Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Band: 19 (1964)
Heft: 4

Artikel: Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie aus dem allgemeinen Poincarémodell

Autor: Mall, J.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23302

Ist d gegeben, so errechnet sich aus (7) sofort ein bestimmter Wert für λ. Damit aber können die drei speziellen Horozyklen H_0, H_1, H_2 und davon ausgehend die gesamte Überdeckung der hyperbolischen Ebene konstruiert werden.

Für $\lambda < 1$ und $\lambda > 2 + \sqrt{3}$ führt diese Konstruktion auf eine mehr als zweifache Überdeckung. Beschränken wir uns auf zweifache Überdeckungen, so erhalten wir für die Dichte unserer Horozyklenanordnung die Abschätzung:

$$d \leqq \frac{8 - 2\sqrt{3}}{\pi}.$$

H. ZEITLER, Weiden (Oberpf.), Deutschland

LITERATURVERZEICHNIS

[1] FEJES TÓTH, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum* (Springer-Verlag, Berlin 1953).
[2] FEJES TÓTH, *Neuere Ergebnisse in der diskreten Geometrie*, El. Math. *15*, 25–36 (1960).
[3] FEJES TÓTH, *Kreisüberdeckungen der hyperbolischen Ebene*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. *4*, 111–114 (1953).
[4] FEJES TÓTH, *Über die dünnste Horozyklenüberdeckung*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. *7*, 95–98 (1956).
[5] O. PERRON, *Nichteuklidische Elementargeometrie der Ebene* (Teubner-Verlag, Stuttgart 1962).
[6] K. FLADT, *Elementargeometrie III* (Klett-Verlag, Stuttgart 1961).
[7] H. MESCHKOWSKI, *Nichteuklidische Geometrie* (Vieweg-Verlag, Braunschweig 1954).
[8] F. GONSETH, P. MARTI, *Leitfaden der Planimetrie*, Teil II (Orell-Füssli-Verlag, Zürich 1953).

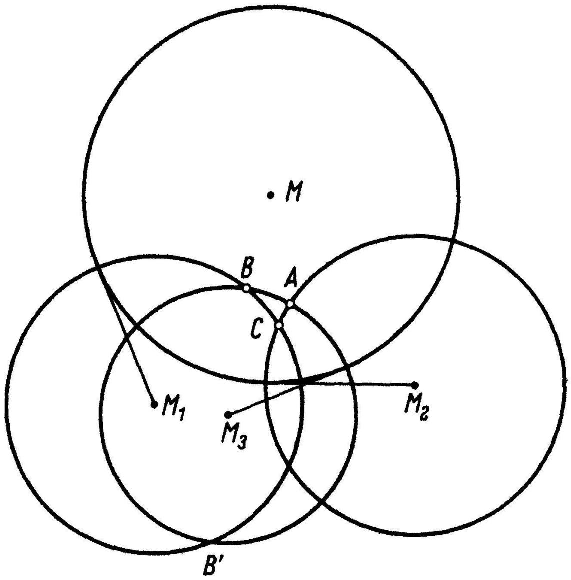
Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie aus dem allgemeinen Poincarémodell

Den folgenden Betrachtungen soll das allgemeine[1]) Poincarémodell für die hyperbolische Geometrie zugrundegelegt werden. Das Innere des sogenannten Fundamentalkreises sei die hyperbolische Ebene. Die im Innern dieses Fundamentalkreises befindlichen Bögen der zu diesem Kreis gehörigen orthogonalen Kreise stellen bekanntlich die hyperbolischen Geraden dieses Modells dar. Im folgenden soll nun für ein allgemeines Dreieck ohne Umweg über das rechtwinklige Dreieck die hyperbolische Trigonometrie abgeleitet werden. Insbesondere werden hergeleitet: Sinussatz, Seitencosinussatz und Winkelcosinussatz. Die Herleitung dieser Sätze gelingt relativ einfach durch Wahl eines günstig gelegenen Dreiecks mit Hilfe einer einzigen Figur.

