

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Band:** 15 (1960)  
**Heft:** 1

**Artikel:** Die Ellipse an der Nahtstelle zwischen Kongruenzgeometrie und Affingeometrie  
**Autor:** Jeger, M.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-20709>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 08.11.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires — Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts  
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds  
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

---

El. Math.      Band XV      Nr. 1      Seiten 1–24      Basel, 10. Januar 1960

---

## Die Ellipse an der Nahtstelle zwischen Kongruenzgeometrie und Affingeometrie

*Ein Beitrag zur Einführung abbildungsgeometrischer Methoden  
im Mittelschulunterricht*

Die in letzter Zeit erschienenen deutschsprachigen Mathematikunterrichtswerke für Mittelschulen lassen für die Geometrie eine bemerkenswerte Strömung erkennen; dieser Zweig der Schulmathematik wird mehr und mehr im Sinne von KLEINS *Erlanger Programm* ausgerichtet. Im Zusammenhang mit elementargeometrischen Betrachtungen begegnet man jetzt da und dort dem *Abbildungsbegriff* und dem *Gruppenbegriff*. Es zeichnet sich darin eine längst fällige Befreiung vom starren Schema des bisherigen Geometrieunterrichtes ab, dem die Elemente von EUKLID allzusehr den Stempel aufgedrückt haben. Gleichzeitig erhält nun die Mittelschulgeometrie mit dem Abbildungsbegriff endlich auch einen festen methodischen Pol, wie ihn die Analysis im Funktionsbegriff schon lange kennt. Die nachfolgenden Ausführungen möchten auf diese Entwicklung hinweisen; sie möchten an einem Beispiel zeigen, wie abbildungsgeometrische Methoden auch in der konstruktiven Geometrie Eingang finden können.

Die erste Begegnung unserer Schüler mit der Ellipse erfolgt meist im Rahmen der Kongruenzgeometrie auf der Unterstufe; die Kurve wird dort auf Grund der Brennpunkteigenschaften definiert. Später führt die darstellende Geometrie zu einer erneuten Auseinandersetzung mit der Ellipse, wobei aber deren affine Eigenschaften im Vordergrund stehen. Nicht selten wird bei dieser Gelegenheit die Ellipse neu definiert als affines Bild eines Kreises. Dieses Vorgehen kürzt wohl einiges ab, muss aber beim Schüler unweigerlich den Eindruck erwecken, dass es zwei Arten von Ellipsen gebe, metrische und affine. Dieses Gefühl bleibt so lange bestehen, bis die Äquivalenz der beiden Definitionen aufgezeigt ist. Wir befinden uns hier an einer Nahtstelle zwischen der Kongruenzgeometrie und der Affingeometrie. Sie lässt sich nicht so mühelos überwinden und ist wohl daher in vielen Unterrichtswerken ein dunkler Punkt geblieben. Zahlreiche Autoren gehen den Weg über die analytische Geometrie, der sehr kurz, aber vom Standpunkt der konstruktiven Geometrie aus nicht elegant ist [1, 2]<sup>1)</sup>. Andere benutzen den Dandelinischen Satz über die ebenen Schnitte eines

---

<sup>1)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 8.

Rotationszylinders, wobei aber zu bemerken ist, dass diese Methode beim schiefen Kreiszyylinder bzw. bei der schiefen Affinität ohne umfangreiche weitere Hilfsmittel gar nicht funktioniert [3]. Es soll hier ein Weg beschrieben werden, der wie der rechnerische Äquivalenzbereich vollständig in der Ebene verläuft, dagegen aber – neben einigen einfachen Rechnungen – nur Hilfsmittel aus der konstruktiven Geometrie erfordert.

### 1. Die Ellipse als normal-affines Bild eines Kreises

Ausgangspunkt unserer Betrachtungen ist die metrische Ellipsendefinition; die Kurve sei erklärt als der geometrische Ort aller Punkte  $\bar{P}$ , für welche die Summe der Abstände von zwei festen Punkten  $F_1$  und  $F_2$  konstant ist:

$$\bar{P}F_1 + \bar{P}F_2 = 2a = \text{const.}$$

Aus dieser Festlegung der Ellipse entnimmt man leicht, dass die Kurve zwei Symmetrieachsen aufweist, nämlich die Verbindungsgerade von  $F_1$  und  $F_2$  sowie die Mittelsenkrechte dazu.

