Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 19 (1964)
Heft: 4

Rubrik: Aufgaben

1. As $a_i = 2\,R\sin\alpha_i$ and $R + r = R\,\Sigma\cos\alpha_i$, we have

$$d = 2\,R\left(\Sigma\sin\alpha_i - \Sigma\cos\alpha_i\tan\frac{\pi}{3}\right);$$

therefore

$$d = 4\,R\Sigma\sin\left(\alpha_i - \frac{\pi}{3}\right) = 16\,R\,\Pi\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\,\alpha_i\right).$$

Hence we get the theorem: *in a non-equilateral triangle one has $d > 0$, $d = 0$ or $d < 0$ accordingly as the middle angle is greater than, as great as or lesser than $\pi/3$.*

In the first example given by STEINIG α_2 is the middle angle and

$$\cos\alpha_2 = 0{,}8 > 0{,}5$$

whence $\alpha_2 < \pi/3$ and $d < 0$.
In the second example $\cos\alpha_2 = 1/6 < 0{,}5$ and therefore $d > 0$.

2. Clearly d has the same sign as

$$\Delta = (\Sigma\,a_i)^2 - 12\,(R + r)^2.$$

Since

$$(\Sigma\,a_i)^2 = 2\Sigma\,a_i^2 + 4\,r\,(4\,R + r)$$

and

$$\Sigma\,a_i^2 = 9\,R^2 - O\,H^2,$$

we are lead to

$$\Delta = 6\,R^2 - 8\,R\,r - 8\,r^2 - 2\,O\,H^2$$

or

$$\Delta = 8\,(R^2 - 2\,R\,r) - (2\,R^2 - 8\,R\,r + 8\,r^2) - 2\,O\,H^2. \qquad (1)$$

Now $O\,H = 2\,O\,N$ and $N\,J = {}^1/_2\,(R - 2\,r)$, where N denotes the centre of the nine-pointcircle; from this and (1) we obtain

$$\Delta = 8\,(O\,J^2 - N\,J^2 - O\,N^2)\,.$$

We have thus proved:

$$d > 0 \text{ if and only if } \sphericalangle\, J\,N\,O > \pi/2\,;$$
$$d = 0 \text{ if and only if } \sphericalangle\, J\,N\,O = \pi/2\,;$$
$$d < 0 \text{ if and only if } \sphericalangle\, J\,N\,O < \pi/2\,.$$

It is easily seen that our result is equivalent to the theorem: *$d > 0$, $d = 0$, $d < 0$ accordingly as $J\,O > J\,H$, $J\,O = J\,H$, $J\,O < J\,H$*[2]).

G. R. VELDKAMP, Technological University
Eindhoven, Netherlands

REFERENCE

[1] J. STEINIG, *Inequalities concerning the inradius and circumradius of a triangle*, El. Math. *18*, 127 (1963).

Aufgaben

Aufgabe 457. a) Wie gross ist das Achsenverhältnis einer Ellipse, der sich (unendlich viele) Sehnensechsecke einschreiben lassen, deren Seiten abwechselnd zu den beiden Winkelhalbierenden der Achsen parallel sind?

b) Zu jeder Ellipse mit einem Achsenverhältnis $a/b > \sqrt{3}$ gibt es zwei Scharen von Sehnensechsecken, bei denen je zwei aufeinanderfolgende Seiten aufeinander senkrecht

[2]) Bemerkung der Redaktion: Herr Steinig teilt uns mit, dass dieses Resultat auch leicht mit den Formeln (6) und (12) seiner Arbeit verifiziert werden kann.

stehen. Alle Sechsecke derselben Schar sind schiefsymmetrisch in bezug auf denselben Durchmesser der Ellipse. Man konstruiere ein solches Sechseck in eine gegebene Ellipse.

