Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 14 (1959)
Heft: 1

Artikel: Some congruences involving binomial coefficients
Autor: Carlitz, L.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20316

und der entsprechende Flächeninhalt ist

$$\varrho^2 \pi \left(1 - \cos^2 \frac{\pi}{8}\right) = \varrho^2 \pi \left(1 - \frac{\sqrt{2} + 2}{4}\right).$$

In bezug auf den totalen Flächeninhalt bekommen wir

$$1 - \frac{\sqrt{2} + 2}{4} \approx 0{,}146.$$

Z. SCHNEIDER und B. STANKOVITSCH, Beograd

Some Congruences Involving Binomial Coefficients

GLAISHER[1]) (p. 21) has proved that

$$\binom{np-1}{p-1} \equiv 1 - \frac{1}{3} n(n-1) p^3 B_{p-3} \pmod{p^4}, \tag{1}$$

where p is a prime > 3 und B_m denotes the m-th Bernoulli number in the even suffix notation. It follows from (1) that

$$\binom{mp-1}{p-1} - \binom{np-1}{p-1} \equiv -\frac{1}{3}(m-n)(m+n-1) p^3 B_{p-3} \pmod{p^4}. \tag{2}$$

In view of (2) it may be of interest to examine the r-th difference

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} \binom{np+sp-1}{p-1}. \tag{3}$$

Indeed it is no more difficult to discuss

$$\Delta_r = \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} \binom{nw+sw-1}{p-1}, \tag{4}$$

where n is an arbitrary integer and

$$p^e \mid w \qquad (e \geqq 1). \tag{5}$$

Put

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-p+1) = x^{p-1} - A_1 x^{p-2} + \cdots + A_{p-1}. \tag{6}$$

Then GLAISHER[2]) has proved that for $p > 3$, $1 < 2t < p-1$

$$\frac{1}{p} A_{2t} \equiv -\frac{1}{2t} B_{2t} \pmod{p}, \tag{7}$$

$$\frac{1}{p^2} A_{2t+1} \equiv \frac{2t+1}{4t} B_{2t} \pmod{p}. \tag{8}$$

---

[1]) J. W. L. GLAISHER, *Congruences Relating to the Sum of Products of the First n Numbers and to Other Sums of Products*, Quart. J. Math. *31*, 1–35 (1900).

[2]) J. W. L. GLAISHER, *On the Residues of the Sums of Products of the First $p-1$ Numbers, and Their Powers, to Modulus p^2 or p^3*, Quart. J. Math. *31*, 321–353 (1900).

Now it is clear from (4) that

$$\Delta_r = 0 \qquad (r > p-1). \tag{9}$$

Thus we may confine ourselves to values of r in the range $1 \leqq r \leqq p-1$. It follows at once from (4) and (6) that

$$\Delta_r = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{k=r}^{p-1} (-1)^k A_{p-1-k} \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} (n+s)^k w^k, \tag{10}$$

where for convenience we put $A_0 = 1$. Then in the first place, for $r = p-1$, (10) yields [with (12)]

$$\Delta_{p-1} = w^{p-1}. \tag{11}$$

For $0 < r = 2t < p-1$, it follows from (7) and

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} (n+s)^r = r! \tag{12}$$

that

$$\Delta_{2t} \equiv -\frac{(2t)!}{2t+1} B_{p-2t-1} w^{2t} p \pmod{p^{2te+2}} \qquad (0 < 2t < p-1). \tag{13}$$

For odd values of r we consider separately the cases $e > 1$ and $e = 1$. For $e > 1$ it follows from (8) and (12) that

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{2t+1} \equiv \frac{(2t+2)!}{2(2t+3)} B_{p-2t-3} w^{2t+1} p^2 \pmod{p^{(2t+1)e+3}} \\ (1 \leqq 2t+1 < p-2, \ e > 1). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

For $e = 1$ we need both (7) and (8) as well as (12) and

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} (n+s)^{r+1} = (r+1)! \left(n + \frac{1}{2} r\right). \tag{15}$$

