum_b \left(\frac{b+c}{p}\right) g(b) = \sum_b \left(\frac{b+c}{p}\right) \sum_a \left(\frac{a+b}{p}\right) f(a) = \sum_a f(a) \sum_b \left(\frac{(a+b)(b+c)}{p}\right).$$

Now

$$\sum_b \left(\frac{(a+b)(b+c)}{p}\right) = \begin{cases} p-1 & (a=c), \\ -1 & (a \neq c), \end{cases}$$

so that

$$\sum_b \left(\frac{b+c}{p}\right) g(b) = (p-1) f(c) - \sum_{b \neq c} f(b) = p\, f(c) - \sum_b f(b).$$

Hence

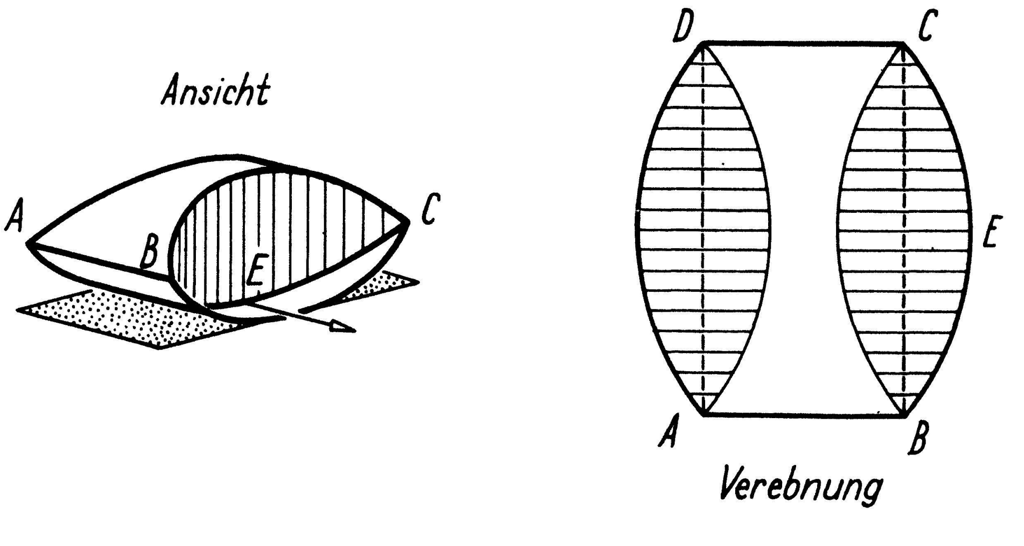
$$f(c) = B + \frac{1}{p} \sum_b \left(\frac{b+c}{p}\right) g(b), \tag{3}$$

where B is a constant such that $\sum_b f(b) = p\,B$. Conversely it is easily verified that if $f(c)$ is defined by (3) and (2) holds, then (1) is satisfied. Thus (3) furnishes the general solution of (1).

In particular if we require that $\sum_c f(c) = 0$, then (1) has the *unique* solution

$$f(c) = \frac{1}{p} \sum_b \left(\frac{b+c}{p}\right) g(b).$$

Aufgabe 300. Eine Tintenfabrik brachte kürzlich zu Reklamezwecken eine zusammenfaltbare Löschwiege aus Karton heraus, die sich durch Herausklappen der beiden seitlichen (in der Figur schraffierten) Stützwände, welche nur mit dem Rückenteil zu-



sammenhängen, vollkommen verebnen lässt. Was lässt sich über die Randkurven dieser Stützwände aussagen, wenn sie in der Verebnung als kongruente Kreisbögen vorausgesetzt werden?

