

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 14 (1959)
Heft: 1

Artikel: Some congruences involving binomial coefficients
Autor: Carlitz, L.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-20316>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 02.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

und der entsprechende Flächeninhalt ist

$$\varrho^2 \pi \left(1 - \cos^2 \frac{\pi}{8}\right) = \varrho^2 \pi \left(1 - \frac{\sqrt{2} + 2}{4}\right).$$

In bezug auf den totalen Flächeninhalt bekommen wir

$$1 - \frac{\sqrt{2} + 2}{4} \approx 0,146.$$

Z. SCHNEIDER und B. STANKOVITSCH, Beograd

Some Congruences Involving Binomial Coefficients

GLAISHER¹⁾ (p. 21) has proved that

$$\binom{n p - 1}{p - 1} \equiv 1 - \frac{1}{3} n (n - 1) p^3 B_{p-3} \pmod{p^4}, \quad (1)$$

where p is a prime > 3 und B_m denotes the m -th Bernoulli number in the even suffix notation. It follows from (1) that

$$\binom{m p - 1}{p - 1} - \binom{n p - 1}{p - 1} \equiv -\frac{1}{3} (m - n) (m + n - 1) p^3 B_{p-3} \pmod{p^4}. \quad (2)$$

In view of (2) it may be of interest to examine the r -th difference

$$\sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \binom{r}{s} \binom{n p + s p - 1}{p - 1}. \quad (3)$$

Indeed it is no more difficult to discuss

$$\Delta_r = \sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \binom{r}{s} \binom{n w + s w - 1}{p - 1}, \quad (4)$$

where n is an arbitrary integer and

$$p^e \mid w \quad (e \geq 1). \quad (5)$$

Put

$$(x - 1) (x - 2) \cdots (x - p + 1) = x^{p-1} - A_1 x^{p-2} + \cdots + A_{p-1}. \quad (6)$$

Then GLAISHER²⁾ has proved that for $p > 3$, $1 < 2t < p - 1$

$$\frac{1}{p} A_{2t} \equiv -\frac{1}{2t} B_{2t} \pmod{p}, \quad (7)$$

$$\frac{1}{p^2} A_{2t+1} \equiv \frac{2t+1}{4t} B_{2t} \pmod{p}. \quad (8)$$

¹⁾ J. W. L. GLAISHER, *Congruences Relating to the Sum of Products of the First n Numbers and to Other Sums of Products*, Quart. J. Math. 31, 1-35 (1900).

²⁾ J. W. L. GLAISHER, *On the Residues of the Sums of Products of the First $p - 1$ Numbers, and Their Powers, to Modulus p^2 or p^3* , Quart. J. Math. 31, 321-353 (1900).

Now it is clear from (4) that

$$\Delta_r = 0 \quad (r > p - 1). \quad (9)$$

Thus we may confine ourselves to values of r in the range $1 \leq r \leq p - 1$. It follows at once from (4) and (6) that

$$\Delta_r = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{k=r}^{p-1} (-1)^k A_{p-1-k} \sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \binom{r}{s} (n+s)^k w^k, \quad (10)$$

where for convenience we put $A_0 = 1$. Then in the first place, for $r = p - 1$, (10) yields [with (12)]

$$\Delta_{p-1} = w^{p-1}. \quad (11)$$

For $0 < r = 2t < p - 1$, it follows from (7) and

$$\sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \binom{r}{s} (n+s)^r = r! \quad (12)$$

that

$$\Delta_{2t} \equiv -\frac{(2t)!}{2t+1} B_{p-2t-1} w^{2t} p \pmod{p^{2te+2}} \quad (0 < 2t < p - 1). \quad (13)$$

For odd values of r we consider separately the cases $e > 1$ and $e = 1$. For $e > 1$ it follows from (8) and (12) that

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{2t+1} &\equiv \frac{(2t+2)!}{2(2t+3)} B_{p-2t-3} w^{2t+1} p^2 \pmod{p^{(2t+1)e+3}} \\ &\quad (1 \leq 2t+1 < p - 2, \quad e > 1). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

