

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 14 (1959)  
**Heft:** 2  
  
**Rubrik:** Aufgaben

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

und  $x_1 x_2 \cdots x_k = (-1)^{k-1}$  nach einigen Umformungen die Beziehung

$$V_k^{(n)} = \frac{(-1)^{n+k-1}}{x_1} V_{k-1} - \frac{1}{x_1} V_k^{(n-1)}, \quad 0 \leq n < k;$$

dabei ist  $V_{k-1}$  die Vandermondesche Determinante für  $x_2, x_3, \dots, x_k$  und  $V_k^{(-1)} = 0$ .

Daraus folgt

$$V_k^{(n)} = (-1)^{n+k-1} V_{k-1} \sum_{\mu=1}^{n+1} \frac{1}{x_1^\mu}, \quad 0 \leq n < k.$$

Nach (3) ist somit

$$\Delta = (-1)^{k-1} V_{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} a_n \sum_{\mu=1}^{n+1} \frac{1}{x_1^\mu} \neq 0,$$

also

$$A_1 \neq 0. \tag{4}$$

Jetzt bilden wir die Zahlenfolge

$$a_n = \sum_{v=1}^k A_v x_v^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Dann gilt

$$a_{n+k} = \sum_{v=1}^k A_v x_v^{n+k} = \sum_{v=1}^k A_v \sum_{\mu=n}^{n+k-1} x_v^\mu = \sum_{\mu=n}^{n+k-1} \sum_{v=1}^k A_v x_v^\mu,$$

das heisst

$$a_{n+k} = \sum_{\mu=n}^{n+k-1} a_\mu.$$

Für den Quotienten

$$\sigma_m^{(r)} = \frac{a_{m+r}}{a_m} = \frac{\sum_{v=1}^k A_v x_v^{m+r}}{\sum_{v=1}^k A_v x_v^m} = \frac{A_1 x_1^r + \sum_{v=2}^k A_v x_v^r \left(\frac{x_v}{x_1}\right)^m}{A_1 + \sum_{v=2}^k A_v \left(\frac{x_v}{x_1}\right)^m}$$

ergibt sich wegen (2) und (4)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m^{(r)} = x_1^r.$$

A. SCHÖNHOFER und K. ZUSER, München

## Aufgaben

**Aufgabe 308.** Es bedeute  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  das kleinste gemeinsame Vielfache der natürlichen Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Man beweise, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\{1, 2, \dots, n\}}$$

irrational ist.

P. ERDÖS

*Lösung:* Wir verwenden den Primzahlsatz in der Form  $\{1, 2, \dots, n\} = e^{n+o(n)}$ . Hieraus folgt

$$\{1, 2, \dots, n\}^{-1} = e^{-n} (1 + o(n)).$$

---

<sup>1)</sup> Vergleiche E. TROST, *Primzahlen*, S. 56. Mit  $o(n)$  wird eine Grösse bezeichnet, die für  $n \rightarrow \infty$  nach Null strebt.

Es sei  $N$  so gross gewählt, dass für alle  $n > N$

$$\frac{1 + o(n)}{e - 1} < k < 1$$

gilt. Dann hat man für  $n > N$

$$\sum_{r>n} \{1, 2, \dots, r\}^{-1} < k (e - 1) \sum_{r>n} e^{-r} = k e^{-n}.$$

Hieraus folgt

$$Q = \sum_{r>n} \frac{\{1, 2, \dots, n\}}{\{1, 2, \dots, r\}} < k \frac{\{1, 2, \dots, n\}}{e^n} = k e^{o(n)} < 1 \quad (*)$$

für genügend grosses  $N$ . Wir nehmen jetzt an, dass

$$\sum_{r=1}^{\infty} \{1, 2, \dots, r\}^{-1} = \frac{p}{q},$$

wo  $p$  und  $q$  natürliche Zahlen sind. Ist  $n > q$ , so sind  $q$  und alle  $\{1, 2, \dots, r\}$  mit  $r \leq n$  Teiler von  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Daraus folgt, dass  $Q$  eine ganze Zahl ist, im Widerspruch zu (\*). Folglich ist die betrachtete Summe eine irrationale Zahl.

