

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 20 (1965)  
**Heft:** 1

**Artikel:** Ein Schliessungssatz für zwei Kreise  
**Autor:** Bottema, O.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-23920>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts  
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds  
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

---

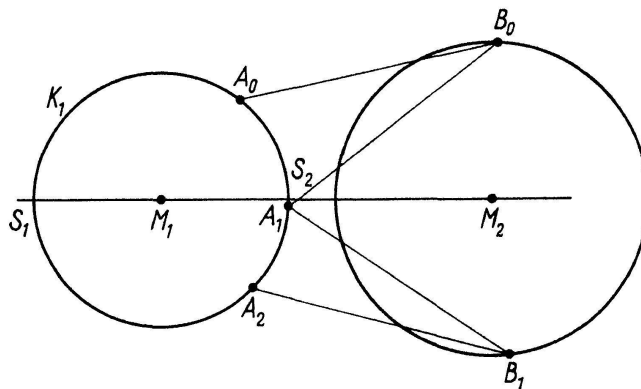
El. Math.      Band XX      Heft 1      Seiten 1–24      Basel, 10. Januar 1965

---

## Ein Schliessungssatz für zwei Kreise

1. Wir betrachten die Figur zweier Kreise  $K_1$  und  $K_2$ , mit den Mittelpunkten  $M_1, M_2$  und den Radien  $R_1, R_2$ . Der Abstand  $M_1 M_2$  ist  $d$ . Weiter ist noch eine Strecke  $k$  gegeben.

Wir wählen auf  $K_1$  einen beliebigen Punkt  $A_0$  und bestimmen auf  $K_2$  einen der beiden Punkte  $B_0$  mit  $A_0 B_0 = k$ .



Figur 1

Dann konstruieren wir auf  $K_1$  den von  $A_0$  verschiedenen Punkt  $A_1$  mit  $B_0 A_1 = k$ . Auf  $K_2$  bestimmen wir den von  $B_0$  verschiedenen Punkt  $B_1$  mit  $A_1 B_1 = k$ , usw. (Figur 1).

Auf  $K_1$  erscheint die Punktreihe  $A_0 A_1 A_2 \dots$ , auf  $K_2$  die Punktreihe  $B_0 B_1 B_2 \dots$ . Wir wollen diese Reihen betrachten und dabei vor allem die Frage stellen, ob  $A_n$  ( $n > 1$ ) mit  $A_0$  (und dann auch  $B_n$  mit  $B_0$ ) zusammenfallen kann.

Wenn wir uns auf reelle Figuren beschränken wollen, so müssen zwischen  $R_1, R_2, d$  und  $k$  gewisse Ungleichungen bestehen. Es genügt dabei offenbar, dass für beliebige  $A_0$  der Kreis  $(A_0, k)$  mit  $K_2$  zwei reelle (und wir wollen voraussetzen: verschiedene) Schnittpunkte hat. Sind  $S_1$  und  $S_2$  die Schnittpunkte von  $K_1$  mit der Geraden  $M_1 M_2$  (Figur 1), dann hat man  $S_1 M_2 = R_1 + d$ ,  $S_2 M_2 = -R_1 + d$ , und wir haben daher die Ungleichungen

$$|R_2 - k| < R_1 + d < R_2 + k \quad \text{und} \quad |R_2 - k| < |R_1 - d| < R_2 + k,$$

die bekanntlich zwei wesentlich verschiedene Lösungen haben. Es muss entweder  $d$  oder  $R_1$  die kleinste der vier bezüglichen Strecken sein; die Größenordnung der übrigen ist beliebig, aber es soll zudem die Summe der kleinsten und der grössten Strecke kleiner als die Summe der anderen sein. Das ist der Inhalt der sogenannten Grashof'schen Regel der Getriebelehre.