Es sei jetzt  $\bar{P}$  ein allgemeiner Ellipsenpunkt. Wir tragen nun die Strecke  $\bar{P}F_1$  auf der Verlängerung von  $\bar{P}F_2$  und umgekehrt die Strecke  $\bar{P}F_2$  auf der Verlängerung von  $\bar{P}F_1$  ab; dies ergibt die beiden Punkte  $F'_1$  und  $F'_2$  (Figur 1). Es ist dann

$$F_1F'_2 = F_2F'_1 = 2a.$$

Die Mittelsenkrechte  $t$  von  $F_1F'_1$  bzw.  $F_2F'_2$  ist die Ellipsentangente im Punkte  $\bar{P}$ . Für jeden von  $\bar{P}$  verschiedenen Punkt  $\bar{Q}$  auf  $t$  gilt nämlich die Dreiecksungleichung

$$\bar{Q}F_1 + \bar{Q}F_2 = \bar{Q}F_1 + \bar{Q}F'_2 > F_1F'_2 = 2a,$$

das heisst,  $t$  hat ausser  $\bar{P}$  keinen weiteren Punkt mit der Kurve gemeinsam. Aus der Figur 1 schliesst man weiter, dass

$$MS = \frac{1}{2} F_1F'_2 = a \quad \text{und} \quad MR = \frac{1}{2} F_2F'_1 = a$$

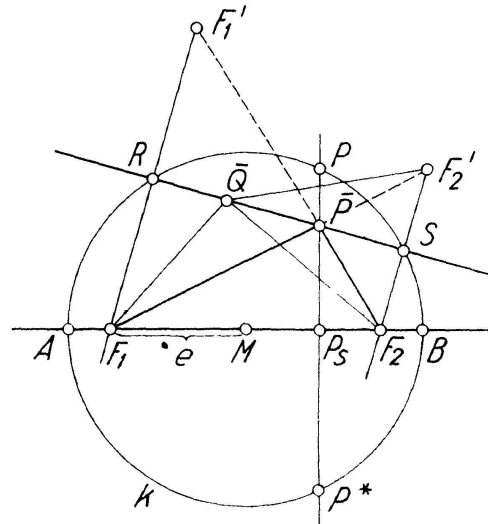
ist.  $R$  und  $S$  liegen demnach auf dem Kreis mit dem Durchmesser  $AB$  (grösster Durchmesser der Ellipse) [4].

Nach diesen elementargeometrischen Vorbereitungen soll jetzt gezeigt werden, dass unsere Ellipse zugleich als normal-affines Bild des Kreises  $k$  erhalten werden kann. Wir stellen diese Querverbindung mit der Affingeometrie auf einem ähnlichen Wege her, wie er bei einer früheren Gelegenheit von BINDSCHIEDLER eingeschlagen wurde [5].

Es ist zu zeigen, dass das Verhältnis  $\bar{P}P_s/PP_s = \kappa$  unabhängig von der Lage des Ellipsenpunktes  $\bar{P}$  ist.

Zunächst entnimmt man aus der Figur 1 die Beziehung

$$\Delta F_1F'_1\bar{P} : \Delta F_1F_2\bar{P} = \Delta F_1F_2\bar{P} : \Delta F_2F'_2\bar{P} = F_1\bar{P} : F_2\bar{P}.$$



Figur 1

Hieraus folgt

$$(\Delta F_1 F_2 \bar{P})^2 = (\Delta F_1 F_1' \bar{P}) (\Delta F_2 F_2' \bar{P}).$$

Die vorkommenden Flächeninhalte seien alle positiv genommen. Dann gilt

$$\frac{1}{4} F_1 F_2^2 \cdot \bar{P} P_s^2 = |\bar{P} R \cdot R F_1 \cdot \bar{P} S \cdot S F_2|.$$

Nun ist aber  $\bar{P} R \cdot \bar{P} S$  die Potenz von  $\bar{P}$  und  $F_1 R \cdot S F_2 = F_1 R \cdot F_1 R'$  die Potenz des Punktes  $F_1$  bezüglich  $k$ .