A. BAGER, Hjørring (Dänemark)

**Aufgabe 309.** In der Ebene eines Dreieckes  $D$  vom Flächeninhalt 1 werden alle Geraden gezeichnet, die von  $D$  ein Flächenstück vom konstanten Inhalt  $\lambda$  ( $0 \leq \lambda \leq 4/9$ ) abschneiden. Man bestimme den Flächeninhalt des von den Geraden nicht überdeckten Teiles von  $D$ .

E. TROST, Zürich

*Lösung:* Durch eine die Flächen erhaltende Affinität transformiert man das Dreieck in ein gleichseitiges. Die zu berechnende Fläche ist dann begrenzt von drei kongruenten Hyperbelbogen. Ein Drittel der komplementären Fläche in  $D$  ist ein Fünfeck, welches begrenzt wird von einem dieser Bogen, den beiden Dreiecksseiten, welche seine Asymptoten bilden, und den Loten von den Endpunkten des Bogens auf die je benachbarte Seite. Dieser Drittel werde zerlegt in einen Rhombus, gebildet von den Asymptoten und den Parallelen dazu durch den Scheitel, in zwei symmetrisch anschliessende Parallelstreifen und zwei Hälften eines gleichseitigen Dreiecks.

Die Gleichung des Bogens, bezogen auf seine Asymptoten, lautet dann  $xy = \lambda/\sqrt{3}$ . Sein Endpunkt auf der Symmetrieachse  $2x + y = 2/\sqrt{3}$  des Dreiecks hat die Abszisse

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2\lambda}}{2\sqrt{3}}.$$

Der Bogenscheitel hat die Abszisse  $x_0 = \sqrt{\lambda}/\sqrt{3}$ . Das Parallelogramm hat die Fläche  $\lambda/2$ . Die beiden rechtwinkligen Dreiecke haben zusammen die Fläche

$$\frac{y_1^2}{4} \sqrt{3} = \frac{1 - \lambda - \sqrt{1 - 2\lambda}}{2}.$$

Die beiden Streifen zusammen ergeben die Fläche

$$2 \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{x_0}^{x_1} y dx = \lambda \ln \frac{x_1}{x_0} = \lambda \ln \frac{1 + \sqrt{1 - 2\lambda}}{2\sqrt{\lambda}}.$$

Addition dieser Bestandteile, Verdreifachung und Subtraktion von  $D$  ergibt

$$F = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \sqrt{1 - 2\lambda} - 3\lambda \ln \frac{1 + \sqrt{1 - 2\lambda}}{2\sqrt{\lambda}}.$$

C. BINDSCHIEDLER, Künsnacht

Weitere Lösungen sandten L. KIEFFER, (Luxemburg), H. MEILI (Winterthur), K. GRÜN (Steyr).

**Aufgabe 310.** Es sei  $A$  ein konvexer Rotationskörper des gewöhnlichen Raumes mit der Oberfläche  $F$ . Bezeichnet  $f$  den Flächeninhalt eines Meridianschnittes von  $A$  (Schnittbereich von  $A$  mit einer durch die Achse hindurchgelegten Ebene) und  $f_0$  den Flächeninhalt eines Äquatorschnittes (Schnittbereich von  $A$  mit einer auf der Achse orthogonal stehenden Ebene, die einen grössten Breitenkreis ausschneidet), so gilt die Ungleichung

$$F \leq \pi f + 2 f_0,$$

wobei das Gleichheitszeichen für den Zylinder beansprucht wird. Für diese Aussage ist ein möglichst einfacher Beweis zu geben. H. HADWIGER, Bern

