

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 20 (1965)
Heft: 2

Artikel: Starre, kippende, wackelige und bewegliche Achtfache
Autor: Wunderlich, W.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-23921>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math.

Band XX

Heft 2

Seiten 25–48

10. März 1965

Starre, kippende, wackelige und bewegliche Achteckfläche

Ein von acht Dreiecken gebildetes *Achteckfläche* oder *Oktaeder* besitzt bekanntlich sechs Ecken und zwölf Kanten, von denen bei gleichartigem Bau je vier in einer Ecke zusammentreffen. Bezeichnet man die Gegeneckenpaare mit A_0, A_1, B_0, B_1 und C_0, C_1 , so besteht das Kantensystem aus allen Verbindungsstrecken dieser Punkte mit Ausnahme der Diagonalen $A_0 A_1, B_0 B_1$ und $C_0 C_1$. Falls einander die Dreiecksflächen nicht durchsetzen, so lässt sich leicht ein Kartonmodell herstellen, das im allgemeinen starr sein wird, auch wenn die Verbindungen längs der Kanten flexibel sind. Finden gegenseitige Durchdringungen statt, so können im Modell bis zu vier Dreiecksflächen offen bleiben. In allen Fällen lässt sich durch Materialisierung der Kanten ein Stabmodell anfertigen, das ebenfalls im allgemeinen starr sein wird, selbst wenn die Stäbe in den Ecken gelenkig miteinander verbunden sind. Die gewohnte Starrheit ist jedoch keineswegs zwangsläufig bedingt, und die vorliegende Note¹⁾ soll die verschiedenartigen Möglichkeiten des Verhaltens solcher Oktaeder erörtern.

I. Konvexe Oktaeder

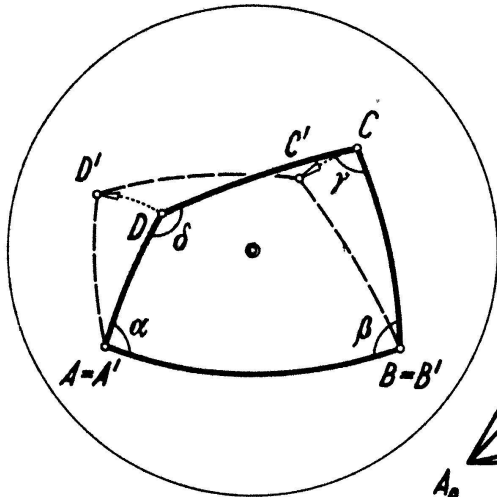
Seit CAUCHY (1812) weiss man, dass jedes *konvexe Polyeder starr* ist [1]²⁾. Dies gilt im besonderen also auch für *konvexe Oktaeder*. Der Nachweis läuft auf die Behauptung hinaus, dass zwei *konvexe* Achteckfläche, die in den *Kantenlängen* und damit in den *Kantenwinkeln* übereinstimmen, auch paarweise gleiche *Flächenwinkel* aufweisen und daher *kongruent* sind.

Zu diesem Zweck werden die von entsprechenden Ecken ausgehenden (konvexen) *Vierkante* verglichen. Die Deformationen eines solchen, längs der Kanten gelenkig beweglich zu denkenden Vierkants werden am besten überblickt, wenn man es mit einer Kugel schneidet, die ihren Mittelpunkt im Scheitel hat: man erhält so ein (konvexes) *sphärisches Gelenkviereck* $ABCD$ mit starren Seiten (Figur 1). Wird es unter Erhaltung der Seitenlängen in eine wieder als konvex vorauszusetzende Form $A'B'C'D'$ deformiert, wobei etwa der Winkel α bei A grösser geworden ist ($\alpha' > \alpha$), so wächst auf Grund des sphärischen Kosinussatzes die Diagonale BD ($B'D' > BD$), und daher nimmt auch der gegenüberliegende Winkel γ bei C zu ($\gamma' > \gamma$). So einleuchtend es erscheint, dass dies zwangsläufig eine Verkleinerung der beiden anderen Winkel nach