$$\bar{P} R \cdot \bar{P} S = \bar{P} P^* \cdot \bar{P} P = (\bar{P} P_s + P P_s) (\bar{P} P_s - P P_s) = \bar{P} P_s^2 - P P_s^2 = \bar{P} P_s^2 \left(1 - \frac{1}{\kappa^2}\right),$$

$$F_1 R \cdot F_1 R' = F_1 A \cdot F_1 B = (e - a) (e + a) = e^2 - a^2 = -b^2.$$

Beide Potenzen sind negativ, da  $\bar{P}$  und  $F_1$  innerhalb  $k$  liegen. Unter Berücksichtigung, dass

$$F_1 F_2^2 = (2e)^2 = 4(a^2 - b^2)$$

ist, folgt jetzt

$$a^2 - b^2 = \left(\frac{1}{\kappa^2} - 1\right) b^2 \quad \text{oder} \quad \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} - 1 = \frac{1}{\kappa^2} - 1,$$

das heisst aber

$$\kappa = \pm \frac{b}{a}.$$

Das negative Vorzeichen steht dann, wenn man anstelle von  $P$  den Punkt  $P^*$  nimmt. In beiden Fällen aber erweist sich  $\kappa$  als unabhängig von  $\bar{P}$ . Unsere Ellipse lässt sich demnach auf zwei Arten als normal-affines Bild des Kreises  $k$  interpretieren. Die beiden Abbildungen  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  haben dieselbe Achse  $AB$ , und die Affinitätsverhältnisse haben die Werte

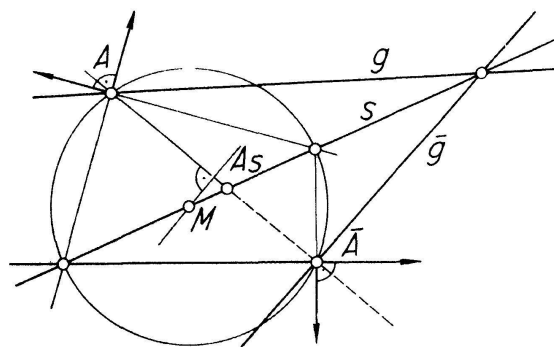
$$\kappa_1 = +\frac{b}{a} \quad \text{und} \quad \kappa_2 = -\frac{b}{a}.$$

## 2. Die allgemeine perspektive Affinität

Eine allgemeine perspektive Affinität  $\Phi$  der Zeichenebene auf sich selbst ist festgelegt durch eine Gerade  $s$  (Affinitätsachse), eine Richtung (Affinitätsrichtung) und eine bestimmte von Null verschiedene Zahl  $\kappa$  (Affinitätsverhältnis). Die Verbindungsgeraden einander zugeordneter Punkte  $A$  und  $\bar{A}$  sind parallel zur Affinitätsrichtung, und es ist

$$\frac{\bar{A}A_s}{AA_s} = \kappa.$$

$\kappa > 0$  bedeutet, dass  $A$  und  $\bar{A}$  auf derselben Seite von  $s$ ,  $\kappa < 0$  dass die genannten Punkte auf verschiedenen Seiten von  $s$  liegen. Aus dieser Definition der perspektiven Affinität lassen sich leicht die bekannten Eigenschaften der Abbildung gewinnen.



Figur 2

Die wichtigsten unter ihnen vom Standpunkt der konstruktiven Geometrie aus sind die *Geradentreue* und die *Parallelentreue* (parallele Geraden haben parallele Bilder). Daneben sei noch erwähnt, dass das Verhältnis von Strecken auf parallelen Geraden und ebenso das Verhältnis der Flächeninhalte von Figuren Invarianten der Abbildung darstellen [6].

Für jede perspektive Affinität  $\Phi$  existiert ein sogenanntes *invariantes Rechtwinkel-paar*, das heisst, es gibt zwei zueinander senkrechte Richtungsfelder, deren Bilder wiederum aufeinander senkrecht stehen. Man findet den invarianten rechten Winkel in  $A$  bzw.  $\bar{A}$  mit Hilfe eines Kreises, der durch  $A$  und  $\bar{A}$  geht und dessen Mittelpunkt auf der Affinitätsachse  $s$  liegt.  $M$  ist der Schnittpunkt von  $s$  mit der Mittelsenkrechten von  $A\bar{A}$  (Figur 2). Falls  $\Phi$  keine axiale Symmetrie ist<sup>2)</sup>, ist immer genau ein invariantes Rechtwinkel-paar vorhanden. Bei einer axialen Symmetrie hingegen ist jeder rechte Winkel invariant, denn diese Abbildung ist ja eine Kongruenz.