C. Bindschedler, Küsnacht

Lösung: Beschreibt man einem Kreis $k(O; r = a)$ einen Polygonzug $P_0 P_1 P_2 P_3 P_4 \ldots$ ein, dessen Sehnen abwechselnd zu zwei festen Richtungen parallel sind, so haben die orientierten Zentriwinkel $\sphericalangle P_0 O P_2$, $\sphericalangle P_2 O P_4, \ldots$ gleiche Grösse 2α mit $\sin\alpha = \overline{P_0 P_2} : 2a$. Der Polygonzug schliesst sich demnach genau dann nach $2n$ Zügen mit $P_{2n} = P_0$ und $P_i \neq P_0$ für $1 < i < 2n - 1$, wenn α die Bedingung

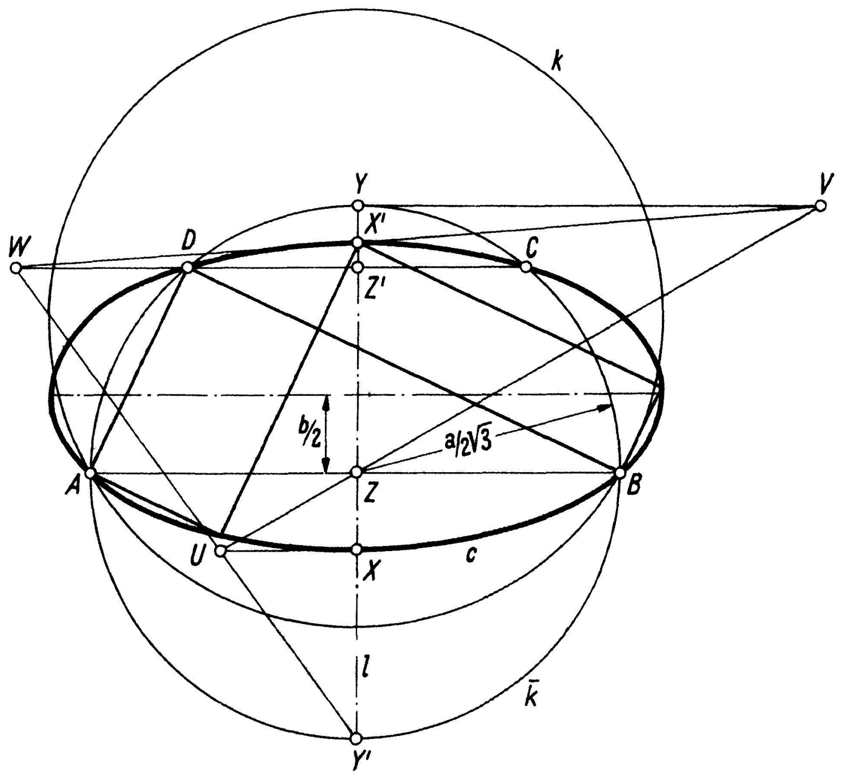
$$\alpha = \frac{q}{n}\,\pi\,, \quad n, q \text{ ganz und relativ prim} \tag{1}$$

erfüllt. Dies gilt unabhängig von der Lage der Anfangssehne $P_0 P_1$. Für $n > 2$ kann man sich auf die Werte $0 < \alpha < \pi/2$ beschränken, denn im Fall $\pi/2 < \alpha < \pi$ kann α durch den Nebenwinkel ersetzt werden, und für diesen gilt (1) ebenfalls. Es genügt also

$$0 < q < \frac{n}{2} \tag{2}$$

zu betrachten.

Die Sehnensechsecke der Aufgabe sind affin zu den geschlossenen Polygonzügen $P_0 P_1 \ldots P_6$ ($P_6 = P_0$) im Kreis k. Für diese ist speziell $n = 3$, und damit folgt aus (2) und (1) eindeutig $q = 1$, $\alpha = 60°$. *In der Affinität zwischen dem Originalkreis k und der Bildellipse c sind also jene 60°-Winkel zu betrachten, deren Bilder rechte Winkel sind:* Wählt man eine zur grossen Achse ($a > b$) der Ellipse c im Abstand $b/2$ parallele Sehne AB als Affinitätsachse (Figur), so fasst der grössere Bogen von k über der Sehne AB den Winkel 60°. Die Scheitel der Bildwinkel von 90° ergeben sich dann als Schnitte von c mit dem Thaleskreis $\bar{k}$ über AB.