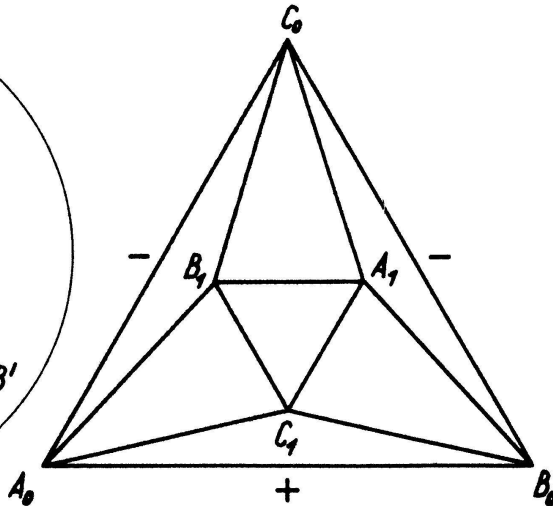
¹⁾ Nach einem am 29. Mai 1963 in Zagreb gehaltenen Vortrag.

²⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 32.

sich zieht ($\beta' < \beta$, $\delta' < \delta$), so ist der strenge Beweis dieser Tatsache auf der Kugel – wo man im Gegensatz zur Ebene nicht mit der Konstanz der Winkelsumme operieren kann – ziemlich umständlich. Ein elementarer, jedoch mancherlei Fallunterscheidungen verlangender Beweis wäre nach dem Vorbild von E. STEINITZ [2] zu führen³⁾, der eine diesbezügliche Lücke bei CAUCHY geschlossen hat; ein einfacher Beweis wäre wünschenswert.



Figur 1



Figur 2

Nehmen wir also die mit der Vergrößerung zweier gegenüberliegender Flächenwinkel eines Vierkants bei Wahrung der Konvexität einhergehende Verkleinerung der beiden anderen Flächenwinkel als bewiesen an. Für den Vergleich zweier in den Kantenlängen übereinstimmenden Oktaeder O und O' bringen wir nun bei den Kanten von O eine *Signatur* an, indem wir alle Kanten, die beim Übergang zu O' eine Vergrößerung des Flächenwinkels erfahren, mit einem Pluszeichen markieren, jene hingegen, bei welchen eine Verkleinerung des Flächenwinkels eintritt, mit einem Minuszeichen. Die beste Übersicht gewährt ein «Schlegel-Diagramm» nach dem Muster der Figur 2: Steht bei der Kante A_0B_0 etwa ein Plus, dann sind die Nachbarkanten A_0C_0 und B_0C_0 mit einem Minus zu versehen; damit haben aber die beiden Nachbarkanten C_0A_0 und C_0B_0 das gleiche Vorzeichen erhalten, was nicht zulässig ist. Dieser Widerspruch lehrt, dass die beiden konvexen Oktaeder O , O' in allen Flächenwinkeln übereinstimmen müssen, also (gleich- oder gegensinnig) *kongruent* sind.

Ein *konvexes Oktaeder* mit unveränderlichen Kantenlängen ist demnach ein *starrs Gebilde*. Es ist durch sein «Netz» (die Abwicklung) eindeutig bestimmt. So einfach die Herstellung des Modells durch Zusammenkleben der acht gegebenen Dreiecke ist, so schwierig scheint die geometrische Konstruktion des Oktaeders zu sein, die im allgemeinen auf ein Problem 8. Grades führen dürfte.

