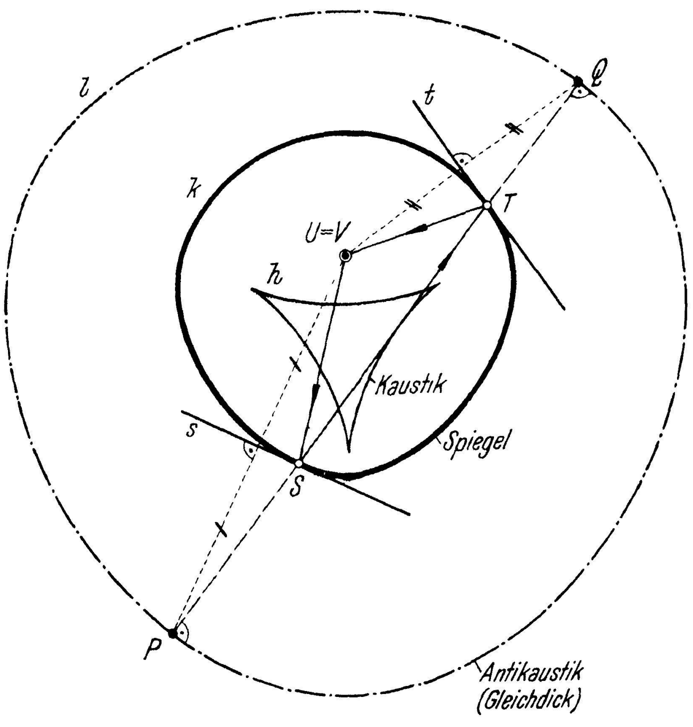
Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 15 (1960)
Heft: 2

Rubrik: Ungelöste Probleme

Ungelöste Probleme

Nr. 35. Die Ellipse hat bekanntlich die Eigenschaft, alle von einem ihrer Brennpunkte ausgehenden Strahlen nach einmaliger Reflexion wieder im anderen Brennpunkt zu vereinigen. Es wird nun die Frage erhoben: Gibt es in der Ebene analytische, insbesondere algebraische Spiegelkurven, welche die von einem festen Zentrum U ausgehenden Lichtstrahlen nach zweimaliger Reflexion in einem anderen festen Punkt V sammeln?

Ausser in zwei Grenzfällen, nämlich für die Annahme zusammenfallender oder unendlich ferner Zentren, ist eine Antwort anscheinend nicht bekannt. Fest steht lediglich, dass nach einem Grundgesetz der geometrischen Optik der Lichtweg von U nach V konstante Länge hat. Die Schwierigkeit der Problemstellung liegt in der Forderung, dass die Spiegelkurve in ihrer Gesamtheit und nicht etwa bloss stückweise analytisch sein soll. Ohne diese Einschränkung liesse sich eine Lösung – die dann allerdings nur für einen gewissen Strahlensektor gültig wäre – beispielsweise aus zwei Ellipsenbögen zusammensetzen.

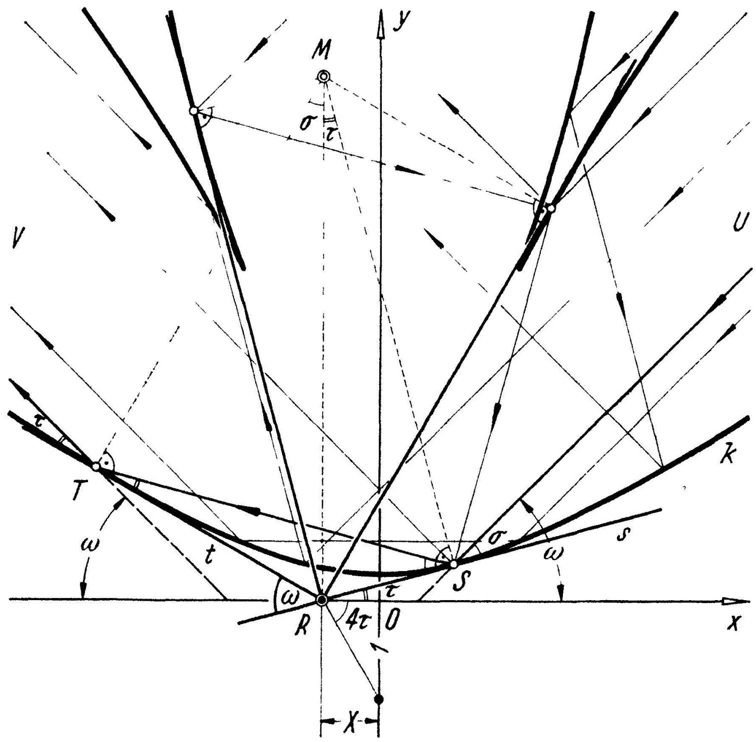


Figur 1

Die Frage nach jenen Spiegelkurven k, die das von einem eigentlichen Zentrum U ausgehende Strahlenbüschel nach zweimaliger Reflexion an derselben Stelle $V = U$ wieder sammeln, ist 1745 von einem anonymen Geometer gestellt und im Jahr darauf von EULER beantwortet worden[1]). Die ohne Beweis mitgeteilte, ganz undurchsichtige Lösung erweist sich nach eingehender Analyse als nahe verwandt mit der folgenden,

[1]) L. EULER, *Solutio problematis catoptrici*, in his Actis A. 1745 Mense Septembri P. I pag. 523 propositi. Nova Acta Eruditorum 1746, 230–233.

