Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Band: 19 (1964)

Heft: 6

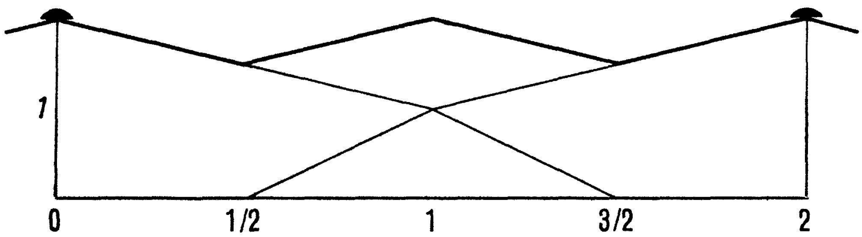
Rubrik: Kleine Mitteilungen

Ungelöste Probleme

Nr. 47. Wir wollen auf einer unendlichen Strasse Lampen errichten. Die Lampendichte d (durchschnittliche Lampenzahl pro Kilometer), sowie die Beleuchtungsfunktion $f(x)$, die die von einer Lampe herrührende Strassenbeleuchtung im Abstand x vom Lampenfusspunkt angibt, sind vorgegeben. Wir setzen voraus, dass $f(x)$ eine nicht zunehmende Funktion ist, dass die Reihe $f(1) + f(2) + \ldots$ konvergiert und dass sich die von den einzelnen Lampen stammenden Beleuchtungen additiv zusammensetzen. B sei das Infimum der Beleuchtung an der Strasse (die Beleuchtung an der am schlechtesten beleuchteten Stelle) bei einer gewissen Lampenverteilung. Gesucht wird diejenige Lampenverteilung, für die B den grösstmöglichen Wert erreicht.

L. Danzer hat zuerst bemerkt, dass die beste Verteilung nicht immer die äquidistante ist. Das folgende, einfache Beispiel stammt von A. Heppes.

Es sei $f(0) = 1, f(1) = {}^1/_2, f({}^3/_2) = f(\infty) = 0$ und zwischen diesen Werten sei $f(x)$ linear. Bei einer äquidistanten Verteilung mit der Dichte $d = {}^1/_2$ schaut die Beleuchtung so aus:



Bei einer äquidistanten Verteilung mit $d = 1$ müsste man halbwegs zwischen zwei Lampen eine neue Lampe aufstellen. Es ist aber offensichtlich günstiger, die neuen Lampen rechts (oder links) von den ursprünglichen im Abstand ${}^1/_2$ anzubringen, weil sich dadurch eine ganz gleichmässige Beleuchtung mit der festen Intensität ${}^7/_4$ ergibt.

Das Problem ist nun, eine allgemeine Kennzeichnung der möglichen Extremalfiguren anzugeben und insbesondere zu entscheiden, ob sich die beste Verteilung stets aus kongruenten, äquidistanten Punktsystemen zusammensetzen lässt.

L. Fejes Tóth

Kleine Mitteilungen

Notiz zu einem System von Grössenrelationen im Dreieck[1])

In einem *beliebigen* Dreieck werden Um- und Inkreisradius mit R bzw. r bezeichnet. Σm_i, Σw_i und Σh_i seien in dieser Reihenfolge die Summen der Längen der Schwerelinien, der Winkelhalbierenden und der Höhen. Dann gilt

$$\Sigma m_i \leqslant 4R + r \tag{1}$$

$$\Sigma w_i \leqslant 3R + 3r \tag{2}$$

$$\Sigma h_i \leqslant 2R + 5r. \tag{3}$$

Bei ganzzahligen, positiven Koeffizienten von R und r sind alle drei Abschätzungen *bestmöglich*, und das Gleichheitszeichen gilt jeweils nur im gleichseitigen Dreieck. Für (1) und

[1]) Ausschnitt aus einem Vortrag, gehalten am 13. Dezember 1963 in der Mathematischen Vereinigung Bern, über «Grössenbeziehungen im Dreieck und verwandte Fragen (gelöste und ungelöste Probleme)».