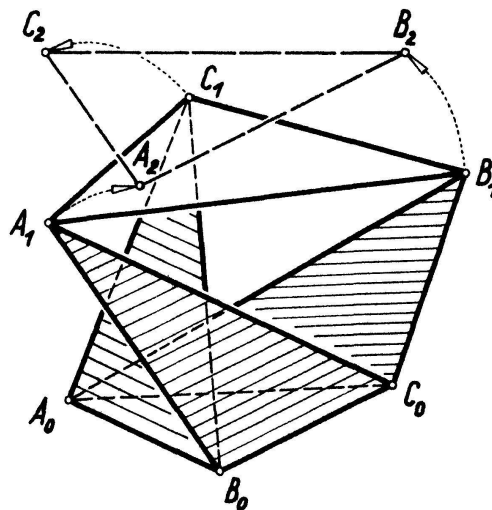
II. Kippoktaeder

Beim Starrheitsbeweis des konvexen Oktaeders spielt die Konvexität eine wesentliche Rolle. Lässt man die Voraussetzung der Konvexität fallen, lässt man also auch einspringende Kanten zu, so ist die eindeutige Existenz des durch sein Netz gegebenen Achtflachs nicht mehr gesichert.

³⁾ Der indirekte Beweis daselbst zeigt, dass die gleichzeitige Vergrößerung (Verkleinerung) der Winkel α und β die Verlängerung (Verkürzung) der Seite CD bedingen würde.

So kann es vorkommen, dass zu ein und demselben Netz aus acht Dreiecken *zwei* nur wenig voneinander verschiedene Achtfläche existieren, sodass bei dem zugehörigen Kartonmodell der Übergang von der einen zur anderen Form mit sanfter Gewalt zu erzwingen ist. Das Modell erfährt dabei eine als *Kippung* bezeichnete sprunghafte Deformation.

Solche «*Kippoktaeder*» sind folgendermassen zu konstruieren: Man gehe aus von zwei kongruenten Dreiecken $A_1B_1C_1 \cong A_2B_2C_2$ in einigermaßen benachbarter Raumlage. Die drei Symmetralebenen α von A_1A_2 , β von B_1B_2 , γ von C_1C_2 bilden bei allgemeiner Annahme ein Dreikant. Schneidet man dasselbe mit einer passenden Ebene π_0 nach einem Dreieck $A_0B_0C_0$, so definiert dieses mit $A_1B_1C_1$ bzw. $A_2B_2C_2$ zwei Oktaeder (Figur 3), die wegen $\overline{A_0B_1} = \overline{A_0B_2}$ usf. paarweise übereinstimmende



Figur 3

Kantenlängen, also ein gemeinsames Netz besitzen. Jede der beiden Oktaederformen ist im allgemeinen für sich starr, doch genügt bei einiger Nachgiebigkeit des Modellmaterials bereits eine schwache Torsion, um die Kippung zu bewirken.

Figur 4 stellt die beiden Formen eines einfachen, metrisch speziellen Kippoktaeders in Grund- und Aufriss dar. Hier sind die beiden als gleichseitig angenommenen Ausgangsdreiecke $A_1B_1C_1 \cong A_2B_2C_2$ in paralleler Lage und mit gemeinsamer dreizähliger Symmetrieachse zu denken. Die zu ihnen parallele Schnittebene π_0 wurde ferner in einem solchen Abstand gelegt, dass auch $A_0B_0C_0 \cong A_1B_1C_1$. In den Figuren wurden die Deckflächen fortgelassen, um den Einblick ins Innere freizugeben⁴⁾. Bei festgehaltenem Basisdreieck $A_0B_0C_0$ vollzieht sich die Kipptransformation $A_1B_1C_1 \rightarrow A_2B_2C_2$ als Schraubung um die genannte Symmetrieachse. Zwischen dem zugehörigen Drehwinkel ω , den beiden Höhen h_1, h_2 und dem Umkreisradius r der gleichseitigen Dreiecke besteht die leicht abzuleitende Relation