*Lösung des Aufgabenstellers:* Setzt man  $D(A) = \pi f + 2 f_0 - F$ , so gilt, wie man mit einfachsten Überlegungen einsehen kann, die Beziehung  $D(A) \geq D(B) + D(C)$ , falls  $A$  durch eine zur Achse orthogonal geführte Ebene in die beiden Teilkörper  $B$  und  $C$  zerlegt wird. So resultiert allgemeiner

$$D(A) \geq \sum_1^n D(A_i) \tag{a}$$

bei einer entsprechenden Zerlegung von  $A$  in die  $n$  Teilsegmente  $A_i$ . Für einen Kegelstumpf  $T$  mit der Höhe  $h$  und den beiden Deckradien  $p$  und  $q$  ( $p \geq q$ ) ergibt sich

$$D(T) = \pi (p + q) (p - q + h - \sqrt{(p - q)^2 + h^2}), \tag{b}$$

so dass  $D(T) \geq 0$  abgelesen werden kann. Mit (a) folgt jetzt

$$D(A) \geq 0 \tag{c}$$

für einen polygonalen Körper  $A$ , der sich in endlich viele Kegelstumpfsegmente zerschneiden lässt. Nun resultiert die Gültigkeit von (c) für allgemeine konvexe Rotationskörper mit üblichen Stetigkeitserwägungen. Die Aussage (c) ist mit der zu beweisenden Ungleichung identisch. Die Bemerkung über die Gültigkeit des Gleichheitszeichens ist direkt verifizierbar.

Im wesentlichen dieselbe Lösung sandte H. MEILI (Winterthur). Eine weitere Lösung legte A. BAGER (Hjørring) vor.

**Aufgabe 311.** Soit  $P_1, P_2, \dots$  une suite de points distincts partout dense dans l'intervalle  $(0, 1)$ . Les points  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  subdivisent l'intervalle en  $n$  parties et le point  $P_n$  divise l'une d'elles en deux parties. En désignant par  $a_n$  et  $b_n$  les longueurs de ces deux parties, démontrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \frac{1}{2}.$$

J. KARAMATA, Genève

*Solution:* Let  $P_1, P_2, \dots, P_n$  divide the interval  $(0, 1)$  into the sub-intervals  $I_{n0}, I_{n1}, \dots, I_{nn}$  and put

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^n |I_{nk}|^2 \quad (\sigma_0 = 1),$$

where  $|I_{nk}|$  is the length of  $I_{nk}$ . If

$$\mu_n = \max_{0 \leq k \leq n} |I_{nk}|,$$

then because the  $P_i$  are everywhere dense it follows that

$$\lim \mu_n = 0,$$

and consequently

$$\lim \sigma_n = 0. \quad (*)$$

Let  $P_r$  denote the right hand neighbor of  $P_n$  and  $P_s$  the left hand neighbor; then if  $X_k$  is the abscissa of  $P_k$  we have

$$\begin{aligned} \sigma_{n-1} - \sigma_n &= (X_r - X_s)^2 - (X_n - X_s)^2 - (X_r - X_n)^2 \\ &= 2 X_n X_s + 2 X_n X_r - 2 X_n^2 - 2 X_r X_s \\ &= 2 (X_r - X_n) (X_n - X_s) \\ &= 2 a_n b_n. \end{aligned}$$

$$1 - \sigma_n = \sum_{k=1}^n (\sigma_{k-1} - \sigma_k) = 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

Using (\*) we get

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \frac{1}{2}.$$

*Remark.* If in place of  $\sigma_n$  we define

$$\sigma_n^{(p)} = \sum_{k=0}^n |I_{nk}|^p,$$

then as above

$$\begin{aligned} \sigma_{n-1}^{(p)} - \sigma_n^{(p)} &= (X_r - X_s)^p - (X_n - X_s)^p - (X_r - X_n)^p \\ &= (a_n + b_n)^p - a_n^p - b_n^p, \end{aligned}$$

which yields

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^p - a_n^p - b_n^p = 1 \quad (p \geq 2).$$

L. CARLITZ, Duke University,  
Durham, N. C. (USA)

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring), A. ANDRÉ (Zürich), C. BINDSCHIEDLER (Küsnacht), H. KUMMER (Langenthal), H. MEILI (Winterthur).

**Aufgabe 312.** Es ist zu zeigen, dass die Polarachse und die Geraden  $\varphi = \pm \arccos \sqrt[4]{0,5}$  den Umfang der Lemniskate  $r = a \sqrt{\cos 2 \varphi}$  in acht Kurvenbogen von gleicher Länge zerlegen.