---

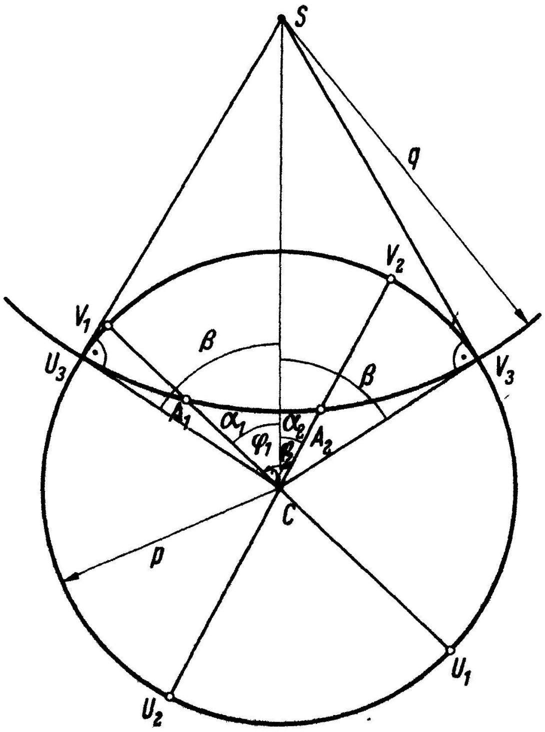
[1]) Eine Herleitung für das spezielle Poincarémodell, bei dem die hyperbolischen Geraden durch auf einer Fundamentalgeraden senkrechte Halbkreise realisiert sind, hat der Verfasser in MNU *16*, 311–314 (1963) gegeben.

Bekanntlich sind zwei hyperbolische Dreiecke, die durch Inversion an einem Kreis ineinander übergehen, kongruent. Diese Tatsache wird hier benützt. Im folgenden werde zunächst gezeigt, wie das für die Rechnung geeignete Dreieck gewonnen wird.



Figur 1

$A\,B\,C$ (Figur 1) ist ein hyperbolisches Dreieck innerhalb des Fundamentalkreises mit Mittelpunkt M. Die beiden Kreise durch B schneiden sich ein zweites Mal in B'. B' werde nun als Mittelpunkt eines zum Fundamentalkreis orthogonalen Kreises ge-



$$C\,A_1 = U_2$$
$$C\,A_2 = U_1$$

Figur 2

wählt und das Dreieck ABC an diesem Kreis gespiegelt. Dann geht zunächst der Fundamentalkreis in sich über. Die Kreise durch B (hyperbolische Geraden durch B) gehen in zwei Gerade über. Da die Kreise durch B den Fundamentalkreis senkrecht schneiden, müssen die beiden Geraden den Fundamentalkreis wegen der Winkeltreue ebenfalls senkrecht schneiden und daher durch den Kreismittelpunkt hindurchgehen. Das neue Dreieck hat also eine Ecke im Mittelpunkt des Fundamentalkreises. Die von dieser Ecke ausgehenden Seiten sind euklidische Geraden. Da man jedes hyperbolische Dreieck in diese Lage bringen kann, wird den folgenden Betrachtungen ein Dreieck in dieser speziellen Lage zugrundegelegt und aus ihm die hyperbolische Trigonometrie abgeleitet. Gemäss der Längendefinition gilt (Figur 2, Dreieck $C\,A_1\,A_2$):

$$L_{A_1A_2} = c = k \ln \left(\frac{U_3 A_2}{V_3 A_2}\,\frac{V_3 A_1}{U_3 A_1}\right),$$

$$L_{CA_i} = a_{i+1} = k \ln \frac{U_i A_i}{V_i A_i} \qquad (i = 1, 2; \quad a_3 = a_1)$$

k ist eine durch Wahl der Längeneinheit festsetzbare Konstante, über die hier nicht verfügt werden soll. Mit Hilfe von Figur 2 und den dort eingeführten Bezeichnungen folgt:

$$a_i = k \ln \frac{p + u_i}{p - u_i} \qquad (i = 1, 2)\,.$$

Hieraus folgt für $i = 1, 2$:

$$\operatorname{Sin}\frac{a_i}{k} = \frac{1}{2}\left(e^{a_i/k} - e^{-a_i/k}\right) = \frac{2\,p\,u_i}{p^2 - u_i^2}\,. \tag{1}$$

Ebenso ergibt sich

$$\operatorname{Cos}\frac{a_i}{k} = \frac{p^2 + u_i^2}{p^2 - u_i^2}\,. \tag{1a}$$