vom Unterzeichneten gegebenen Lösung[2]): Spiegelt man das Zentrum U an sämtlichen Tangenten von k, so erhält man die Punkte der sogenannten Antikaustik l, deren Normalen die reflektierten Strahlen sind. Im vorliegenden Fall (vgl. Figur 1) wird jeder Reflexstrahl Normale für zwei Punkte P, Q von l sein. Mit anderen Worten heisst das, die Antikaustik l ist eine Kurve konstanter Breite, ein «Gleichdick», das man etwa durch die Evolute h und die Dicke festlegen kann. Wählt man dann das Zentrum U und lässt man einen Punkt P auf l laufen, so umhüllt die Streckensymmetrale s von UP die gesuchte Spiegelkurve k. In Figur 1 wurde für h eine Steiner-Zykloide genommen, was auf ein algebraisches Gleichdick und damit auch auf eine algebraische Spiegelkurve (12. Klasse und 14. Ordnung) führt. – Seinerzeit wurde die Frage nochmals von Biot[3]) aufgegriffen, dessen analytische Behandlung wiederholt reproduziert wurde, obwohl sie in einer derart verwickelten Differentialgleichung gipfelte, dass sie als konkretes Resultat nur das triviale Beispiel der Ellipse lieferte, das sich bei der geometrischen Lösung dann einstellt, wenn man als Gleichdick einen U umschliessenden Kreis wählt.



Figur 2

Die Frage nach jenen Spiegelkurven k, die das aus einem uneigentlichen Zentrum U kommende Parallelenbüschel nach zweimaliger Reflexion zu einem anderen Fernpunkt V umlenken, lässt sich mittels kinematischer Überlegungen elementar erledigen[2]). Führt man ein Normalkoordinatensystem x, y so ein, dass die beiden Lichtrichtungen U und V mit der x-Achse gleiche Winkel $\pm\,\omega$ bilden, und bezeichnen σ und τ die Einfallswinkel gegen zusammengehörige Spiegelelemente (S, s) und (T, t),

[2]) W. Wunderlich, *Ein Spiegelproblem*, Mh. Math. *53*, 63–72 (1949).
[3]) M. Biot, *Mémoire sur les équations aux différences mêlées*, Mém. prés. à l'Inst. Sci., Lettres et Arts (Paris) *1*, 296–327 (1806).

so erkennt man zunächst aus der konstanten Gesamtablenkung $2\sigma + 2\tau = 2\omega$, dass zusammengehörige Spiegeltangenten den festen Winkel $\sphericalangle\, s\, t = \sigma + \tau = \omega$ einschliessen müssen und weiterhin, dass τ den Neigungswinkel von s und $-\sigma$ jenen von t gegen die x-Achse darstellt (Figur 2). Die Spiegelkurve k kann daher als gemeinsame Einhüllende eines geeignet bewegten starren Winkels erzeugt werden. Sucht man für diese Bewegung das Momentanzentrum M auf, das sich im Schnitt der beiden Berührungsnormalen von S und T ergibt, und bestimmt man anschliessend die Fortschreitrichtung des Winkelscheitels R, so findet man hierfür aus einfachen Winkelbeziehungen die Abszissenrichtung x. Nimmt man daher an, dass R die x-Achse durchläuft, und beschreibt man die Bewegung des Winkels $s\, t$ durch Angabe der Scheitelabszisse $X(\tau)$ in Abhängigkeit vom Winkelparameter τ, so hat man nur zu fordern, dass zu $\tau - \omega$ jeweils derselbe Wert gehört: $X(\tau)$ muss daher eine periodische analytische Funktion mit der Periode ω sein, was auch hinreicht. Für die gesuchte Spiegelkurve k erhält man auf diese Weise als Hüllbahn der Tangente s ($x \sin\tau - y \cos\tau = X \sin\tau$) die Parameterdarstellung $x = X(\tau) + X'(\tau) \sin\tau \cos\tau$, $y = X'(\tau) \sin^2\tau$.

Einfache und interessante Spiegelkurven gehören beispielsweise zur Annahme $X = -\operatorname{ctg} m\,\tau$, wobei $m\,\omega = \pi$. Figur 2 illustriert den Fall $m = 4$ ($\omega = \pi/4$); die betreffende Spiegelkurve 4. Klasse und 6. Ordnung belegt gleichzeitig die Existenz algebraischer Lösungen.

Eine Erweiterung der eingangs erhobenen Fragestellung auf n-malige Reflexion oder auf den Raum liegt auf der Hand. Als Beitrag hierzu sei auf jene kaum bekannte Eigenschaft des elliptischen Paraboloides hingewiesen, derzufolge parallel zur Achse ins Innere einfallende Lichtstrahlen nach dreimaliger Reflexion wieder achsenparallel austreten[4]).

W. WUNDERLICH, Wien

[4]) W. WUNDERLICH, *Spiegelung am elliptischen Paraboloid*, Mh. Math. *52*, 13–37 (1948).

Aufgaben

Aufgabe 339. Démontrer que pour tout entier $n > 1$ on a les inégalités

$$2 \leqq \frac{\sigma_k(n) + \varphi_k(n)}{n^k} \leqq \vartheta(n),$$

où $\varphi_k(n)$ désigne le nombre des suites de nombres naturels $\leqq n$, tels que

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k, n) = 1,$$

et

$$\sigma_k(n) = \sum_{d/n} d^k, \qquad \vartheta(n) = \sum_{d/n} 1 .$$

Démontrer que pour les nombres n composés chacune des égalités est exclue.

A. MAKOWSKI, Varsovie

Solution: On a

$$\varphi_k(n) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d^k,$$

d'où, puisque $1 + \mu(d) \geqq 0$,

$$\frac{\sigma_k(n) + \varphi_k(n)}{n^k} = \sum_{d/n} \left(1 + \mu\left(\frac{n}{d}\right)\right)\left(\frac{d}{n}\right)^k = \sum_{d/n} (1 + \mu(d)) \frac{1}{d^k} \geqq 1 + \mu(1) = 2 .$$