$$h_2^2 - h_1^2 = 2r^2 \sin \frac{\omega}{2}. \tag{1}$$

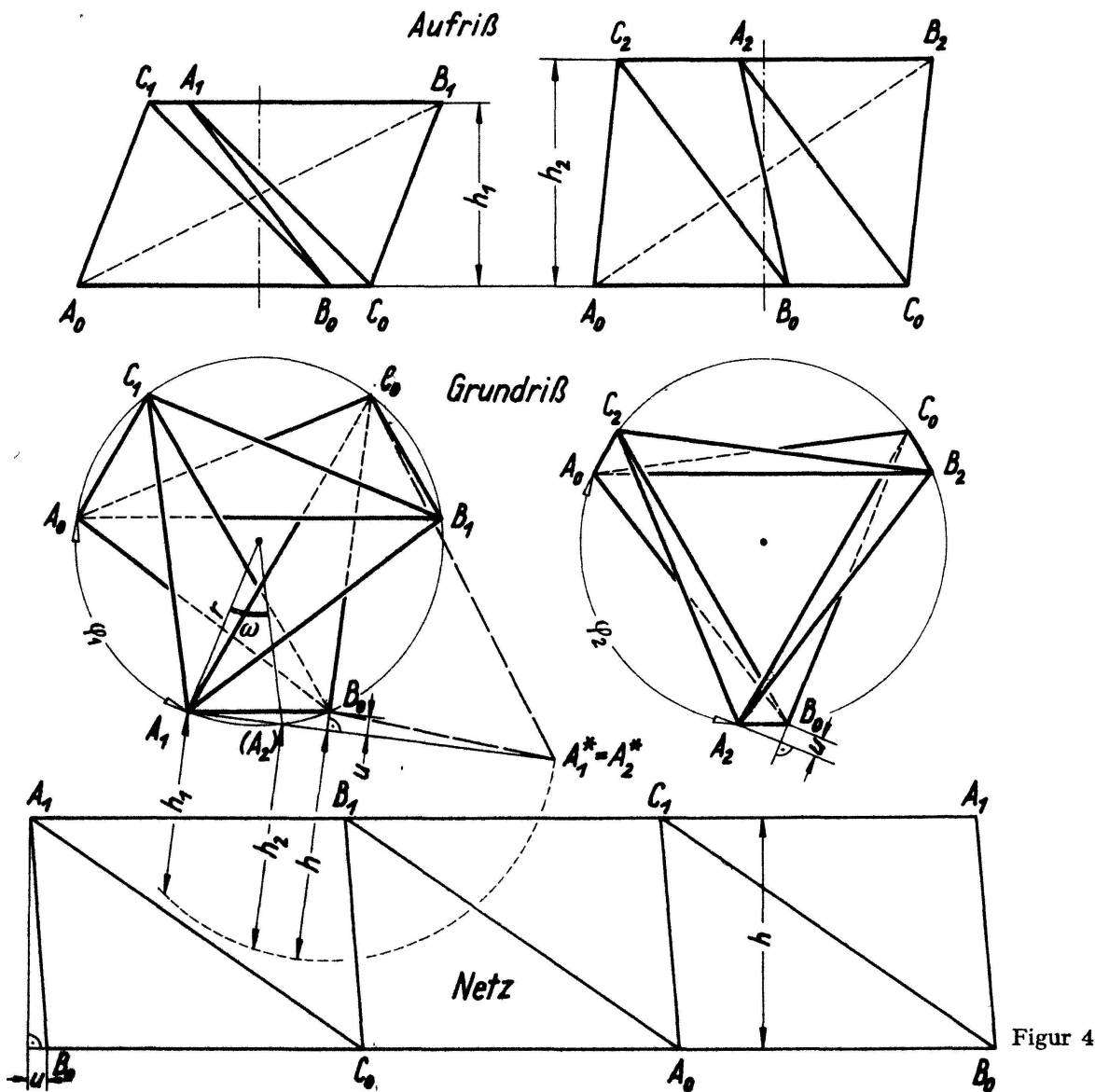
Für den (zur praktischen Durchführbarkeit der Kippung notwendigen) «Überhang» u der sechs kongruenten Manteldreiecke findet man:

$$0 \leq u = r \left(\cos \frac{\omega}{2} - \cos \frac{\pi}{6} \right) \leq r \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \approx 0,134 r. \tag{2}$$

⁴⁾ Wird ein solches Modell mit sämtlichen acht Flächen ausgeführt, so empfiehlt es sich, irgendwo ein Loch für den Durchtritt der eingeschlossenen Luft vorzusehen.