Aus Dreieck $S\,A_i\,C$ folgen für $i = 1, 2$ und $u_3 = u_1$ die Beziehungen:

$$\frac{\cos\alpha_i}{\sin\varphi_i} = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{q}\,; \tag{2}$$

$$p^2 + q^2 = u_{i+1}^2 + q^2 + 2\,u_{i+1}\,q\,\sin\alpha_i$$

oder

$$\sin\alpha_i = \frac{p^2 - u_{i+1}^2}{2\,u_{i+1}\,q}\,; \tag{3}$$

$$q^2 = p^2 + q^2 + u_{i+1}^2 - 2\,u_{i+1}\sqrt{p^2 + q^2}\,\cos\varphi_i$$

oder

$$\cos\varphi_i = \frac{p^2 + u_{i+1}^2}{2\,u_{i+1}\sqrt{p^2 + q^2}}\,. \tag{4}$$

Da $\varphi_i < \pi/2$ ist, folgt ausserdem

$$\sin\varphi_i = \frac{1}{2\,u_{i+1}}\sqrt{\frac{4\,u_{i+1}^2\,(p^2 + q^2) - (p^2 + u_{i+1}^2)^2}{p^2 + q^2}} \tag{5}$$

mit positiver Wurzel.

Weiter folgt aus den Dreiecken $U_3 A_2 C$, $U_3 A_1 C$, $V_3 A_2 C$ und $V_3 A_1 C$:

$$\overline{U_3 A_2}^2 = p^2 + u_1^2 - 2 p u_1 \cos(\beta + \varphi_2)$$
$$\overline{U_3 A_1}^2 = p^2 + u_2^2 - 2 p u_2 \cos(\beta - \varphi_1)$$
$$\overline{V_3 A_2}^2 = p^2 + u_1^2 - 2 p u_1 \cos(\beta - \varphi_2)$$
$$\overline{V_3 A_1}^2 = p^2 + u_2^2 - 2 p u_2 \cos(\beta + \varphi_1)$$

Unter Berücksichtigung von $\cos\beta = p/\sqrt{p^2+q^2}$ und $\sin\beta = q/\sqrt{p^2+q^2}$ und Formel (4) folgt:

$$\begin{aligned}
\overline{U_3 A_2}^2 &= \frac{(p^2+u_1^2)\, q^2}{p^2+q^2} + \frac{2 p q u_1 \sin\varphi_2}{\sqrt{p^2+q^2}} \\
\overline{U_3 A_1}^2 &= \frac{(p^2+u_2^2)\, q^2}{p^2+q^2} - \frac{2 p q u_2 \sin\varphi_1}{\sqrt{p^2+q^2}} \\
\overline{V_3 A_2}^2 &= \frac{(p^2+u_1^2)\, q^2}{p^2+q^2} - \frac{2 p q u_1 \sin\varphi_2}{\sqrt{p^2+q^2}} \\
\overline{V_3 A_1}^2 &= \frac{(p^2+u_2^2)\, q^2}{p^2+q^2} + \frac{2 p q u_2 \sin\varphi_1}{\sqrt{p^2+q^2}}
\end{aligned} \tag{6}$$

Aus der Definition von $L_{A_1 A_2} = c$ folgt:

$$\mathrm{Cos}\frac{c}{k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{U_3 A_2}^2 \cdot \overline{V_3 A_1}^2 + \overline{V_3 A_2}^2 \cdot \overline{U_3 A_1}^2}{U_3 A_2 \cdot V_3 A_1 \cdot V_3 A_2 \cdot U_3 A_1}\right).$$

Mit Hilfe der Formeln (6) erhält man:

$$\overline{U_3 A_2}^2 \cdot \overline{V_3 A_1}^2 + \overline{V_3 A_2}^2 \cdot \overline{U_3 A_1}^2 = \frac{2 q^4}{(p^2+q^2)^2} \prod_{i=1}^{2} (p^2 + u_i^2) + \frac{8 p^2 q^2}{p^2+q^2} \prod_{i=1}^{2} u_i \sin\varphi_i$$

und ebenso mit Hilfe von (6) und (5)

$$U_3 A_2 \cdot V_3 A_1 \cdot V_3 A_2 \cdot U_3 A_1 = \frac{q^2}{p^2+q^2} \prod_{i=1}^{2} (p^2 - u_i^2).$$

Daraus folgt weiter:

$$\mathrm{Cos}\frac{c}{k} = \frac{q^2 \prod_{i=1}^{2} (p^2 + u_i^2) + 4 p^2 (p^2 + q^2) \prod_{i=1}^{2} u_i \sin\varphi_i}{(p^2+q^2) \prod_{i=1}^{2} (p_i^2 - u_i^2)}. \tag{7}$$

Nunmehr ergeben sich rasch die Hauptsätze der hyperbolischen Trigonometrie.