(2) liegen die betreffenden Beweise vor ([1][2]), [2]). Dass in (3) rechts nicht etwa $R + 7r$ stehen kann, tut ein gleichschenkliges Dreieck mit verhältnismässig kleiner Basis sofort dar. Die Gültigkeit von (3) kann schliesslich so verifiziert werden:

Sei ϱ die Länge des Inkreisradius des Höhenfusspunktdreiecks, I der Inkreismittelpunkt und H der Höhenschnittpunkt unseres Dreiecks. Dann gelten die Beziehungen

$$2R\sum h_i = 4R^2 + 8Rr + 2r^2 + 2R\varrho$$

und

$$\overline{IH}^2 = 2r^2 - 2R\varrho\,,$$

von denen die erste A. BAGER [3] fand, während die zweite wohlbekannt ist ([4], [5]). Addition liefert bei Vernachlässigung von $\overline{IH}^2$

$$2R\sum h_i \leqslant 4R^2 + 8Rr + 4r^2 \leqslant 4R^2 + 8Rr + 2Rr = 4R^2 + 10Rr\,.$$

Die erste Abschätzung gibt J. STEINIG [6] in anderer Form, aber mit prinzipiell gleicher Herleitung durch seine Formel (19) an, während die zweite aus $2r \leqslant R$ folgt. Division durch $2R$ liefert jedenfalls

$$\sum h_i \leqslant 2R + 5r\,,$$

was behauptet wurde.

Wie lauten die (1), (2) und (3) entsprechenden besten Relationen für das Tetraeder, wie für das n-Simplex überhaupt?

F. LEUENBERGER, Feldmeilen

LITERATURVERZEICHNIS

[1] F. LEUENBERGER, *Gegensätzliches Verhalten der arithmetischen und geometrischen Mittel*, El. Math. *16*, 127–129 (1961).

[2] F. LEUENBERGER, *Kleiner Beitrag zur elementaren Dreiecksgeometrie*, El. Math. *18*, 35–37 (1963).

[3] Lösung zu Aufgabe 266, El. Math. *12*, 65 (1957).

[4] E. W. HOBSON, *A Treatise on Plane Trigonometry* (Cambridge University Press, 1928).

[5] R. JOHNSON, *Modern Geometry* (Boston, 1929).

[6] J. STEINIG, *Inequalities Concerning the Inradius and Circumradius of a Triangle*, El. Math. *18*, 127–131 (1963).

Zum Zusammenhang zwischen dem Satz vom g.g.T. und dem ZPE-Satz[1])

Wir wollen hier einen Erweiterungsbereich der Menge N der natürlichen Zahlen angeben, in dem der Satz vom g.g.T., nicht aber der ZPE-Satz gilt. Es wird sich dabei zeigen, dass jedoch wenigstens eine verallgemeinerte Produktzerlegung in unzerlegbare Elemente möglich ist.

Wir betrachten die Menge $\mathfrak{N}$, die aus allen unendlichen Folgen natürlicher Zahlen und der konstanten Folge $(0)_{k\in N}$ besteht. Auf $\mathfrak{N}$ definieren wir Verknüpfungen durch $A + B =_{Def.} (a_k + b_k)_{k\in N}$ und $A \cdot B =_{Def.} (a_k \cdot b_k)_{k\in N}$ für $A = (a_k)_{k\in N}$ und $B = (b_k)_{k\in N}$ aus $\mathfrak{N}$. $A > B$ soll genau dann gelten, wenn $a_k > b_k$ für alle $k \in N$. Addition und Multiplikation sind assoziativ und kommutativ, ausserdem gilt das Distributivgesetz. Die Relation «$>$» ist verträglich mit den Verknüpfungen von $\mathfrak{N}$. In die so erhaltene Struktur lassen sich die natürlichen Zahlen mit Hilfe der konstanten Folgen isomorph einbetten. Nullelement ist 0 und Einselement ist 1.

Für die Teilbarkeitstheorie wesentliche Eigenschaften der natürlichen Zahlen übertragen sich auf $\mathfrak{N}$. Für $0 \neq A = (a_k)_{k\in N}$ und $B = (b_k)_{k\in N}$ gilt nämlich $A|B$ genau dann, wenn für alle $k \in N$ gilt $a_k|b_k$. Es folgt $1|A$ für alle $A \in \mathfrak{N}$ und $A|A$ für alle $A \neq 0$, $A \in \mathfrak{N}$. 1 und A sind also triviale Teiler von $A = (a_k)_{k\in N} \neq 0$. Aus den Komponenten von 1 und A lassen sich neue Teiler zusammenstellen. Für jedes $T = (t_k)_{k\in N}$ mit $t_k = a_k$ oder

[2]) Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 133.

[1]) ZPE-Satz: Satz von der eindeutigen Zerlegbarkeit in Primelemente (Red.).