Die Abbildung  $\Phi$  ist eineindeutig; die Umkehrabbildung  $\Phi^{-1}$  ist ebenfalls eine perspektive Affinität.  $\Phi^{-1}$  hat dieselbe Achse und dieselbe Richtung wie  $\Phi$ ; ihr Verhältnis hat den Wert  $1/\kappa$ .

Wir betrachten nun zwei perspektive Affinitäten  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$ , die wie folgt miteinander verknüpft sind: Ihre Verhältnisse seien gleich gross ( $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ ), und es sei die Achse der einen Abbildung parallel zur Affinitätsrichtung der andern. Auf irgendeine Figur werde zuerst die Abbildung  $\Phi_1$  ausgeübt und hernach auf das erhaltene Bild die Abbildung  $\Phi_2$ . Man spricht in diesem Falle von einer *Zusammen-*

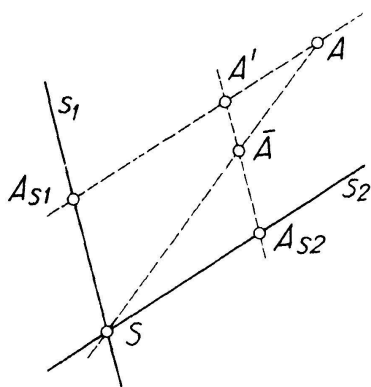
<sup>2)</sup> Eine axiale Symmetrie ist eine normale perspektive Affinität mit  $\kappa = -1$ .

setzung der beiden Abbildungen  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$ , und zwar in der Reihenfolge zuerst  $\Phi_1$  und dann  $\Phi_2$ . Für die Direktabbildung schreiben wir das Symbol  $\Phi_1 \circ \Phi_2$ ; das Zeichen  $\circ$  lässt sich als Operationszeichen für die Hintereinanderausführung von Abbildungen interpretieren (Figur 3).

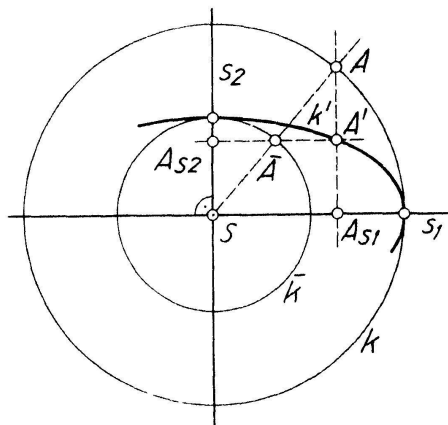
Abbildung  $\Phi_1: A \rightarrow A'$ , Abbildung  $\Phi_2: A' \rightarrow \bar{A}$ , Abbildung  $\Phi_1 \circ \Phi_2: A \rightarrow \bar{A}$ .

Da nun  $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$  ist, folgt

$$\frac{A'A_{s_1}}{AA_{s_1}} = \frac{\bar{A}A_{s_2}}{A'A_{s_2}} = \kappa = \frac{S\bar{A}}{SA}.$$



Figur 3



Figur 4

Es ist daher  $\Phi_1 \circ \Phi_2$  eine perspektive Ähnlichkeit mit dem Zentrum  $S$  und mit dem Verhältnis  $\kappa$ ; wir verwenden dafür das Zeichen  $\Sigma$ :

$$\Phi_1 \circ \Phi_2 = \Sigma^3).$$

Auf Grund des eben festgestellten Sachverhaltes lässt sich jetzt leicht eine weitere affine Beziehung zwischen Ellipse und Kreis gewinnen. Wie wir gezeigt haben, ist die Ellipse mit den Halbachsen  $a$  und  $b$  ( $a > b$ ) zum Kreis  $k$  über dem Ellipsendurchmesser  $2a$  normal-affin. Die Abbildung, welche diese Zuordnung herstellt, sei mit  $\Phi_1$  bezeichnet; sie hat die Achse  $s_1$ , und ihr Verhältnis hat den Wert  $\kappa_1 = b/a$  (Figur 4).  $\Phi_2$  sei nun die normale Affinität mit der Achse  $s_2$  ( $s_2 \perp s_1$ ) und  $\kappa_2 = \kappa_1 = b/a$ . Für  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  liegt dann die oben untersuchte Situation vor, das heisst, es ist  $\Phi_1 \circ \Phi_2 = \Sigma$  eine perspektive Ähnlichkeit mit dem Zentrum  $S$  und mit dem Verhältnis  $\kappa = b/a$ .  $\Sigma$  bildet den Kreis  $k$  auf den Kreis  $\bar{k}$  über der kleinen Ellipsenachse  $2b$  ab.

