

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 14 (1959)  
**Heft:** 2

**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Kleine Mitteilungen

### Eine Verallgemeinerung der Fibonaccischen Zahlenfolge

In der Fibonaccischen Zahlenfolge ist jedes Glied gleich der Summe der beiden vorhergehenden; die Anfangsglieder sind 0 und 1. Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder konvergiert gegen das Teilverhältnis beim Goldenen Schnitt. Nachfolgend untersuchen wir eine Zahlenfolge, bei der jedes Glied die Summe der  $k$  vorhergehenden ist und die erforderlichen  $k$  Anfangsglieder nicht-negative reelle Zahlen sind.

Wir betrachten zunächst das Polynom

$$f(x) = x^k - x^{k-1} - \dots - x - 1 \quad (k > 1).$$

Seine Nullstellen seien  $x_\nu$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, k$ . Nach der Descartesschen Zeichenregel<sup>1)</sup> hat  $f(x)$  genau eine (einfache) positive Nullstelle; wir nennen sie  $x_1$ . Wegen  $f(1) = 1 - k$  und  $f(2) = 1$  ist  $1 < x_1 < 2$ . Aus  $f(x_\nu) = 0$  folgt  $f(|x_\nu|) \leq 0$  und daraus für  $\nu = 2, 3, \dots, k$

$$|x_\nu| \leq x_1; \quad (1)$$

andernfalls hätte  $f(x)$  zwei positive Nullstellen.

$f(x)$  hat überhaupt nur einfache Nullstellen:

Wir bilden das Polynom  $g(x) = (x-1)f(x) = x^{k+1} - 2x^k + 1$ . Wäre  $\xi \neq 1$  mehrfache Nullstelle von  $f(x)$ , so wäre  $g'(\xi) = (k+1)\xi^k - 2k\xi^{k-1} = 0$ , also  $\xi = 0$  oder  $\xi = 2k/(k+1)$ , was unmöglich ist.

Aus  $g(x_\mu) = g(x_\nu)$  folgt für  $|x_\mu| = |x_\nu|$  die Gleichung  $|x_\mu - 2| = |x_\nu - 2|$  und für  $\mu \neq \nu$  daraus  $x_\mu = \bar{x}_\nu$ . Mit (1) können wir jetzt schliessen

$$|x_\nu| < x_1 \quad \text{für } \nu = 2, 3, \dots, k. \quad (2)$$

Nun wählen wir  $k$  Zahlen  $a_n \geq 0$ ,  $n = 0, 1, \dots, k-1$ ; es sei wenigstens ein  $a_n > 0$ . Aus dem linearen Gleichungssystem

$$a_n = \sum_{\nu=1}^k A_\nu x_\nu^n, \quad n = 0, 1, \dots, k-1,$$

lassen sich die  $k$  Grössen  $A_\nu$  eindeutig bestimmen, denn die Determinante des Systems ist die Vandermondesche Determinante<sup>1)</sup>

$$V_k = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \dots & x_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{\mu > \nu} (x_\mu - x_\nu) \neq 0.$$

Es gilt  $A_1 = \Delta / V_k$ , wobei

$$\Delta = \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n a_n V_k^{(n)} \quad (3)$$

und  $(-1)^n V_k^{(n)}$  der zum Element  $x_1^n$  gehörige Minor von  $V_k$  ist.

Indem wir in  $V_k^{(n)}$  zur ersten Zeile alle übrigen addieren, erhalten wir mit  $f(x_\nu) = 0$

<sup>1)</sup> Vergleiche zum Beispiel O. PERRON, *Algebra* (Berlin 1951).

und  $x_1 x_2 \cdots x_k = (-1)^{k-1}$  nach einigen Umformungen die Beziehung

$$V_k^{(n)} = \frac{(-1)^{n+k-1}}{x_1} V_{k-1} - \frac{1}{x_1} V_k^{(n-1)}, \quad 0 \leq n < k;$$

dabei ist  $V_{k-1}$  die Vandermondesche Determinante für  $x_2, x_3, \dots, x_k$  und  $V_k^{(-1)} = 0$ .

Daraus folgt

$$V_k^{(n)} = (-1)^{n+k-1} V_{k-1} \sum_{\mu=1}^{n+1} \frac{1}{x_1^\mu}, \quad 0 \leq n < k.$$

Nach (3) ist somit

$$\Delta = (-1)^{k-1} V_{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} a_n \sum_{\mu=1}^{n+1} \frac{1}{x_1^\mu} \neq 0,$$

also

$$A_1 \neq 0. \tag{4}$$

Jetzt bilden wir die Zahlenfolge

$$a_n = \sum_{v=1}^k A_v x_v^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Dann gilt

$$a_{n+k} = \sum_{v=1}^k A_v x_v^{n+k} = \sum_{v=1}^k A_v \sum_{\mu=n}^{n+k-1} x_v^\mu = \sum_{\mu=n}^{n+k-1} \sum_{v=1}^k A_v x_v^\mu,$$

das heisst

$$a_{n+k} = \sum_{\mu=n}^{n+k-1} a_\mu.$$

Für den Quotienten

$$\sigma_m^{(r)} = \frac{a_{m+r}}{a_m} = \frac{\sum_{v=1}^k A_v x_v^{m+r}}{\sum_{v=1}^k A_v x_v^m} = \frac{A_1 x_1^r + \sum_{v=2}^k A_v x_v^r \left(\frac{x_v}{x_1}\right)^m}{A_1 + \sum_{v=2}^k A_v \left(\frac{x_v}{x_1}\right)^m}$$

ergibt sich wegen (2) und (4)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m^{(r)} = x_1^r.$$

A. SCHÖNHOFER und K. ZUSER, München

## Aufgaben

**Aufgabe 308.** Es bedeute  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  das kleinste gemeinsame Vielfache der natürlichen Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Man beweise, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\{1, 2, \dots, n\}}$$

irrational ist.

P. ERDÖS

*Lösung:* Wir verwenden den Primzahlsatz in der Form  $\{1, 2, \dots, n\} = e^{n+o(n)}$ . Hieraus folgt

$$\{1, 2, \dots, n\}^{-1} = e^{-n} (1 + o(n)).$$

---

<sup>1)</sup> Vergleiche E. TROST, *Primzahlen*, S. 56. Mit  $o(n)$  wird eine Grösse bezeichnet, die für  $n \rightarrow \infty$  nach Null strebt.