Im ersten Fall folgt nicht nur aus einem beliebigen Punkt  $A_0$  ein reeller Punkt  $B_0$ , sondern auch umgekehrt gibt es zu einem beliebig auf  $K_2$  gewählten Punkt  $B$  einen reellen Punkt  $A$  auf  $K_1$  mit  $BA = k$ . In diesem, sagen wir, symmetrischen Fall könnte man die Kreise  $K_1$  und  $K_2$  vertauschen. Im zweiten, unsymmetrischen Fall dagegen trifft das nicht zu. Der Ort der mittels der Kreise  $(A_0, k)$  auf  $K_2$  konstruierten Punkte  $B$  ist nicht  $K_2$  selbst; er besteht aus zwei Kreisbögen von  $K_2$ . Oder in der Sprache der Getriebelehre: im ersten Fall ist das Getriebe  $M_1 M_2 B A$  eine Doppelkurbel, im zweiten Fall eine Kurbelschwinge.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -R_1 + R_2 + d + k, & p_2 &= R_1 - R_2 + d + k, \\ p_3 &= R_1 + R_2 - d + k, & p_4 &= R_1 + R_2 + d - k; \\ q_1 &= R_1 - R_2 - d + k, & q_2 &= -R_1 + R_2 - d + k, \\ q_3 &= -R_1 - R_2 + d + k, & q_4 &= R_1 + R_2 + d + k. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Offenbar haben wir

$$p_1 > 0, \quad p_2 > 0, \quad p_3 > 0, \quad p_4 > 0, \quad q_4 > 0.$$

Weiter hat man im symmetrischen Fall:

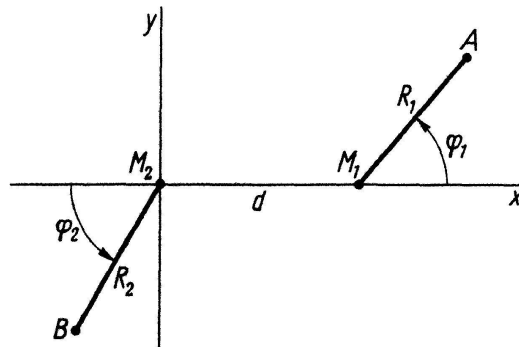
$$q_1 > 0, \quad q_2 > 0, \quad q_3 < 0 \quad (2)$$

und im unsymmetrischen Fall:

$$q_1 < 0, \quad q_2 > 0, \quad q_3 > 0. \quad (3)$$

Wir bestimmen erst allgemein analytisch den Zusammenhang zwischen  $A_i$  und  $B_i$ .

2. Wir wählen die  $X$ -Achse des rechtwinkligen Koordinatensystems entlang  $M_2 M_1$ ; es sei  $M_2 = (0, 0)$ ,  $M_1 = (d, 0)$ . Die Punkte  $A$  von  $K_1$  und die Punkte  $B$  von  $K_2$  werden bestimmt durch die Winkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  (Figur 2). Dann ist



Figur 2

$$x_A = d + R_1 \cos \varphi_1, \quad y_A = R_1 \sin \varphi_1, \quad x_B = -R_2 \cos \varphi_2, \quad y_B = -R_2 \sin \varphi_2, \quad (4)$$

und die Gleichung, welche aussagt, dass der Abstand  $A B$  gleich  $k$  ist, lautet

$$\{d + (R_1 \cos \varphi_1 + R_2 \cos \varphi_2)\}^2 + (R_1 \sin \varphi_1 + R_2 \sin \varphi_2)^2 = k^2, \quad (5)$$

oder mit

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} = u, \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2} = v:$$

$$(R_1^2 + R_2^2 + d^2 - k^2) (1 + u^2) (1 + v^2) + 2 R_1 d (1 - u^2) (1 + v^2) \\ + 2 R_2 d (1 + u^2) (1 - v^2) + 2 R_1 R_2 \{(1 - u^2) (1 - v^2) + 4 u v\} = 0.$$

Das heisst

$$p_3 q_3 u^2 v^2 + p_1 q_1 u^2 + p_2 q_2 v^2 - p_4 q_4 - 8 R_1 R_2 u v = 0 \quad (6)$$

ist die Gleichung für die (2, 2)-Verwandtschaft zwischen den Punkten  $A(u)$  auf  $K_1$  und  $B(v)$  auf  $K_2$ .

Wenn  $A(u)$  gegeben ist, so folgen die zugeordneten Punkte  $B(v)$  aus der quadratischen Gleichung

$$(p_3 q_3 u^2 + p_2 q_2) v^2 - 8 R_1 R_2 u v + (p_1 q_1 u^2 - p_4 q_4) = 0 \quad (7)$$

mit der Diskriminante

$$D = -p_1 q_1 p_3 q_3 u^4 + (16 R_1^2 R_2^2 - p_1 q_1 p_2 q_2 + p_3 q_3 p_4 q_4) u^2 + p_2 q_2 p_4 q_4. \quad (8)$$

Für die Nullstellen von  $D$  findet man  $u^2 = -q_2 q_4 / p_1 p_3$  und  $u^2 = p_2 p_4 / q_1 q_3$ , welche Zahlen wegen (2) und (3) negativ sind. Überdies ist der Koeffizient von  $u^4$  positiv;  $D$  ist somit positiv-definit, und das bestätigt, dass zu einem beliebigen Punkt  $A_0$  ein reeller Punkt  $B_0$  gehört.