R. ROSE, Saarbrücken

*Lösung des Aufgabenstellers:* Aus Symmetriegründen genügt es, zu zeigen, dass die Gerade  $\varphi_1 = \arccos \sqrt[4]{0,5}$  den im ersten Quadranten liegenden Kurventeil der Lemniskate in zwei Bögen  $s_1$  und  $s_2$  von der gleichen Länge zerlegt. Es ist

$$s_1 = a \int_0^{\varphi_1} \frac{1}{\sqrt{\cos 2 \varphi}} d\varphi.$$

Die Substitution  $\operatorname{tg} \varphi = t$  ergibt

$$s_1 = a \int_0^{\sqrt{2-1}} \frac{1}{\sqrt{1-t^4}} dt.$$

Aus

$$s_2 = a \int_{\varphi_1}^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{\cos 2 \varphi}} d\varphi$$

ergibt sich durch die Substitution  $\sqrt{\cos 2 \varphi} = u$

$$s_2 = -a \int_{\sqrt{\sqrt{2}-1}}^0 \frac{1}{\sqrt{1-u^4}} du = a \int_0^{\sqrt{\sqrt{2}-1}} \frac{1}{\sqrt{1-u^4}} du .$$

Also ist

$$s_1 = s_2 .$$

Eine weitere Lösung sandte K. SCHUNK (Neunkirchen, Saar).

### Neue Aufgaben

350. Die Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_k$  sind (willkürlich) gegeben, und für  $n = k + 1, k + 2, k + 3, \dots$  ist  $x_n$  durch die Rekursionsbeziehung

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2} + \dots + x_{n-k}}{k}$$

bestimmt. Man beweise, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + kx_k}{1 + 2 + 3 + \dots + k} .$$

G. PÓLYA, Stanford (California)

351. Man beweise: Ist  $p$  eine Primzahl der Gestalt  $4n + 3$ , so ist  $q = 2p + 1$  dann und nur dann Primzahl, wenn  $u^2 \equiv 2 \pmod{q}$  lösbar ist und

$$(1 + u)^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$$

gilt.

J. PIEHLER, Leuna

352. Es sei  $O_1$  das Orthozentrum des dem Kreis  $k$  mit dem Radius  $r$  einbeschriebenen Dreiecks  $A_1A_2A_3$ ,  $O_2$  das Orthozentrum des Dreiecks  $B_1B_2B_3$ , das auch dem Kreise  $k$  einbeschrieben ist. Man beweise

$$\overline{O_1O_2} < 4r + u ,$$

wo  $u = \text{Min } A_iB_j, i, j = 1, 2, 3.$

E. JUCOVIČ, Prešov (CSR)

353. Es sei  $T_1$  der Schwerpunkt des dem Kreise  $k$  mit dem Radius  $r$  einbeschriebenen Dreiecks  $A_1A_2A_3$ ,  $T_2$  der Schwerpunkt des ebenfalls  $k$  einbeschriebenen Dreiecks  $B_1B_2B_3$ . Man beweise

$$\overline{T_1T_2} < \frac{4r + u}{3} ,$$

wo  $u = \text{Min } A_iB_j, i, j = 1, 2, 3.$

E. JUCOVIČ, Prešov (CSR)

### Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A4 gewählt werden soll,  $x$ -Achse nach rechts,  $y$ -Achse nach vorn,  $z$ -Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Stehen in einem Sehnenviereck die Diagonalen senkrecht aufeinander und fällt man vom Diagonalenschnittpunkt die Lote auf die Vierecksseiten, so sind die Fusspunkte die Ecken eines Sehnen-Tangenten-Vierecks.