W. WUNDERLICH, Wien

Lösung des Aufgabenstellers: Boden und Rücken der Löschwiege sind Zylinderflächen mit zu AB parallelen Erzeugenden, während die Seitenwände Zylinder mit zu AB normaler Erzeugendenrichtung sind. Denkt man sich die Erzeugenden der Rückenfläche über eine Kante hinaus verlängert, so erkennt man, dass diese Kante aus Symmetriegründen in einer *Ebene* liegen muss, die mit beiden Erzeugendenrichtungen 45° einschliesst. – Ganz allgemein gilt: Wird eine Ebene so verbogen, dass eine beliebig vorgegebene Geradenschar die Biegelinien abgibt und längs einer beliebigen Trajektorie dieser Schar ein Knick entsteht, so ist die Knicklinie stets eben.

Im vorliegenden Fall läuft die Ermittlung der Knicklinie im wesentlichen darauf hinaus, ein der Kreisscheibe

$$u^2 + v^2 = a^2 \tag{1}$$

angehörendes Segment $a \geqq v \geqq b > 0$ längs der v-Parallelen so zu einem Zylinder zu verbiegen, dass der Randbogen eben wird, wobei der Winkel zwischen den Zylindererzeugenden und der Randebene mit $\alpha = \pi/4$ vorgeschrieben ist. Führen wir in der Randkurvenebene kartesische Koordinaten x, y ein, so dass

$$v = y \cos\alpha, \tag{2}$$

dann gilt für das Randelement ds

$$ds^2 = du^2 + dv^2 = dx^2 + dy^2, \tag{3}$$

und wir haben lediglich u und v aus (1), (2) und (3) zu eliminieren. Dies liefert ohne Schwierigkeit die Differentialgleichung

$$(a^2 \sec^2\alpha - y^2)\, dx^2 = (y^2 - a^2 \operatorname{tg}^2\alpha)\, dy^2 \tag{4}$$

der Rand- bzw. Knicklinie. Die Lösung führt auf ein elliptisches Integral und lautet für $\alpha = \pi/4$

$$x = \pm \int\limits_{a\sqrt{2}}^{y} \sqrt{\frac{y^2 - a^2}{2\,a^2 - y^2}}\, dy. \tag{5}$$

Die hierdurch dargestellte Kurve hat ungefähr das Aussehen einer gemeinen Zykloide und ist bekannt als *Meridian einer Drehfläche konstanter positiver Krümmung vom Wulsttypus.*

Es ist im übrigen bemerkenswert, dass der Wert $1/a^2$ der Flächenkrümmung von α unabhängig ist. Damit hat sich nebenbei eine einfache mechanische Erzeugung dieser Meridiankurven ergeben: Man hefte zwei kongruente Kreissegmente vom Radius a mit ihren Bogenrändern zusammen und verbiege sie anschliessend so, dass die Sehnen eben bleiben; die Gratkante bildet dann stets einen Bogen des Meridians einer Drehfläche der Krümmung $+1/a^2$. – Das Gegenstück dazu liegt in einer Bemerkung von G. Scheffers vor [Arch. Math. Phys. *6*, 249–250 (1903)], derzufolge bei der Verebnung eines schiefen Kreiszylinders ein Randkreis in den Meridian einer Drehfläche konstanter positiver Krümmung vom Spindeltypus übergeht. Beide Aussagen sind als Sonderfälle einer etwas allgemeineren Beziehung anzusehen.

Guy Neyen (Luxemburg) bemerkt, dass ein Bogenelement ds der gesuchten Kurve mit der horizontalen Y-Achse und der vertikalen Z-Achse eines räumlichen Koordinatensystems, dessen X-Achse parallel BC ist, denselben Winkel $90° - \varphi$ einschliessen muss. Die Richtungskosinus von ds sind also $\cos\alpha$, $\cos\beta = -\sin\varphi$, $\cos\gamma = -\sin\varphi$. Wegen