Umgekehrt folgt aus einem Punkt  $B(v)$  ein Punkt  $A(u)$  mittels der Gleichung

$$(p_3 q_3 v^2 + p_1 q_1) u^2 - 8 R_1 R_2 u v + (p_2 q_2 v^2 - p_4 q_4) = 0 \quad (9)$$

mit der Diskriminante

$$D' = -p_2 q_2 p_3 q_3 v^4 + (16 R_1^2 R_2^2 - p_1 q_1 p_2 q_2 + p_3 q_3 p_4 q_4) v^2 + p_1 q_1 p_4 q_4. \quad (10)$$

Diese hat die Nullstellen  $v^2 = -q_1 q_4 / p_2 p_3$  und  $v^2 = p_1 p_4 / q_2 q_3$ . Im symmetrischen Fall sind diese Zahlen wieder negativ, und  $D'$  ist positiv-definit, das heisst zu jedem Punkt  $B$  gehört ein reeller Punkt  $A$ . Im unsymmetrischen Fall sind sie aber positiv, und  $D'$  hat Zeichenwechsel; die Punkte  $B$ , die zu reellen  $A$  gehören, liegen auf zwei Kreisbogen von  $K_2$ .

3. Aus (6) können wir nun auch die Relation zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten der Folge  $A(u)$  ableiten. Nennen wir ihre Parameter kurz  $u_1$  und  $u_2$ , dann müssen die zwei quadratischen Gleichungen (7):

$$(p_3 q_3 u_i^2 + p_2 q_2) v^2 - 8 R_1 R_2 u_i v + (p_1 q_1 u_i^2 - p_4 q_4) = 0, \quad i = 1, 2 \quad (11)$$

eine gemeinsame Wurzel haben, da zu  $A(u_1)$  und  $A(u_2)$  derselbe Punkt  $B$  gehört. Die Bedingung dafür lautet

$$64 R_1^2 R_2^2 (p_3 q_3 u_1 u_2 - p_2 q_2) (p_1 q_1 u_1 u_2 + p_4 q_4) \\ + (p_3 q_3 p_4 q_4 + p_1 q_1 p_2 q_2)^2 (u_1 + u_2)^2 = 0$$

oder, wenn man noch den letzten Koeffizienten ausrechnet,

$$(\rho_3 q_3 u_1 u_2 - \rho_2 q_2) (\rho_1 q_1 u_1 u_2 + \rho_4 q_4) + (-R_1^2 - R_2^2 + d^2 + k^2)^2 (u_1 + u_2)^2 = 0, \quad (12)$$

und wir erhalten, wie zu erwarten war, eine biquadratische Gleichung zwischen  $u_1$  und  $u_2$ .

Die Punkte  $A(u_1)$  und  $A(u_2)$  haben die homogenen Koordinaten

$$x = d + R_1 + (d - R_1) u_i^2, \quad y = 2 R_1 u_i, \quad z = 1 + u_i^2,$$

und ihre Verbindungsgerade hat daher die Gleichung

$$(1 - u_1 u_2) x + (u_1 + u_2) y + \{-(d + R_1) + (d - R_1) u_1 u_2\} z = 0. \quad (13)$$

Wenn wir eine Gerade durch

$$U x + V y + W z = 0$$

darstellen, so gilt für (13):

$$U : V : W = (1 - u_1 u_2) : (u_1 + u_2) : \{-(d + R_1) + (d - R_1) u_1 u_2\},$$

und es folgt daraus

$$u_1 u_2 = \frac{(d + R_1) U + W}{(d - R_1) U + W}, \quad u_1 + u_2 = \frac{-2 R_1 V}{(d - R_1) U + W}. \quad (14)$$