Figur

Die von A und B verschiedenen Schnittpunkte C und D von c und $\bar{k}$ sind genau dann reell getrennt, wenn beide Nebenscheitel von c im Innern von $\bar{k}$ liegen. Da $\bar{k}$ den Radius $(1/2)\,\overline{AB} = (a/2)\sqrt{3}$ hat, gilt dann $(3/2)\,b < (a/2)\sqrt{3}$, also $a > b\sqrt{3}$. Die beiden Scharen der c einbeschriebenen Sehnensechsecke ergeben sich nun durch Ziehen von Parallelen zu

AC und BC bzw. zu AD und BD in der angegebenen Weise; die allen Sechsecken einer Schar gemeinsame schiefe Symmetrie folgt aus der Symmetrie der affinen Schar im Kreis k. Für $a = b\sqrt{3}$ fallen C und D in einem Nebenscheitel von c zusammen; AC und BC sind dann zu den Winkelhalbierenden der Ellipsenachsen parallel, wie in a) verlangt ist.

Das Kegelschnittbüschel mit den vier reell getrennten Grundpunkten A, B, C, D schneidet auf dem Mittellot l von $\overline{AB}$ eine hyperbolische Punktinvolution aus, die durch die Schnittpunkte X, X' und Y, Y' von c bzw. $\bar{k}$ mit l bestimmt ist. Das Parallelenpaar AB, CD schneidet als zerfallende Büschelkurve die Trägergerade l in einem Punktepaar Z, Z' dieser Involution. Da Z als Mitte von AB gegeben ist, kann Z' bekanntlich *durch Ziehen von 6 Geraden* bestimmt werden, die als Seiten eines vollständigen Vierecks auf der Geraden l die Involution X, X'; Y, Y'; Z, Z' ausschneiden.

Zur konstruktiven Durchführung wird man dieses vollständige Viereck so anlegen, dass die Schlussgerade mit CD zusammenfällt: Eine beliebige Gerade durch Z ($\nparallel AB$, $\nparallel l$) schneidet die Parallelen zu AB durch X und Y in U bzw. V; die Parallele zu AB durch den Schnittpunkt W von $X'V$ und $Y'U$ schneidet l in Z' und somit $\bar{k}$ in den gesuchten Punkten C und D, denn das durch U, V, W und den Fernpunkt von AB bestimmte vollständige Viereck scneidet auf l die vorliegende Involution aus.

Für $n > 3$ erhält man die c einbeschriebenen rechtwinkligen Sehnen-$2\,n$-Ecke in derselben Weise; der Abstand der Affinitätsachse AB von der Ellipsenhauptachse ist dabei nur so einzurichten, dass $\overline{AB} = 2\,a \sin\alpha$ wird, wobei auch mehrere Werte q bzw. α als Lösung von (2), (1) auftreten können. H. Schaal, Stuttgart

Der Aufgabensteller verwendet zur Lösung des zweiten Teils den orthoptischen Kreis der Ellipse (Radius $= \sqrt{a^2 + b^2}$). Einem Punkt P auf diesem Kreis muss bei der Affinität (Affinitätsverhältnis $= b : a$) ein Punkt P' entsprechen, von dem aus der Hauptkreis der Ellipse unter dem Winkel 60° erscheint. P' liegt also auf dem konzentrischen Kreis mit dem Radius $2\,a$. Für die gemeinsame Abszisse von P und P' ergibt sich sofort

$$x = \pm e^{-1} \sqrt{a^2 - 3\,b^2} \quad \text{mit} \quad e^2 = (a^2 - b^2)/a^2 .$$

Die Tangenten von P an die Ellipse geben die Richtungen der Seiten der gesuchten Sechsecke.

Eine weitere Lösung sandte G. Geise (Dresden).

Aufgabe 458. Man zeige, dass für ein Tetraeder die Summe der Quadrate der Kantenprojektionen auf eine Ebene dann und nur dann von der Lage der Ebene nicht abhängt, wenn das Tetraeder regulär ist. W. Jänichen, Berlin

Lösung: Das Tetraeder habe die Ecken O, A, B, C, so dass es durch die (linear unabhängigen) Vektoren $\boldsymbol{OA} = \mathfrak{a}$, $\boldsymbol{OB} = \mathfrak{b}$, $\boldsymbol{OC} = \mathfrak{c}$ schon beschrieben ist. Wir betrachten O als Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems und setzen $A\ (a_1, a_2, a_3)$, $B\ (b_1, b_2, b_3)$, $C\ (c_1, c_2, c_3)$.