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

ergibt sich

$$\cos\alpha = -\sqrt{\cos 2\,\varphi}.$$

Ist a der Radius des Kreissegments, so ist $ds = a\, d\varphi$, und man erhält bei passender Wahl des Koordinatenursprungs die Parameterdarstellung

$$X = \pm\, a \int\limits_0^{\varphi} \sqrt{\cos 2\,\varphi}\, d\varphi, \qquad Y = a \cos\varphi, \qquad Z = a \cos\varphi - c, \qquad |\varphi| \leqq \frac{\pi}{4},$$

wo $a - c$ die Segmenthöhe ist. Hieraus folgt sofort, dass die Kurve in der Ebene $Z - Y + c = 0$

mit dem Neigungswinkel 45° liegt. Das in dieser Ebene liegende (x,y)-System der obigen Lösung hängt mit dem (X,Y)-System durch die Transformation $x = X$, $y = Y\sqrt{2}$ zusammen. Durch Elimination von φ erhält man leicht die obige Formel (5).

Eine weitere Lösung legte Z. ZSOMBOK (Budapest) vor.

Neue Aufgaben

336. Es sei $a_0 \geqq 0$, $a_0 + b_0 > 0$, $a_1^2 - a_0 a_2 \leqq 0$, $D = (a_1 + b_1)^2 - (a_0 + b_0)(a_2 + b_2) > 0$. Die Kurve

$$y^4 + 2y^2(b_0 x^2 + 2b_1 x + b_2) + (a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2)^2 = 0$$

begrenzt dann zwei symmetrische Flächenstücke, deren Inhalt berechnet werden soll.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

337. Sei m eine natürliche Zahl. Man beweise den Satz: Liegen m unabhängige Variable $a_1, \ldots, a_m$ vor, so gilt die Identität

$$\det \left| 0^{|i-k|} - a_i a_k \right|_{i,\,k=1,\ldots,m} = 1 - (a_1^2 + \cdots + a_m^2).$$

Beispiel $m = 2$:

$$\begin{vmatrix} 1 - a\,a & -a\,b \\ -b\,a & 1 - b\,b \end{vmatrix} = 1 - (a^2 + b^2).$$

I. PAASCHE, München

338. Die Punkte P_4, Q_1, Q_4, Q_7 der Ebene sind linear unabhängig gegeben. Auf der Geraden $[P_4 Q_7]$ ist der Punkt Q_5 beliebig gegeben. Auf der Geraden $[Q_4 Q_7]$ ist der Punkt P_5 beliebig gegeben. Die Punkte P_7, Q_0, P_3, P_1 und Q_3 erhält man aus den gegebenen Punkten durch Verbinden und Schneiden, wobei die Punktetripel (P_i, P_j, P_k) und (P_i, Q_j, Q_k) kollinear sind, wenn $i + j + k \equiv 0 \pmod 8$ ist. [Zum Beispiel sind $(P_7 P_4 P_5)$ und (P_7, Q_4, Q_5) kollineare Tripel.] Man zeige, dass die Geraden $[P_1 P_7]$, $[P_3 P_5]$, $[Q_1 Q_7]$, $[Q_3 Q_5]$ durch einen Punkt P_0 gehen. R. LAUFFER, Graz

339. Démontrer que pour tout entier $n > 1$ on a les inégalités

$$2 \leqq \frac{\sigma_k(n) + \varphi_k(n)}{n^k} \leqq \vartheta(n),$$

où $\varphi_k(n)$ désigne le nombre des suites de nombres naturels $\leqq n$, tels que $(a_1, a_2, \ldots, a_k, n) = 1$, et

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k, \qquad \vartheta(n) = \sum_{d|n} 1.$$

Démontrer que pour les nombres n composés chacune des égalités est exclue.

A. MAKOWSKI, Varsovie

340. Gegeben sei eine feste Gerade g. Gesucht werden alle analytischen Kurven $\boldsymbol{C}$ mit folgender Eigenschaft: Sind P_1 und P_2 die Schnittpunkte von $\boldsymbol{C}$ mit irgendeinem aus zwei zu g parallelen Geraden p_1 und p_2 bestehenden «Streifen», so ist die Fläche des vom Kurvenbogen $P_1 P_2$ und der Sehne $P_1 P_2$ begrenzten Segments nur von der «Breite» des Streifens (Abstand von p_1 und p_2) abhängig, aber nicht von seiner Lage.