Wir substituieren (14) in (12) und finden so eine Gleichung für die Linienkoordinaten der Geraden  $A(u_1)$ ,  $A(u_2)$ . Schreiben wir noch

$$2f = -R_1^2 - R_2^2 + d^2 + k^2, \quad (15)$$

dann wird

$$f^2 U^2 + 2f d U W + (d^2 - R_2^2) W^2 + f^2 V^2 = 0 \quad (16)$$

oder

$$(f U + d W)^2 + f^2 V^2 - R_2^2 W^2 = 0. \quad (17)$$

Es zeigt sich also, dass die Geraden  $A_i A_{i+1}$  Tangenten eines Kegelschnittes  $C$  sind, dessen Klassengleichung (17) ist. Der Streckenzug  $A_0 A_1 \dots$  ist somit  $K_1$  eingeschrieben und  $C$  umschrieben, das heisst, er ist ein Ponceletscher Streckenzug.

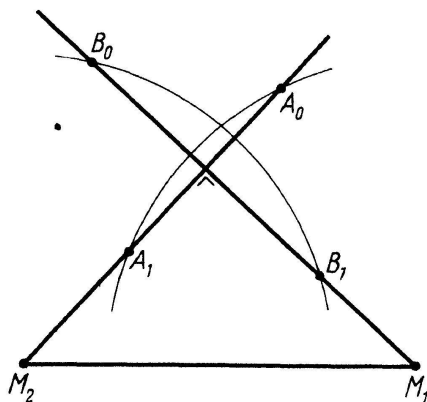
Aus einem klassischen Satz folgt deshalb: *wenn für einen bestimmten Punkt  $A_0$  von  $K_1$  das Polygon sich nach  $n$  Zügen schliesst, so schliesst es sich nach  $n$  Zügen für jeden Punkt  $A_0$ .*

4. Wir betrachten den Kegelschnitt  $C$  noch etwas näher. Da in (17) die drei Koeffizienten niemals alle dasselbe Zeichen haben, ist  $C$  immer reell.

Aus (16) lesen wir ab, dass die Diskriminante von  $C$  gleich  $-R_2^2 f^4$  ist.

$C$  zerfällt also nur dann, wenn  $f = 0$  ist. Diese Bedingung hat bekanntlich eine einfache geometrische Bedeutung: sie drückt aus, dass im Viereck  $M_1 M_2 B A$  die Diagonalen  $M_1 B$  und  $M_2 A$  aufeinander senkrecht stehen. Aus (16) folgt, dass  $C$  jetzt (für  $d^2 \neq R_2^2$ ) die Gleichung  $W^2 = 0$  hat und also aus der Geraden durch  $M_2$  besteht. In diesem Fall fällt immer  $A_2$  mit  $A_0$  zusammen. Das lässt sich natürlich auch unmittelbar geometrisch zeigen (Figur 3). Wenn nicht nur  $f = 0$ , sondern auch  $d^2 = R_2^2$  ist, so ist  $C$  unbestimmt. Man hat dann  $d = R_2$ ,  $k = R_1$ ; die Konstruktion versagt, weil jetzt einem Punkt  $A_0$  immer der Punkt  $M_1$  von  $K_2$  zugeordnet ist. Wir setzten

nun weiterhin  $f \neq 0$  voraus;  $C$  ist nicht entartet. Fragen wir jetzt nach den Tangenten an  $C$  durch  $M_2$ , dann müssen wir in (16)  $W = 0$  substituieren; das Resultat ist  $U^2 + V^2 = 0$ , wodurch die isotropen Geraden durch  $M_2$  dargestellt werden. Wir finden also: der Punkt  $M_2$  ist ein Brennpunkt von  $C$ .



Figur 3

Die Gerade  $U = V = 0$  ist Tangente von  $C$ , wenn  $d = R_2$  ist. Das heisst:  $C$  ist eine Parabel, falls  $K_2$  durch  $M_1$  geht.