Thus (10) yields for $1 \leqq 2t+1 < p-2$

$$\begin{aligned} \Delta_{2t+1} &\equiv \frac{1}{(p-1)!} \left\{-(2t+1)!\, A_{p-2t-2} w^{2t+1} + (2t+2)! \left(n+t+\frac{1}{2}\right) A_{p-2t-3} w^{2t+2}\right\} \\ &\equiv (2t+1)! \frac{2t+2}{2(2t+3)} B_{p-2t-3} w^{2t+1} p^2 \\ &\quad - (2t+2)! \frac{n+t+\frac{1}{2}}{2t+3} B_{p-2t-3} w^{2t+2} p \qquad \pmod{p^{2t+4}} \end{aligned}$$

so that

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{2t+1} \equiv \frac{(2t+2)!}{2(2t+3)} \left[p - 2\left(n+t+\frac{1}{2}\right) w\right] B_{p-2t-3} w^{2t+1} p \qquad \pmod{p^{2t+4}} \\ (1 \leqq 2t+1 < p-2, \ e = 1). \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

As for the excluded case $r = p - 2$, it is clear from (10), (12) and (15) that

$$\Delta_{p-2} = \frac{1}{(p-1)!}\left\{-(p-2)!\,A_1\,w^{p-2} + (p-1)!\left(n + \frac{p}{2} - 1\right) w^{p-1}\right\},$$

which reduces to

$$\Delta_{p-2} = \left\{(n-1)\,w + \frac{p}{2}\,(w-1)\right\} w^{p-2}. \tag{17}$$

L. Carlitz, Durham (N. C., USA)

Ungelöste Probleme

Nr. 27. Es bedeute n eine beliebige natürliche Zahl. Mit s_n werde die Summe der sämtlichen Teiler von n bezeichnet, mit p_n die Anzahl der Darstellungen von n als Summe von natürlichen Zahlen, wobei die Reihenfolge der Summanden als unwesentlich gilt. Also

$$p_1 = 1,\ p_2 = 2,\ p_3 = 3,\ p_4 = 5,\ p_5 = 7,\ p_6 = 11,\ p_7 = 15,$$
$$p_8 = 22,\ p_9 = 30,\ p_{10} = 42,\ p_{11} = 56,\ p_{12} = 77 \text{ usw.}$$

Für die Darstellung von n als Summe von lauter *verschiedenen* natürlichen Zahlen spielen nach dem Pentagonalsatz Eulers die Pentagonalzahlen

$$\frac{1}{2}\,k\,(3\,k - 1) \text{ mit } k = 1, 2, 3, \ldots \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{2}\,k\,(3\,k + 1) \text{ mit } k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

oder zusammengefasst

$$\frac{1}{2}\,l\,(3\,l - 1) \text{ mit } l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

eine ausgezeichnete Rolle. Es sind dies die Zahlen

$$0,\ 1,\ 2,\ 5,\ 7,\ 12,\ 15,\ 22,\ 26,\ 35,\ 40,\ 51,\ 57,\ \ldots.$$

Zwischen s_n und den Pentagonalzahlen sowie zwischen p_n und den Pentagonalzahlen bestehen bekanntlich die Beziehungen (alternierend $++$ und $--$):

$$s_n = s_{n-1} + s_{n-2} - s_{n-5} - s_{n-7} + s_{n-12} + s_{n-15} \cdots, \tag{1}$$

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2} - p_{n-5} - p_{n-7} + p_{n-12} + p_{n-15} \cdots. \tag{2}$$

Dabei ist in (1) für eine Pentagonalzahl n für das dann formal auftretende letzte Glied s_0 die Zahl n selbst zu setzen. In (2) ist im gleichen Falle für p_0 der Wert 1 zu nehmen.

Unschwer erhält man die weitere merkwürdige Beziehung:

$$s_n = p_{n-1} + 2\,p_{n-2} - 5\,p_{n-5} - 7\,p_{n-7} + 12\,p_{n-12} + 15\,p_{n-15} \cdots. \tag{3}$$