1. Der Sinussatz

Aus (1) und (3) folgt:

$$\frac{\mathrm{Sin}(a_1/k)}{\mathrm{Sin}(a_2/k)} = \frac{u_1 (p^2 - u_2^2)}{u_2 (p^2 - u_1^2)}; \quad \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{p^2 - u_2^2}{u_2} \cdot \frac{u_1}{p^2 - u_1^2},$$

womit alles bewiesen ist.

2. *Der Seitencosinussatz*

Unter Berücksichtigung von (1), (1a), (4), (7) und

$$\cos\gamma = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2$$

folgt:

$$\operatorname{Cos}\frac{a_1}{k}\operatorname{Cos}\frac{a_2}{k} - \operatorname{Sin}\frac{a_1}{k}\operatorname{Sin}\frac{a_2}{k}\cos\gamma =$$

$$\prod_{i=1}^{2}\frac{p^2+u_i^2}{p^2-u_i^2} - 4p^2\prod_{i=1}^{2}\frac{u_i}{p^2-u_i^2}\left[\frac{1}{4(p^2+q^2)}\prod_{i=1}^{2}\frac{p^2+u_i^2}{u_i} - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\right] =$$

$$\frac{(p^2+q^2)\prod_{i=1}^{2}(p^2+u_i^2) - p^2\prod_{i=1}^{2}(p^2+u_i^2) + 4p^2(p^2+q^2)\prod_{i=1}^{2}u_i\sin\varphi_i}{(p^2+q^2)\prod_{i=1}^{2}(p^2-u_i^2)} = \operatorname{Cos}\frac{c}{k},$$

was zu beweisen war.

3. *Der Winkelcosinussatz*

Mit Hilfe von (2), (3) und (4) folgt:

$$\frac{\cos\gamma + \cos\alpha_1\cos\alpha_2}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2} = \frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\alpha_1\cos\alpha_2}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2} =$$

$$\frac{q^2\prod_{i=1}^{2}(p^2+u_i^2) + 4(p^2+q^2)^2\prod_{i=1}^{2}u_i\sin\varphi_i - 4q^2(p^2+q^2)\prod_{i=1}^{2}u_i\sin\varphi_i}{(p^2+q^2)\prod_{i=1}^{2}(p^2-u_i^2)} =$$

$$\frac{q^2\prod_{i=1}^{2}(p^2+u_i^2) + 4p^2(p^2+q^2)\prod_{i=1}^{2}u_i\sin\varphi_i}{(p^2+q^2)\prod_{i=1}^{2}(p^2-u_i^2)} = \operatorname{Cos}\frac{c}{k},$$

was zu beweisen war.

Aus diesen 3 Sätzen ergeben sich teils als Spezialfälle und teils durch einige Umrechnungen sofort auch die Formeln für das rechtwinklige hyperbolische Dreieck.

Auf dem Weg über das rechtwinklige Dreieck wurden diese Sätze abgeleitet von Herrn MESCHKOWSKI[1]). Der in diesem Aufsatz eingeschlagene Weg dürfte jedoch infolge der speziellen Dreieckswahl etwas einfacher sein. Einen einfachen Beweis des Winkelcosinussatzes gab Herr ZEITLER[2]).

Einen Beweis von nur zwei trigonometrischen Formeln für das rechtwinklige Dreieck im allgemeinen Poincarémodell lieferten HOWARD EVES und V. E. HOGGAT[3]).

J. MALL, Weiden, BRD

1) H. MESCHKOWSKI, *Nichteuklidische Geometrie* (Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig, Berlin, Stuttgart 1954).

2) H. ZEITLER, *Hyperbolische Trigonometrie im Poincaréschen Kreismodell* (Acta Math. Acad. Sci. Hung. *14* (1963).

3) HOWARD EVES and V. T. HOGGAT, *Hyperbolic Trigonometry derived from the Poincaré Model.* The American Mathematical Monthly *58* (1951).