Aus der Beziehung  $\Phi_1 \circ \Phi_2 = \Sigma$  folgt nun aber durch linksseitige «Multiplikation» mit der inversen Abbildung  $\Phi_1^{-1}$

$$\Phi_1^{-1} \circ \Phi_1 \circ \Phi_2 = \Phi_2 = \Phi_1^{-1} \circ \Sigma,$$

<sup>3)</sup> Die beiden vorliegenden Abbildungen  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  sind übrigens kommutativ, das heisst

$$\Phi_1 \circ \Phi_2 = \Phi_2 \circ \Phi_1.$$

Die Reihenfolge ihrer Zusammensetzung spielt keine Rolle.

denn  $\Phi_1^{-1} \circ \Phi_1$  ist die identische Abbildung, bei der jeder Punkt an Ort bleibt.  $\Phi_1^{-1}$  bildet die Ellipse  $k'$  auf den Kreis  $k$  ab, und durch die Abbildung  $\Sigma$  wird aus  $k$  der Kreis  $\bar{k}$ . Wir schliessen daraus, dass  $\Phi_2 = \Phi_1^{-1} \circ \Sigma$  die Ellipse  $k'$  in den Kreis  $\bar{k}$  überführt. Die normale perspektive Affinität

$$\Phi_2^{-1} = (\Phi_1^{-1} \circ \Sigma)^{-1} = \Sigma^{-1} \circ \Phi_1 \quad 4)$$

bildet somit den Kreis  $\bar{k}$  auf die Ellipse  $k'$  ab. Dies bedeutet aber:

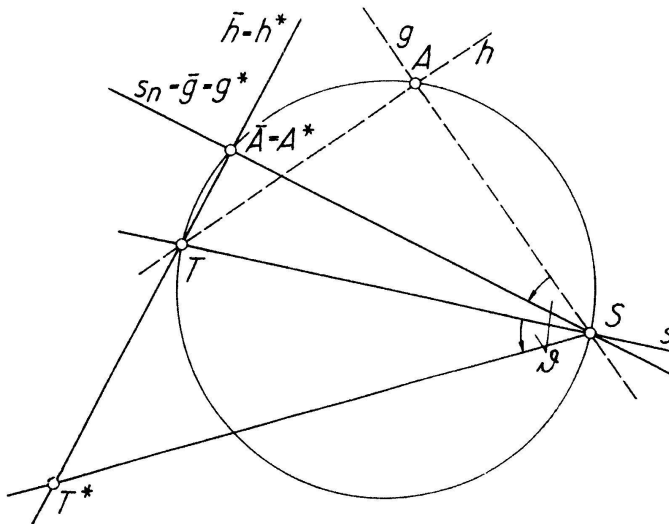
**Satz:** *Jede Ellipse ist gleichzeitig auch normal-affines Bild jenes Kreises, der die kleine Ellipsenachse zum Durchmesser hat<sup>5)</sup>.*

Auf die Zusammensetzung von Normal-Affinitäten mit zueinander senkrechten Achsen wird man im Unterricht auch bei andern Gelegenheiten stossen. Es sei in diesem Zusammenhang auf die von VAN DER WAERDEN und andern Autoren vorgeschlagene Einführung der natürlichen Logarithmen hingewiesen [7, 8]. Dort steht im Mittelpunkt der Betrachtungen ein derartiges Paar von perspektiven Affinitäten  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$ , für welches  $\kappa_1 \cdot \kappa_2 = 1$  ist, das heisst, die Abbildung  $\Phi_1 \circ \Phi_2$  ist dann flächentreu.

### 3. Das perspektiv-affine Bild eines Kreises

Es soll jetzt gezeigt werden, dass auch das schief-affine Bild eines Kreises eine Ellipse ist.

Es sei  $\Phi$  eine perspektive Affinität mit der Achse  $s$ ;  $A$  und  $\bar{A}$  sei ein korrespondierendes Punktepaar. Wir denken uns in  $A$  bzw.  $\bar{A}$  das invariante Rechtwinkelpaar konstruiert.