Das Tetraeder ist genau dann regulär, wenn die Vektoren

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} - \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{m} = \mathfrak{a} - \mathfrak{b} + \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{n} = -\,\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$$

Kantenvektoren eines Würfels sind. (Das erkennt man als unmittelbar anschaulich klar an oder man leitet aus den notwendigen und hinreichenden Bedingungen

$$\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{b}^2 = \mathfrak{c}^2 = (\mathfrak{a} - \mathfrak{b})^2 = (\mathfrak{b} - \mathfrak{c})^2 = (\mathfrak{c} - \mathfrak{a})^2$$

für ein reguläres Tetraeder die genauen Bedingungen

$$\mathfrak{l}^2 = \mathfrak{m}^2 = \mathfrak{n}^2, \quad \mathfrak{l}^T \mathfrak{m} = \mathfrak{m}^T \mathfrak{n} = \mathfrak{n}^T \mathfrak{l} = 0 \,{}^{*})$$

für ein orthonormiertes Dreibein her.)

*) $\mathfrak{a}^T$ (1×3-Matrix) ist die Transponierte zu $\mathfrak{a}$ (3×1-Matrix). Red.

Nach dem Satz von POHLKE sind $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ genau dann Würfelkanten, wenn ihre Normalrisse auf die $x_1 x_2$-Ebene folgender Bedingung genügen:

$$0 = [(a_1 + b_1 - c_1) + i\,(a_2 + b_2 - c_2)]^2 + [(a_1 - b_1 + c_1) + i\,(a_2 - b_2 + c_2)]^2 + [(-a_1 + b_1 + c_1) + i\,(-a_2 + b_2 + c_2)]^2$$

oder

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 3\,(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - a_2^2 - b_2^2 - c_2^2) - 2\,(a_1 b_1 + b_1 c_1 + c_1 a_1) \\ &\qquad + 2\,(a_2 b_2 + b_2 c_2 + c_2 a_2) \\ &= 4\,(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - a_2^2 - b_2^2 - c_2^2) - (a_1 + b_1 + c_1)^2 + (a_2 + b_2 + c_2)^2\,, \\ 0 &= 3\,(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + c_1 a_2 + c_2 a_1) \\ &= 4\,(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) - (a_1 + b_1 + c_1)\,(a_2 + b_2 + c_2)\,. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Analog erhält man durch Normalprojektion auf die übrigen Koordinatenebenen die (notwendigen und hinreichenden) Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 4\,(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 - a_3^2 - b_3^2 - c_3^2) - (a_2 + b_2 + c_2)^2 + (a_3 + b_3 + c_3)^2\,, \\ 0 &= 4\,(a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3) - (a_2 + b_2 + c_2)\,(a_3 + b_3 + c_3)\,; \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 4\,(a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 - a_1^2 - b_1^2 - c_1^2) - (a_3 + b_3 + c_3)^2 + (a_1 + b_1 + c_1)^2\,, \\ 0 &= 4\,(a_3 a_1 + b_3 b_1 + c_3 c_1) - (a_3 + b_3 + c_3)\,(a_1 + b_1 + c_1)\,. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Nun legen wir durch O eine Ebene ε mit der Gleichung

$$0 = r_1 x_1 + r_2 x_2 + r_3 x_3 = \mathfrak{r}^T \mathfrak{x} = 0\,, \qquad |\mathfrak{r}| = 1\,.$$

Ist dann k die Summe der Quadrate der Längen aller Kanten und s die Summe der Quadrate der Kantenprojektionen auf ε, dann ist klar, dass die in der Aufgabe angegebene Summe s durch die Summe $k - s$ ersetzt werden kann. Wir erhalten

$$k - s = (\mathfrak{r}^T \mathfrak{a})^2 + (\mathfrak{r}^T \mathfrak{b})^2 + (\mathfrak{r}^T \mathfrak{c})^2 + (\mathfrak{r}^T (\mathfrak{a} - \mathfrak{b}))^2 + (\mathfrak{r}^T (\mathfrak{b} - \mathfrak{c}))^2 + (\mathfrak{r}^T (\mathfrak{c} - \mathfrak{a}))^2\,.$$