For $e = 1$ we need both (7) and (8) as well as (12) and

$$\sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \binom{r}{s} (n+s)^{r+1} = (r+1)! \left(n + \frac{1}{2}r\right). \quad (15)$$

Thus (10) yields for $1 \leq 2t+1 < p - 2$

$$\begin{aligned} \Delta_{2t+1} &\equiv \frac{1}{(p-1)!} \left\{ -(2t+1)! A_{p-2t-2} w^{2t+1} + (2t+2)! \left(n + t + \frac{1}{2}\right) A_{p-2t-3} w^{2t+2} \right\} \\ &\equiv (2t+1)! \frac{2t+2}{2(2t+3)} B_{p-2t-3} w^{2t+1} p^2 \\ &\quad - (2t+2)! \frac{n+t+\frac{1}{2}}{2t+3} B_{p-2t-3} w^{2t+2} p \pmod{p^{2t+4}} \end{aligned}$$

so that

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{2t+1} &\equiv \frac{(2t+2)!}{2(2t+3)} \left[p - 2 \left(n + t + \frac{1}{2}\right) w \right] B_{p-2t-3} w^{2t+1} p \pmod{p^{2t+4}} \\ &\quad (1 \leq 2t+1 < p - 2, \quad e = 1). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

As for the excluded case $r = p - 2$, it is clear from (10), (12) and (15) that

$$\Delta_{p-2} = \frac{1}{(p-1)!} \left\{ - (p-2)! A_1 w^{p-2} + (p-1)! \left(n + \frac{p}{2} - 1 \right) w^{p-1} \right\},$$

which reduces to

$$\Delta_{p-2} = \left\{ (n-1) w + \frac{p}{2} (w-1) \right\} w^{p-2}. \tag{17}$$

L. CARLITZ, Durham (N. C., USA)

Ungelöste Probleme

Nr. 27. Es bedeute n eine beliebige natürliche Zahl. Mit s_n werde die Summe der sämtlichen Teiler von n bezeichnet, mit p_n die Anzahl der Darstellungen von n als Summe von natürlichen Zahlen, wobei die Reihenfolge der Summanden als unwesentlich gilt. Also

$$p_1 = 1, \quad p_2 = 2, \quad p_3 = 3, \quad p_4 = 5, \quad p_5 = 7, \quad p_6 = 11, \quad p_7 = 15, \\ p_8 = 22, \quad p_9 = 30, \quad p_{10} = 42, \quad p_{11} = 56, \quad p_{12} = 77 \quad \text{usw.}$$

Für die Darstellung von n als Summe von lauter *verschiedenen* natürlichen Zahlen spielen nach dem Pentagonalersatz EULERS die Pentagonalzahlen

$$\frac{1}{2} k (3k - 1) \quad \text{mit } k = 1, 2, 3, \dots \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} k (3k + 1) \quad \text{mit } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

oder zusammengefasst

$$\frac{1}{2} l (3l - 1) \quad \text{mit } l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

eine ausgezeichnete Rolle. Es sind dies die Zahlen

$$0, 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57, \dots$$

Zwischen s_n und den Pentagonalzahlen sowie zwischen p_n und den Pentagonalzahlen bestehen bekanntlich die Beziehungen (alternierend $++$ und $--$):

$$s_n = s_{n-1} + s_{n-2} - s_{n-5} - s_{n-7} + s_{n-12} + s_{n-15} \dots, \tag{1}$$

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2} - p_{n-5} - p_{n-7} + p_{n-12} + p_{n-15} \dots. \tag{2}$$

Dabei ist in (1) für eine Pentagonalzahl n für das dann formal auftretende letzte Glied s_0 die Zahl n selbst zu setzen. In (2) ist im gleichen Falle für p_0 der Wert 1 zu nehmen.

Unschwer erhält man die weitere merkwürdige Beziehung:

$$s_n = p_{n-1} + 2 p_{n-2} - 5 p_{n-5} - 7 p_{n-7} + 12 p_{n-12} + 15 p_{n-15} \dots. \tag{3}$$