Figur 5

Daneben betrachten wir jetzt eine Drehstreckung  $\Omega$  mit dem Zentrum  $S$ , dem Drehwinkel  $\vartheta$  und dem Streckungsfaktor  $\sigma = S\bar{A}/SA$  (Figur 5).  $\Omega$  ist die Zusammen-

4) Für zwei eindeutige, das heisst umkehrbare Abbildungen  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  gilt allgemein

$$(\Psi_1 \circ \Psi_2)^{-1} = \Psi_2^{-1} \circ \Psi_1^{-1}.$$

5) Wie zur Achse  $s_1$  gibt es auch zu  $s_2$  zwei Affinitäten; ihre Verhältnisse haben die Werte  $\pm a/b$ .

setzung aus einer Drehung mit dem Zentrum  $S$  um den Winkel  $\vartheta$  und aus einer perspektiven Ähnlichkeit mit demselben Zentrum  $S$  und dem Streckungsfaktor  $\sigma$ .

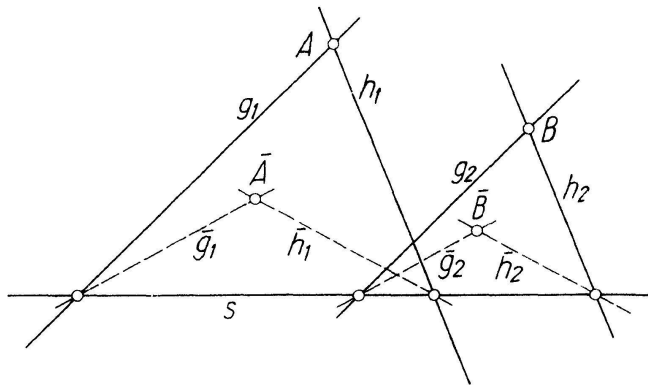
Die Bilder von  $A$ ,  $g$  und  $h$  bei der Abbildung  $\Omega$  sind mit  $A^*$ ,  $g^*$  und  $h^*$  bezeichnet. Infolge der besondern Anpassung von  $\Omega$  an  $\Phi$  ist  $A^* = \bar{A}$ ,  $g^* = \bar{g}$  und  $h^* = \bar{h}$ . Für das Bild  $T^*$  von  $T$  bei  $\Omega$  gilt

$$A^*T^* = \sigma \cdot AT.$$

Weiter sei nun  $\Phi_n$  eine normale Affinität mit der Achse  $s_n = \bar{g} = g^*$  und mit dem Verhältnis

$$\kappa_n = \frac{A^*T}{A^*T^*} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{A^*T}{AT}.$$

Die Zusammensetzung  $\Omega \circ \Phi_n$  ist dann eine Abbildung, die sowohl  $S$  als auch  $T$  zu Fixpunkten hat. Jede der beiden Partialabbildungen  $\Omega$  und  $\Phi_n$  ist geradentreu, führt



Figur 6

Parallelen in Parallelen über und lässt das Teilverhältnis von 3 Punkten auf einer Geraden invariant. Diese Eigenschaften kommen daher auch der Direktabbildung  $\Omega \circ \Phi_n$  zu. Auf Grund der Verhältnistreue ergibt sich zunächst, dass jeder Punkt der Verbindungsgeraden  $s$  von  $S$  und  $T$  ein Fixpunkt von  $\Omega \circ \Phi_n$  ist. Eine parallelen-treue Abbildung mit der Fixpunktgeraden  $s$  ist nun aber stets eine perspektive Affinität mit der Achse  $s$ . Diese Tatsache lässt sich direkt aus der Figur 6 entnehmen. Sind  $g_1$  und  $g_2$  bzw.  $h_1$  und  $h_2$  parallele Geraden, so sind auch  $\bar{g}_1$  und  $\bar{g}_2$  bzw.  $\bar{h}_1$  und  $\bar{h}_2$  parallel. Daraus folgt aber, dass einerseits die Geraden  $A\bar{A}$  und  $B\bar{B}$  unter sich parallel sind und andererseits, dass die Geraden  $AB$  und  $\bar{A}\bar{B}$  sich auf  $s$  schneiden.

Da die als perspektive Affinität mit der Achse  $s$  erkannte Abbildung  $\Omega \circ \Phi_n$  den Punkt  $A$  in den Punkt  $\bar{A}$  überführt, stimmt diese mit der ursprünglich gegebenen Abbildung  $\Phi$  überein. Wir haben somit

$$\Phi = \Omega \circ \Phi_n.$$

Es ist uns also eine Zerlegung der vorgegebenen perspektiven Affinität  $\Phi$  in eine Drehstreckung  $\Omega$  und in eine normale Affinität  $\Phi_n$  gelungen<sup>6)</sup>.