Wegen $(\mathfrak{r}^T \mathfrak{x})^2 = (\mathfrak{r}^T \mathfrak{x})\,(\mathfrak{x}^T \mathfrak{r}) = \mathfrak{r}^T (\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}^T)\,\mathfrak{r}$ ergibt sich

$$k - s = \mathfrak{r}^T \mathfrak{M}\,\mathfrak{r}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \mathfrak{a}\,\mathfrak{a}^T + \mathfrak{b}\,\mathfrak{b}^T + \mathfrak{c}\,\mathfrak{c}^T + (\mathfrak{a} - \mathfrak{b})\,(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})^T + (\mathfrak{b} - \mathfrak{c})\,(\mathfrak{b} - \mathfrak{c})^T + (\mathfrak{c} - \mathfrak{a})\,(\mathfrak{c} - \mathfrak{a})^T \\ &= 3\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}^T + \mathfrak{b}\,\mathfrak{b}^T + \mathfrak{c}\,\mathfrak{c}^T) - \mathfrak{a}\,(\mathfrak{b}^T + \mathfrak{c}^T) - \mathfrak{b}\,(\mathfrak{c}^T + \mathfrak{a}^T) - \mathfrak{c}\,(\mathfrak{a}^T + \mathfrak{b}^T) \\ &= 4\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}^T + \mathfrak{b}\,\mathfrak{b}^T + \mathfrak{c}\,\mathfrak{c}^T) - (\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c})\,(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c})^T \\ &= (4\,(a_i a_j + b_i b_j + c_i c_j) - (a_i + b_i + c_i)\,(a_j + b_j + c_j))_{(3,3)}\,. \end{aligned}$$

Ersichtlich ist $\mathfrak{M}$ eine symmetrische (3, 3)-Matrix.

Wird angenommen, dass die Summe $k - s$ von der Stellung der Ebene ε unabhängig ist, dann hat $\mathfrak{r}^T \mathfrak{M}\,\mathfrak{r} = c$ für ein gewisses $c \neq 0$ jeden Einheitsvektor $\mathfrak{r}$ als Lösung. Dies ist bekanntlich genau dann der Fall, wenn $\mathfrak{M} = c\,\mathfrak{E}$ ist. Dies führt auf die sechs Bedingungen

$$4\,(a_i a_j + b_i b_j + c_i c_j) - (a_i + b_i + c_i)\,(a_j + b_j + c_j) = c\,\delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, 3)\,,$$

die man unschwer als mit den Bedingungen (1), (2), (3) gleichwertig erkennt.

G. GEISE, Dresden

Im Fall des regulären Tetraeders sei K die Kantenlänge. Addiert man die drei Gleichungen mit $i = j$ aus der letzten Formelgruppe und beachtet, dass $2\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^2 = K^2$ usw., so folgt $3\,c = 4 \cdot 3\,K^2 - 2 \cdot 3\,K^2 = 6\,K^2$. Somit ist $c = 2\,K^2$ und $s = 4\,K^2$.

Ist $k - s$ als Summe der Quadrate der Kantenprojektionen auf die Ebenennormale von der Stellung dieser Normalen unabhängig, so kann man nach C. BINDSCHEDLER folgendermassen schliessen:

Projiziert man auf eine Körperhöhe H_i, so wird $k - s = 3\,H_i^2$, also $H_1 = H_2 = H_3 = H_4$. Die vier Seitenflächen sind daher flächengleich und damit bekanntlich auch kongruent. Je zwei Gegenkanten des Tetraeders sind somit gleich lang. Durch Projektion auf eine gemeinsame Normale d_i zweier Gegenkanten erhält man wegen $k - s = 4\,d_i^2$ sofort $d_1 = d_2 = d_3 = d$. Fasst man das Tetraeder als Prismatoid der Höhe d auf, so wird der Mittelschnitt ein Rhombus mit der Seite $a/2$, wenn die als Grund- und Deckfläche genommenen Gegenkanten die Länge a haben. Bedeutet h_a die Seitenflächenhöhe auf die Kante a, so hat der Rhombus die Höhe $\sqrt{h_a^2 - d^2}$. Die Mittelschnitte müssen nach der Prismatoidformel gleich sein. Aus

$$a\sqrt{h_a^2 - d^2} = b\sqrt{h_b^2 - d^2} = c\sqrt{h_c^2 - d^2}$$

folgt dann $a = b = c$ und damit die Regularität des Tetraeders.