E. TROST, Zürich

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A 4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck mit gegebener Hypotenuse, in dem eine Kathete gleich dem ihr nicht anliegenden Hypotenusenabschnitt ist. Zeige, dass die Seiten dieses Dreiecks eine geometrische Reihe bilden.
   ▶ Die Höhe teilt die Hypotenuse im goldenen Schnitt.
2. Man zeichnet das Quadrat, von dem drei Ecken in den Asymptoten und die vierte im Scheitelpunkt einer gleichseitigen Hyperbel liegen. An dieses Quadrat wird ein zweites angeschlossen, von dem eine Ecke ein Hyperbelpunkt ist und eine Seite in einer Asymptote liegt. Die beiden Quadratseiten stehen im Verhältnis des goldenen Schnitts.
3. Ein Kreiskegelstumpf besitzt eine Inkugel vom Radius R. Seine Oberfläche ist doppelt so gross wie diejenige der Inkugel. Man bestimme die Radien von Grund- und Deckkreis.
   ▶ Die Radien sind der stetig verlängerte bzw. stetig verkürzte Kugelradius R.
4. Die Endpunkte einer Strecke sind $O(0; 0)$ und $A(a; 0)$. Sie wird stetig geteilt, und der grössere Abschnitt a_1 wird in A senkrecht zur x-Achse abgetragen, so dass sein Endpunkt $A_1(a; a_1)$ ist. a_1 wird wieder stetig geteilt, und der grössere Abschnitt a_2 wird in A_1 senkrecht zu AA_1 abgetragen, mit dem Endpunkt $A_2(a - a_2; a_1)$. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, so dass ein spiraliger Streckenzug entsteht, der einem Grenzpunkt P zustrebt. Die Koordinaten von P sind zu berechnen.
   ▶ $\left(a\,\frac{5+\sqrt{5}}{10};\ a\,\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.
5. Es sind zwei feste Punkte $O(0; 0)$ und $A(a; 0)$ gegeben. Ein variabler Punkt P wandert auf der Gerade $y = a$. Welches ist das Minimum des Verhältnisses der Strecken AP und OP?
   ▶ Das minimale Verhältnis ist das Verhältnis des goldenen Schnitts.

Bericht über die 49. Hauptversammlung des Deutschen Vereines zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts in Berlin

Die Versammlung fand in der Zeit vom 7. bis 11. April 1958 in der Technischen Universität statt. Bei der Eröffnung sprach Prof. E. LAMLA, Göttingen, zum 100. Geburtstag MAX PLANCKS und Prof. W. SCHMEIDLER, Berlin, über mathematische und physikalische Erkenntnis.

Bei den mathematischen Fachsitzungen kam das auch für Mittelschulen so wichtige Gebiet der Statistik zur Sprache. Ferner wurde gezeigt, wie einfache lineare Differentialgleichungen in der Mittelschule behandelt werden können. In einem Vortrag über Mathematik und produktives Denken wurden – ähnlich wie bei G. POLYA und B. L. VAN DER WAERDEN – verlässliche Wege zum Lösen mathematischer Probleme gesucht. Dabei sollen neuere philosophische und psychologische Erkenntnisse die grosse Fruchtbarkeit der modernen mathematischen Begriffsbildungen zeigen. Dann wurde gezeigt, wie die moderne geometrische Axiomatik (HILBERT) eine anschauliche Fassung für den Unterricht in der Mittelschule erhalten kann. Von besonderem Interesse waren die Ausführungen über anschauliche Gruppentheorie, mit vielen Lichtbildern über Ornamente und Polyeder.