$t_k = 1$ für alle $k \in N$ gilt $T|A$. Wir wollen Teiler dieser Art auch zu den trivialen Teilern von $A \neq 0$ zählen. In diesem Sinne sehen wir Elemente aus $\mathfrak{N}$, die nur solche trivialen Teiler besitzen, als unzerlegbare Elemente an. Offensichtlich ist $P = (p_k)_{k \in N} > 1$ aus $\mathfrak{N}$ genau dann unzerlegbar, wenn für alle $k \in N$ p_k Primzahl ist. Ein unzerlegbares Element aus $\mathfrak{N}$ braucht jedoch nicht Primelement zu sein, denn aus $P|A \cdot B$, P unzerlegbar, folgt im allgemeinen nicht $P|A$ oder $P|B$. Man wähle etwa $P = 2$, $A = (a_k)_{k \in N}$ mit $a_k = 2$ für ungerades k und $a_k = 3$ für gerades k und $B = (b_k)_{k \in N}$ mit $b_k = 3$ für ungerades k und $b_k = 2$ für gerades k.

Es gilt also nicht der ZPE-Satz.

Um den g.g.T. zweier Elemente A, $B \in \mathfrak{N}$, die nicht beide 0 sind, zu bestimmen, können wir ebenfalls auf die Komponenten von A und B zurückgreifen. Für $A = (a_k)_{k \in N}$ und $B = (b_k)_{k \in N}$ ist $D = (d_k)_{k \in N}$ mit $d_k = (a_k, b_k)$ für alle $k \in N$ g.g.T. von A und B. Sei nämlich $T|A$ und $T|B$, $T = (t_k)_{k \in N}$ aus $\mathfrak{N}$, dann gilt für alle $k \in N$ $t_k | a_k$ und $t_k | b_k$. Aus $d_k = (a_k, b_k)$ und $t_k | d_k$ für alle $k \in N$ folgt $T|D$, $D|A$ und $D|B$. Es gilt also der Satz vom g.g.T.

Verwenden wir eine Produktdefinition, die LAUGWITZ[2]) in anderem Zusammenhang benutzt, so lässt sich für alle Elemente aus $\mathfrak{N}$, die grösser als 1 sind, wenigstens eine Zerlegung in ein Produkt unzerlegbarer Elemente gewinnen. Für $P_V =_{Def.} (p_{k v_k})_{k \in N}$ mit $0 \neq V = (v_k)_{k \in N}$, P_V, $V \in \mathfrak{N}$, schreiben wir

$$Q =_{Def.} \prod_{V=M}^{N} P_V ,$$

wobei

$$Q = (q_k)_{k \in N} = \left(\prod_{m=m_k}^{n_k} p_{k m} \right)_{k \in N}$$

mit $N = (n_k)_{k \in N} > M = (m_k)_{k \in N}$ ist. Damit gilt:

Zu jedem $A = (a_k)_{k \in N} > 1$ aus $\mathfrak{N}$ existiert eine Darstellung

$$A = \prod_{V=1}^{S} P_V , \tag{I}$$

wobei die P_V unzerlegbare Elemente sind und $S \in \mathfrak{N}$ eindeutig bestimmt ist.

Für alle $k \in N$ sei nämlich

$$a_k = \prod_{m=1}^{s_k} p_{k m}$$

die kanonische Zerlegung von a_k, dann folgt mit $P_V = (p_{k v_k})_{k \in N}$, $V = (v_k)_{k \in N}$ und eindeutig bestimmtem $S = (s_k)_{k \in N}$ die Darstellung (I). Dass die Darstellung (I) nicht nur formal sinnvoll ist, erkennt man daran, dass für alle P_V aus (I) gilt $P_V | A$, wenn für alle $k \in N$ $1 \leqq v_k \leqq s_k$. Allerdings ist Darstellung (I) im allgemeinen nicht eindeutig.

HANS-JOACHIM VOLLRATH, Darmstadt

Aufgaben

Aufgabe 465. Aus den n^2 Platznummern einer Cayleyschen Multiplikationstafel einer Gruppe der Ordnung n werden m Nummern *zufällig* (etwa durch Ziehen aus einer Urne) ausgewählt und in der Gruppentafel die entsprechenden Elemente entfernt. Den grössten Wert $k(n)$ von m, für den die Tafel aus dem Rest stets eindeutig rekonstruiert werden kann, hat kürzlich J. DÉNES bestimmt (ohne Angabe von Beispielen). Es ist $k(n) = 2n - 1$ für $n \neq 4$ und $k(4) = 3$.

[2]) LAUGWITZ, D., *Eine Einführung der δ-Funktionen*, Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. Math.-nat. Kl. 41–59 (1959).