Aufgabe 459. Man zeige, dass jede ganze Zahl auf unendlich viele Weisen als Summe von achtzehn fünften Potenzen ganzer Zahlen darstellbar ist. E. KRÄTZEL, Jena

A. MAKOWSKI und A. SCHINZEL (Warschau) weisen darauf hin, dass in der Aussage der Aufgabe die Anzahl 18 durch 11 ersetzt werden kann. Das folgt unmittelbar aus Satz 407 in HARDY-WRIGHT, An Introduction to the Theory of Numbers, 4th ed., Oxford 1960, p. 328, der aussagt, dass jede ganze Zahl N als Summe von 10 fünften Potenzen ganzer Zahlen dargestellt werden kann. Das gilt auch für die Zahl $N - n^5$ für jedes ganze n. Somit lässt sich N auf unendlich viele Weisen in 11 fünfte Potenzen zerlegen.

Der Beweis des obengenannten Satzes verwendet die Identität

$$(x+3)^5 - 2\,(x+2)^5 + x^5 + (x-1)^5 - 2\,(x-3)^5 + (x-4)^5 = 720\,x - 360$$

sowie die durch Rechnung zu verifizierende Tatsache, dass jeder Rest (mod 720) als Summe von zwei fünften Potenzresten (mod 720) dargestellt werden kann.

Aufgabe 460. $a_1, a_2, \ldots, a_k$ seien natürliche Zahlen $\leqq n$ mit der Eigenschaft, dass $a_r\,a_s$ für $r \neq s$ keine Quadratzahl ist. Man zeige, dass k höchstens gleich der Anzahl der quadratfreien Zahlen $\leqq n$ ist. P. ERDÖS, Budapest

Lösung: Sei f die Funktion, die jedem a_r $(1 \leq r \leq k)$ seinen quadratfreien Kern zuordnet. Dann ist f eine Abbildung von $\{a_1, \ldots, a_k\}$ in die Menge der quadratfreien Zahlen $\leq n$. Sie ist eineindeutig, denn aus $f(a_r) = f(a_s) = b$ folgt $a_r = b\,c^2$, $a_s = b\,d^2$, also $a_r\,a_s = (b\,c\,d)^2$ und damit $r = s$. Folglich ist die Anzahl k der a_r höchstens gleich der Anzahl der quadratfreien Zahlen $\leq n$. J. SPILKER, Freiburg/Br.

Weitere Lösungen sandten W. JÄNICHEN (Berlin), H. MEILI (Winterthur), O. REUTTER (Ochsenhausen, BRD).

Neue Aufgaben

Aufgabe 481. In einem Dreieck Δ seien a_i die Seiten, h_i die Höhen und r_i die Ankreisradien $(i = 1, 2, 3)$. Ist F die Fläche, R der Umkreisradius und r der Inkreisradius von Δ, so beweise man die Gültigkeit der Ungleichungskette

$$4\sum_{i<j} h_i\,h_j \leqq 12\,F\sqrt{3} \leqq 54\,R\,r \leqq 3\sum_{i<j} a_i\,a_j \leqq 4\sum_{i<j} r_i\,r_j\,.$$

(Die aus dem Anfangs- und Endglied der Kette bestehende Ungleichung hat kürzlich A. MAKOWSKI angegeben (Problem E 1675 Amer. Math. Monthly *71*, 317 (1964)).

F. LEUENBERGER, Feldmeilen

Aufgabe 482. Es sei $|\,e\,|$ die Länge des Vektors e, und e_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) seien die Einheitsvektoren des R^n. Man deute die Grösse

$$l_n = \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu+1} \sum_{1 \leqq \mu_1 < \cdots < \mu_\nu \leqq n} |\, e_{\mu_1} + \cdots + e_{\mu_\nu} \,|$$

geometrisch und beweise, dass l_1, l_2, ... eine streng monoton fallende Folge mit positiven Gliedern ist. J. SPILKER, Freiburg/Br.