Man zeigt leicht, dass  $C$  eine Ellipse ist für  $d < R_2$  und eine Hyperbel für  $d > R_2$ . Für den Mittelpunkt  $N$  von  $C$  findet man

$$x = \xi = \frac{f d}{d^2 - R_2^2}, \quad y = 0. \quad (18)$$

Verschiebt man den Ursprung des Koordinatensystems von  $M_2$  nach  $N$  und bezeichnet die neuen Koordinaten mit  $x_1, y_1, U_1, V_1, W_1$ , dann erhält  $C$  die Tangentengleichung

$$-R_2^2 f^2 U_1^2 + (d^2 - R_2^2) f^2 V_1^2 + (d^2 - R_2^2)^2 W_1^2 = 0, \quad (19)$$

und seine Gleichung in Punktkoordinaten ist somit

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \quad (20)$$

wobei

$$a^2 = \frac{R_2^2 f^2}{(R_2^2 - d^2)^2}, \quad b^2 = \frac{f^2}{R_2^2 - d^2}. \quad (21)$$

Mit diesen Daten ist  $C$  wohl genügend beschrieben. Die Relation  $a^2 - b^2 = \xi^2$  bestätigt, dass  $M_2$  ein Brennpunkt ist. Für  $d \neq 0$  ist  $C$  niemals ein Kreis. Die zu  $M_2$  gehörige Brennlinie von  $C$  hat die einfache Gleichung  $x = f/d$ .

5. Bei unseren Betrachtungen über den Kegelschnitt  $C$  wurden die anfangs genannten Realitätskriterien ausser acht gelassen. Es ist klar, dass zu einem beliebigen Punkt  $A_0$  nur dann ein reeller Punkt  $A_1$  gehört, wenn jeder Punkt von  $K_1$  ausserhalb  $C$  liegt. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten: entweder wird  $C$  durch  $K_1$  umschlossen, oder  $C$  und  $K_1$  liegen ausserhalb einander. Man kann nun leicht analytisch nachprüfen, dass diese zwei Konfigurationen bzw. den symmetrischen und den unsymmetrischen Fall darstellen. Im ersten Fall ist  $C$  immer eine Ellipse, im zweiten Fall entweder eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel. In beiden Fällen kann  $f$  positiv, Null oder negativ sein.

6. Die Bedingung für ein Ponceletsches Polygon, sich nach  $n$  Zügen zu schliessen, kann bekanntlich durch eine Gleichung in den Invarianten der beiden Kegelschnitte ausgedrückt werden. Der Fall  $n = 2$  wurde oben besprochen und führt zu  $f = 0$ . Wir betrachten hier noch den Fall  $n = 3$ .

Sind die Invarianten des Kegelschnittpaares  $K_1$  und  $C$  aufeinanderfolgend  $\Delta_1$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\Delta_2$ , dann lautet die Bedingung:

$$\theta_2^2 = 4 \Delta_2 \theta_1. \quad (22)$$

Wählen wir das Koordinatensystem  $N X_1 Y_1$ , dann sind die Gleichungen von  $K_1$  und  $C$ :

$$x_1^2 + 2(\xi - d)x_1 z_1 + y_1^2 + \{(\xi - d)^2 - R_1^2\} z_1^2 = 0, \quad b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 - a^2 b^2 z_1^2 = 0,$$

und man findet

$$\begin{aligned} \theta_1 &= b^2 (\xi - d)^2 - b^2 R_1^2 - a^2 R_1^2 - a^2 b^2, \\ \theta_2 &= a^2 b^2 \{(\xi - d)^2 - R_1^2\} - a^4 b^2 - a^2 b^4, \quad \Delta_2 = -a^4 b^4. \end{aligned}$$

Die Bedingung (22) gibt nun mittels (18) und (21):

$$2f(d^2 \pm R_1 R_2) - (d^2 - R_1^2)(d^2 - R_2^2) = 0. \quad (23)$$

Für gegebene  $R_1$ ,  $R_2$  und  $d$  folgen aus (23) zwei Werte für  $h$ , wobei der Streckenzug sich nach drei Zügen schliesst.

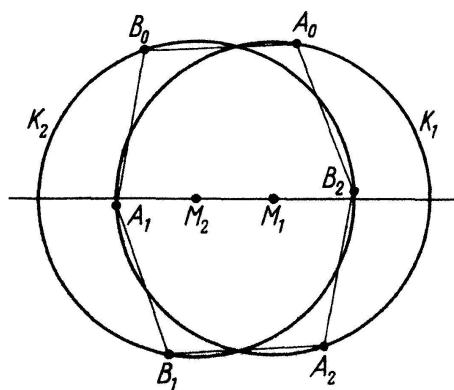
An einem Beispiel zeigen wir, dass die Konfiguration reell möglich ist. Sei

$$R_1 = R_2 = R, \quad d < R.$$

Dann folgen aus (23) die Werte  $k_1$  und  $k_2$ :

$$k_1 = R, \quad k_2^2 = R^2 \frac{3R^2 - d^2}{R^2 + d^2}. \quad (24)$$

Mit beiden Werten sind wir im symmetrischen Fall. Für  $k_1$  ist das ohne weiteres klar; wir haben dabei  $\xi = d/2$ ,  $N$  ist die Mitte von  $M_1$  und  $M_2$ ,  $a = R/2$  (Figur 4).



