Zeitschrift: Elemente der Mathematik

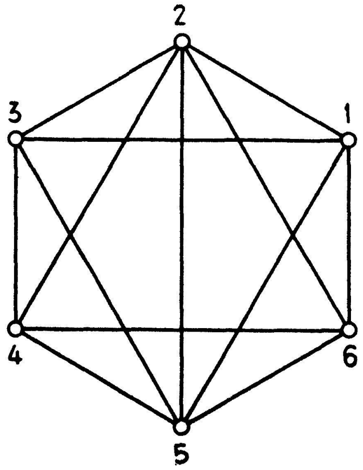
Band: 13 (1958)

Heft: 6

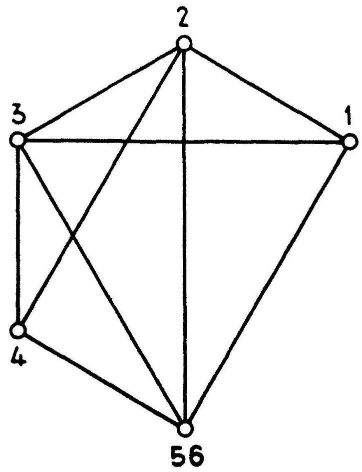
Rubrik: Ungelöste Probleme

Ungelöste Probleme

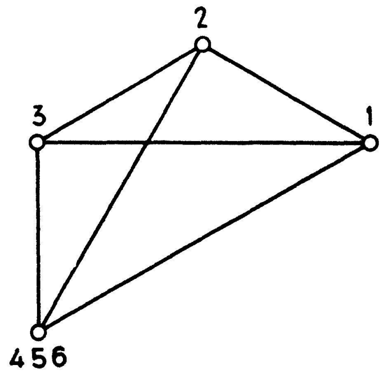
Nr. 26. Unter der ch omatischen Zahl k eines Streckenkomplexes P versteht man die kleinste Klassenanzahl, für die es eine Klasseneinteilung (Färbung) der Punkte von P so gibt, dass nicht zwei derselben Klasse angehörende Punkte benachbart, das heisst durch eine Strecke des Komplexes P verbunden sind. Ein Zusammenzug von P ist eine Reduktion, die dadurch zustande kommt, dass zwei benachbarte Punkte von P identifiziert werden; eine solche führt den Komplex P mit n Punkten in einen reduzierten Komplex P' mit $n' = n - 1$ Punkten über. Hierbei sollen zwei Punkte von P' genau dann benachbart sein, wenn diesr in P bei sinngemässer Berücksichtigung der Identität der zum Zusammenzug kommenden Punkte ebenfalls



Figur 1



Figur 2



Figur 3

benachbart sind. Lässt sich P durch aufeinanderfolgende Zusammenzüge in Q verwandeln, so sagen wir dafür auch, dass man P auf Q zusammenziehen könne. Ein Simplex S_i sei ein aus i Punkten bestehender Komplex, für den alle Punktepaare benachbart sind. Von Interesse ist die Frage, ob sich ein vorgegebener zusammenhängender Komplex P auf ein Simplex S_i mit vorgeschriebenem i zusammenziehen lässt. Es scheint nämlich, dass das Problem der chromatischen Zahlen innerhalb der Theorie der allgemeinen Streckenkomplexe in enge Beziehung zur Frage der Zusammenziehbarkeit auf Simplexe tritt[1]). Vermutlich gilt der folgende Satz:

Ein zusammenhängender Streckenkomplex P der chromatischen Zahl k lässt sich auf ein Simplex S_k zusammenziehen.

Beispielsweise zeigt Figur 1 einen einfachen Streckenkomplex mit den Punkten 1 bis 6, dem die chromatische Zahl $k = 4$ zukommt; eine zulässige Färbung ist durch die Klasseneinteilung (1 4), (3 6), (2), (5) gegeben. Man überzeugt sich mühelos davon, dass eine Färbung mit weniger als vier Farben unmöglich ist. Nach unserer Vermutung muss sich der vorliegende Komplex auf ein S_4 zusammenziehen lassen. Dies gelingt in der Tat durch zwei Zusammenzüge leicht, wie dies die Figuren 2 und 3 illustrieren.

---

[1]) Diese Zusammenhänge wurden einlässlicher erstmals studiert von K. Wagner, *Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe*, Math. Ann. *114*, 570–590 (1937).