Aufgabe 483. Démontrer d'une façon élémentaire qu'il existe pour tout nombre entier a une infinité des nombres naturels x pour lesquels le nombre $x^2 + a$ est divisible par un carré d'un nombre naturel >1. W. SIERPIŃSKI, Varsovie

Aufgabe 484. Let G be the centroid of a triangle $A_1 A_2 A_3$ and $\alpha_i = \sphericalangle A_{i-1} A_i A_{i+1}$, $\beta_i = \sphericalangle A_{i-1} G A_{i+1}$ $(i = 1, 2, 3)$.
Prove the formula

$$\frac{p}{2r} = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{1}{\sin \alpha_i} - \operatorname{ctg} \beta_i \right),$$

where p is the perimeter and r the inradius of the triangle. C. KARANICOLOFF, Sofia

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Auf einem geraden Kreiszylinder vom Radius r ist eine Schraubenlinie der Ganghöhe $2\pi a$ gezeichnet. Sie wird von einem ihrer Punkte Z aus auf eine Normalebene Π zur Zylinderachse projiziert. Das Resultat ist eine *Kochleoide.* Bezüglich eines geeignet gewählten Polarkoordinatensystems in Π lautet ihre Gleichung

$$\varrho = \pi r \frac{\sin \varphi}{\varphi}.$$

Die Kochleoide ist eine Spirale, die unendlich oft durch den Ursprung geht und dort den Nullstrahl berührt.

2. Die Radienvektoren der Punkte der Kochleoide $\varrho = \pi r \sin\varphi/\varphi$, die auf einem Strahl $\varphi =$ konst. liegen, bilden eine harmonische Reihe. Die Tangenten in diesen Punkten gehen durch einen festen Punkt T $(2\varphi; \pi r)$.

▶ Beweis analytisch, oder sehr einfach stereometrisch: Den Punkten auf dem Strahl $\varphi =$ konst. entsprechen die Punkte auf einer Mantellinie des Zylinders. Alle Tangenten in diesen Punkten sind parallel, ihre Projektionen müssen also durch einen Punkt T, den Fluchtpunkt dieser Richtung, gehen. T ist der Spurpunkt der zu den Tangenten parallelen Gerade durch Z. (Alle projizierenden Ebenen durch die Tangenten haben diese Gerade gemeinsam.)

3. Zeichne die Kurve

$$\varrho = \frac{\sin\varphi}{\varphi} \quad \text{für} \quad -\pi \leqq \varphi \leqq +\pi \quad (1 \mathrel{\hat=} 10\,\text{cm}),$$

und bestimme ihre Breite b senkrecht zum Nullstrahl, sowie die eingeschlossene Fläche.

▶ $$b = 1{,}4492\,; \quad f = 1{,}41814\,.$$

4. Trägt man auf allen Kreisbögen, die den Nullstrahl in O berühren, von O aus im positiven Drehsinn die Länge 1 ab, so liegen die Endpunkte auf der Kochleoide $\varrho = \sin\varphi/\varphi$.

▶ Daraus folgt, dass die Kochleoide eine Quadratrix ist, und zwar zeigt es sich, dass sie durch Inversion der Quadratrix des Nikomedes am Einheitskreis entsteht. Liegt die in Aufgabe 3 zu zeichnende Kurve vor, so können folgende Aufgaben konstruktiv gelöst werden: (Beachte, dass alle Kochleoiden $\varrho = k \sin\varphi/\varphi$ perspektiv-ähnlich sind.)
Einen beliebigen Kreisbogen zu strecken.
Auf einem Kreis eine beliebige Strecke abzutragen.
Einen beliebigen Winkel in beliebig viele gleiche Teile zu teilen.

5. Der geometrische Ort des Schwerpunkts aller Kreisbögen mit den Endpunkten A $(0;\,1)$ und B $(2\,\varphi;\,1)$ (Polarkoordinaten) ist die Kochleoide $\varrho = \sin\varphi/\varphi$.

▶ Einfachster Beweis mittels der Guldinschen Regel.

Treppenhaus in Zürich (Photo W. Gubelmann, Zürich 11)