Figur 4

Für  $k_2$  finden wir

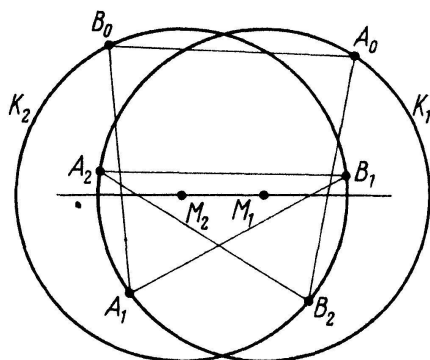
$$k_2^2 - R^2 = \frac{2(R^2 - d^2)}{R^2 + d^2} > 0,$$

so dass  $k_2$  die grösste der vier Strecken ist. Weiter hat man

$$R^2(3R^2 - d^2) - (R^2 + d^2)(2R - d)^2 = -(R - d)^4 < 0$$

und also

$$k_2^2 < (2R - d)^2, \quad \text{oder} \quad k + d < 2R.$$



Figur 5

In Figur 5 ist für diesen Fall das Dreieck  $A_0 A_1 A_2$  konstruiert; es wurde dabei  $d = 1, R = 2$  und also  $k^2 = k_2^2 = 8,8$  genommen. O. BOTTEMA, Delft

## Kleine Mitteilungen Über Pseudoprimezahlen

In *El. Math.* 19, 36 (1964) hat A. ROTKIEWICZ gezeigt, dass jede Zahl

$$M = \frac{a^{a^{n^2}} - 1}{a^{a^n} - 1} \quad (n \geq 4)$$

in bezug auf die natürliche Zahl  $a > 1$  pseudoprim ist, das heisst  $M$  ist zusammengesetzt und  $M | a^{M-1} - 1$ , also auch  $M | a^M - a$ . Bei der Durchsicht des Beweises von ROTKIEWICZ stellte ich fest, dass die Wahl des relativ grossen Exponenten  $n^2$  bei der Zählerzahl nicht notwendig ist. Vielmehr lässt sich zeigen, dass bereits der Exponent  $n + 2$  dafür hinreichend ist, dass  $M$  für  $n \geq 2$  bezüglich  $a$  pseudoprim ist. Ich beweise hier den folgenden

**Satz:** Ist  $a > 1$  eine natürliche Zahl und

$$A_n = a^{a^n} - 1,$$

dann ist

$$M = \frac{A_{n+r}}{A_n}$$

für  $n \geq r \geq 2$  ( $n, r$  ganz) bezüglich  $a$  pseudoprim.

*Beweis:* Die Zahlen  $A_n$  haben die Eigenschaften  $A_p < A_q$  für  $p < q$ ,  $A_p | A_q$  und  $A_p + 1 | A_q + 1$  für  $p \leq q$ , und  $A_{an} + 1 = a^{A_n+1}$  ( $p, q, n$  nicht-negativ, ganz). Daraus folgt zunächst

$$A_n (M - 1) = A_{n+r} - A_n = (A_n + 1) \left( \frac{A_{n+r} + 1}{A_n + 1} - 1 \right) = (A_n + 1) g$$

mit ganzzahligem  $g$ , also  $A_n + 1 | M - 1$ , da  $(A_n, A_n + 1) = 1$ . Nun gilt für  $n \geq r \geq 2$  sicherlich die Ungleichung  $n + r \leq a^n$ , somit  $M | A_{n+r} | A_{a^n} = a^{A_n+1} - 1 | a^{M-1} - 1$ , letzteres wegen  $A_n + 1 | M - 1$ . Es ist also  $M | a^{M-1} - 1$ , und  $M$  ist auch zusammengesetzt, denn

$$N = \frac{A_{n+1}}{A_n}$$

hat die Eigenschaften  $N | M$  und  $1 < N < M$ , da  $r \geq 2$  ist.

O. REUTTER, Ochsenhausen