Der vermutete Satz wurde bisher lediglich für $k \leqq 4$ bewiesen[2]). Seine Richtigkeit für $k = 5$ würde indessen die Gültigkeit des berühmten Vierfarbensatzes in sich schliessen. In der Tat: Wäre etwa T ein in der Ebene schlicht liegender Komplex, dessen Strecken sich also nirgends überschneiden (bei der schlichten Einbettung eines Komplexes in eine Fläche sind die Strecken gegebenenfalls durch Kurvenbögen zu ersetzen), und würde für die chromatische Zahl von T noch $k \geqq 5$ gelten, so liesse sich T auf ein S_k zusammenziehen. Da aber ein Zusammenzug die Einbettbarkeit in die Ebene nicht stört, müsste das Simplex S_k in der Ebene schlicht realisierbar sein, was für $k \geqq 5$ ausgeschlossen ist. Also muss für ebene Komplexe $k \leqq 4$ sein, was mit dem zur Zeit noch unbewiesenen Vierfarbensatz gleichbedeutend ist.

Neuerdings wurden von DIRAC[3]) sehr eingehende Untersuchungen über das chromatische Problem angestellt und unter anderem gezeigt, dass die oben erörterte Vermutung sich in zahlreichen spezielleren Fällen als richtig erweist. Allgemein ist die Frage jedoch noch ungeklärt.

H. HADWIGER

Kleine Mitteilungen

Referat über zwei Arbeiten von Árpád Szabó

1. *Wie ist die Mathematik zu einer deduktiven Wissenschaft geworden?*, Acta Antiqua Academiae Scientiarum Hungaricae *4*, 109–152 (1956).

2. *Δείκνυμι als mathematischer Terminus für «beweisen»*, Maia [NS] *10* (2), 1–26 (1958).

Die Arbeiten von ÁRPÁD SZABÓ aus Budapest auf dem Gebiete der Geschichte der voreuklidischen Geometrie und der vorsokratischen Philosophie sind in den Kreisen der Fachgelehrten wohlbekannt und geschätzt. Die zwei Studien, die wir zu besprechen vorhaben, sind durch ihren Gehalt und durch neue Aufschlüsse über die Entstehungsgeschichte der griechischen Mathematik von ganz besonderer Wichtigkeit.

Gleich am Anfang des ersten Aufsatzes: *Wie ist die Mathematik zu einer deduktiven Wissenschaft geworden?* legt uns der Verfasser in aller Deutlichkeit die drei Hauptthesen seiner Arbeit vor, die er zu beweisen beabsichtigt: 1. Die griechische Mathematik ist als deduktive Wissenschaft spätestens in der ersten Hälfte des 5. Jahrhunderts unter dem Einfluss der eleatischen Philosophie entstanden. 2. Die Eleaten waren es, die schon *vor* dieser entscheidenden Wandlung zum ersten Mal in der Geschichte des europäischen Denkens die grundlegenden Prinzipien der Logik klar formulierten. 3. Die deduktive Mathematik ist so lange überhaupt nicht möglich, als der Mathematiker die Begründung seiner Sätze nicht auf eine schon vorhandene und bewusst angewandte Logik bauen kann.

Unter Bezugnahme auf die Arbeiten von BECKER und VAN DER WAERDEN stellt der Verfasser fest, dass wir in den Büchern IX, 21–36, und X, Appendix 27, der *Elemente* EUKLIDS ein sehr altes *Mathema* der Pythagoreer vom Geraden und Ungeraden aus der ersten Hälfte des 5. Jahrhunderts vor Christus besitzen (BECKER) und dass in dem Buche VII, 1–36, derselben *Elemente* ein anderes pythagoreisches *Mathema*, welches gegen Ende des 5. Jahrhunderts vor Christus entstanden sein soll, enthalten ist (VAN DER WAERDEN).

Weiter zeigt der Verfasser, dass die Methode des indirekten Beweisverfahrens ganz

[2]) G. A. DIRAC, *A Property of 4-Chromatic Graphs and Some Remarks on Critical Graphs*, J. London math. Soc. *27*, 85–92 (1952). H. HADWIGER, *Über eine Klassifikation der Streckenkomplexe*, Vjschr. naturf. Ges. Zürich *88*, 133–142 (1943).

[3]) G. A. DIRAC, *Map Colour Theorems Related to the Heawood Colour Formula*, J. London math. Soc. *31*, 460–471 (1956). G. A. DIRAC, *A Theorem of R. L. Brooks and a Conjecture of H. Hadwiger*, Proc. London math. Soc. *7*, 161–195 (1957).