<sup>6)</sup> Diese Zerlegung ist nicht eindeutig. Man kann zum Beispiel auch mit einer Drehstreckung mit dem Zentrum  $T$  beginnen.



Bei der Abbildung  $\Omega$  geht ein Kreis  $k$  in einen Kreis  $k^*$  über und dieser wiederum wird durch die normale Affinität  $\Phi_n$  im allgemeinen auf eine Ellipse  $\bar{k}$  abgebildet ( $\bar{k}$  ist ein Kreis, wenn das Affinitätsverhältnis von  $\Phi_n$  den Wert  $\pm 1$  hat). Fassen wir die Kreise als spezielle Ellipsen auf, so ist jetzt der folgende Satz bewiesen:

**Satz:** *Das perspektiv-affine Bild eines Kreises ist stets eine Ellipse.*

Mit diesem Ergebnis ist jetzt die Grenzstelle zwischen der metrischen und der affinen Geometrie der Ellipse überschritten. Hier kann die Behandlung der affinen Eigenschaften der Kurve einsetzen, wie sie sich etwa in der darstellenden Geometrie in Verbindung mit der Parallelprojektion aufdrängt.

Abschliessend sei noch bemerkt, dass die Idee der Aufspaltung einer beliebigen perspektiven Affinität in eine Drehstreckung und in eine normale Affinität auch dem von MÜLLER und KRUPPA in [9] angegebenen Äquivalenzbeweis zugrunde liegt. Die beiden Teilabbildungen treten aber dort nicht offen hervor, so dass die Diskussion ganz im Rahmen statischer Betrachtungen abläuft. M. JEGER, Luzern

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] K. STRUBECKER, *Vorlesungen über darstellende Geometrie* (Göttingen 1958).
- [2] H. FLÜCKIGER, *Leitfaden der darstellenden Geometrie*, 2. Aufl. (Zürich 1947), S. 43.
- [3] E. SALKOWSKI, *Der Gruppenbegriff als Ordnungsprinzip des geometrischen Unterrichtes* (Leipzig, Berlin 1924).
- [4] WEBER-WELLSTEIN, *Enzyklopädie der Elementar-Mathematik*, Bd. II (Leipzig 1905), S. 501.
- [5] C. BINDSCHEDLER, *Zur Elementargeometrie der Ellipse*, *El. Math.* 3, 105–111 (1948).
- [6] M. JEGER, *Konstruktive Abbildungsgeometrie*. Ein Beitrag zur Neuorientierung des Geometrieunterrichtes auf der Mittelschule, 2. Aufl. (Luzern 1959), § 7.
- [7] B. L. VAN DER WAERDEN, *Über die Einführung des Logarithmus im Schulunterricht*, *El. Math.* 12, 1–8 (1957).
- [8] J. BRANKAMP, *Die Einführung der Logarithmen als Flächeninhalt unter der Hyperbel  $y = 1/x$* , *Der Mathematikunterricht*, Beiträge zu seiner wissenschaftlichen und methodischen Gestaltung, Heft 2 (1957).
- [9] E. MÜLLER und E. KRUPPA, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie*, 5. Aufl. (Wien 1948), S. 99.

## Ungelöste Probleme

**Nr. 34.** Es sei  $S$  die gewöhnliche Kugelfläche, und  $p \in S$  bezeichne einen variablen Punkt. Weiter sollen  $p_i \in S$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) die Eckpunkte eines der Kugelfläche eingeschriebenen Rechtecks bedeuten, wobei sich  $p_1$  und  $p_3$  bzw. auch  $p_2$  und  $p_4$  diagonal gegenüberliegen sollen.

Ist  $\Phi(p)$  eine reellwertige stetige Funktion auf  $S$ , so gibt es eine Spiegelung  $\sigma$  an einer durch den Mittelpunkt von  $S$  hindurchgehenden Ebene derart, dass die Bedingungen

$$\Phi(\sigma p_1) = \Phi(\sigma p_3); \quad \Phi(\sigma p_2) = \Phi(\sigma p_4) \quad (\text{a})$$

erfüllt werden; hierbei bezeichnet  $\sigma p$  den Bildpunkt zu  $p$ .