2.  $A, B, C$  liegen auf einer Gerade,  $P$  ist ein Punkt ausserhalb dieser Gerade. Die Umkreismittelpunkte der Dreiecke  $ABP, ACP, BCP$  und der Punkt  $P$  sind stets die Ecken eines Sehnenvierecks.
3. In einem spitzwinkligen Dreieck  $ABC$  zeichnet man die Kreise mit den Durchmesser  $AC$  und  $BC$ . Der Kreis durch  $A$  und  $C$  schneidet  $h_b$  in  $B_1$  und  $B_2$ , derjenige durch  $B$  und  $C$  schneidet  $h_a$  in  $A_1$  und  $A_2$ .  $A_1B_1A_2B_2$  ist ein Sehnenviereck mit dem Umkreismittelpunkt  $C$ .
4. Dreht man ein Sehnenviereck in seinem Umkreis um einen beliebigen Winkel, so sind die Schnittpunkte entsprechender Seiten die Ecken eines Parallelogramms.  
 ▶ Ziehe durch die Schnittpunkte die Senkrechten zu den Verbindungsstrecken mit dem Umkreismittelpunkt. Die Schnittpunkte sind die Seitenmitten des entstehenden Vierecks.
5. Ein Sehnen-Tangenten-Viereck hat einen festen Umkreis und zwei feste Gegenecken. Welches ist der geometrische Ort seines Inkreismittelpunkts?  
 ▶ Der geometrische Ort ist der Kreis, der den festen Umkreis in den festen Punkten orthogonal schneidet.

## Literaturüberschau

J. D. COBINE:

*Gaseous Conductors*

XX und 606 Seiten mit mehr als 600 Abbildungen und Tafeln. Dover Publications, New York 1958

Es handelt sich um einen mit den Korrekturen des Verfassers versehenen, aber sonst unveränderten Neudruck gemäss der ersten Auflage aus dem Jahre 1941. Der Neudruck erfolgte angesichts der steten Nachfrage in den Vereinigten Staaten, wobei es dem Autor nicht möglich war, eine an sich beabsichtigte Neubearbeitung vorzunehmen. Auf dem Gebiet der Gasentladungen sind natürlich in der Zwischenzeit manche Weiterentwicklungen zu verzeichnen, wobei insbesondere gewisse Spezialanwendungen, über die 1941 noch nicht viele zusammenhängende Kenntnisse bestanden, wie zum Beispiel der Durchschlag von Gasen bei Mikrowellen, eine besonders intensive Bearbeitung erfahren haben. Da jedoch das Werk in erster Linie als Lehrbuch geschaffen wurde, mit welchem grundlegende Kenntnisse vermittelt werden sollen, ist es dank der hervorragenden Darstellung dieser Grundlagen auch heute keineswegs als veraltet zu bezeichnen. Während man es also nicht zu Rate ziehen wird, um die neuesten quantitativen Angaben über Gasentladungen zu erhalten, wird es dem Studenten und Ingenieur, der sich in das Gebiet einarbeiten will, sehr gute Dienste leisten. W. DRUEY

J. PETERS:

*Kreis- und Evolventenfunktionen*

2. Auflage, 217 Seiten. Verlag Dümmler, Bonn 1951

Das vorliegende, für Ingenieure bestimmte handliche Tabellenwerk ist eine photo-mechanische Wiedergabe der ersten Auflage (1937) und zeigt daher bis auf den Ersatz älterer durch neuere Formelzeichen keine Änderungen. Den grössten Teil des Buches (181 Seiten) nehmen die sechsstelligen natürlichen Werte der sechs trigonometrischen und die bis  $\alpha = 37^\circ$  sechs- und nachher fünfstelligen Werte der Evolventenfunktion  $ev\alpha = tg\alpha - \text{arc}\alpha = \text{arc}\vartheta$  ein. Dabei bedeutet  $\alpha$  den Winkel des Radius  $OP$  mit der Evolvententangente in  $P$ , und  $\vartheta$  den Polarwinkel. Diese Funktionen sind in  $\alpha$  in Hundertstel des (Alt-) Grades *und* in sechsstelligem Bogenmass, in  $\vartheta$  in vierstelligem Gradmass tabelliert. Ferner sind die ersten Differenzen aller Funktionswerte beigelegt, doch sind die aufeinanderfolgenden Tabellenwerte so dicht und genau, dass für viele praktische Aufgaben keine Interpolation nötig ist. Der Ingenieur findet im Anhang noch eine Anzahl Tabellen für die Zahnradtechnik und eine Zusammenstellung von Formeln für Räder mit Evolventenzähnen. A. HÄUSERMANN