Im linken Grenzfall $u = 0$ ($\omega = \pi/3$) tritt als erste Körperform eine Art dreiseitiger Doppelpyramide auf, während die zweite das Aussehen eines dreiseitigen Prismas mit eingezogenen Manteldiagonalen hat. – Der rechte Grenzfall ($\omega = 0$) gehört schon in den nächsten Abschnitt.

Zu erwähnen wäre noch der Sonderfall $h_1 = 0$, bei welchem die erste Körperform nach Art eines «chapeau claque» vollständig in eine Ebene zusammenklappt.



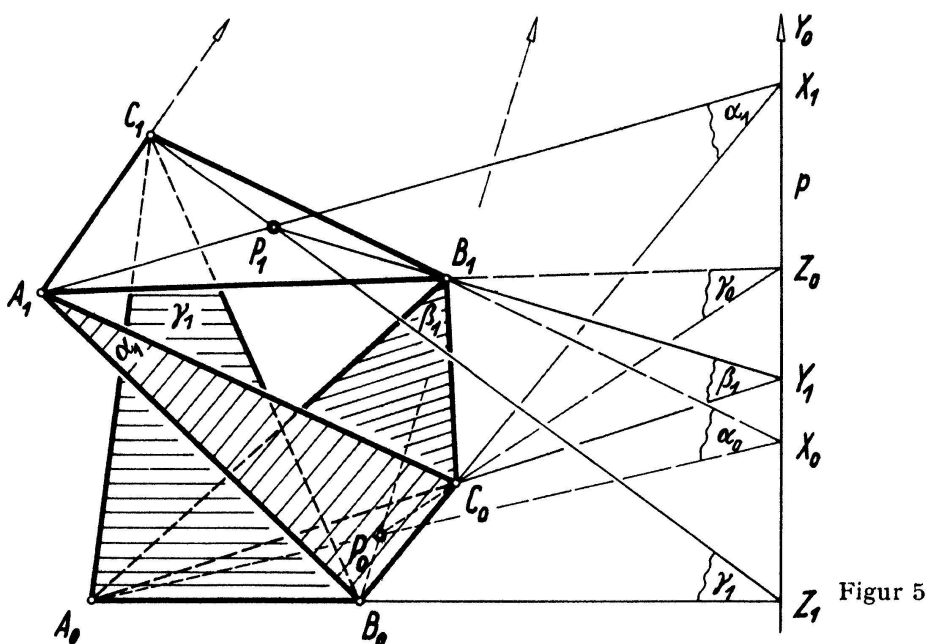
Figur 4

III. Wackeloktaeder

Die beiden kongruenten Ausgangsdreiecke $A_1B_1C_1 \cong A_2B_2C_2$ in Abschnitt II hängen bekanntlich stets durch eine gewisse Schraubung zusammen. Rücken sie zusammen, so werden die benützten Symmetralebenen α, β, γ zu den Bahnnormalenebenen α_1 von A_1, β_1 von B_1 und γ_1 von C_1 einer Schraubung. Irgendein Schnittdreieck $A_0B_0C_0$ des Dreikants $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ legt dann zusammen mit $A_1B_1C_1 = A_2B_2C_2$ ein Oktaeder fest, das zwei infinitesimal benachbarte Formen besitzt, also statt der Kippung eine gewisse infinitesimale «Wackelbewegung» gestattet. Diese ist im übrigen am Modell deutlicher feststellbar, als zu erwarten wäre.

Mit Rücksicht darauf, dass bei einer Schraubung die Raumpunkte mit ihren Bahnnormalebenen durch ein MÖBIUSSCHES *lineares Nullsystem* verknüpft sind, muss der Punkt $P_1 = \alpha_1\beta_1\gamma_1$ (also der Scheitel des Dreikants $\alpha_1\beta_1\gamma_1$) der Ebene $\pi_1 = A_1B_1C_1$ angehören. Diese Bedingung ist nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend.

Ein *Wackeloktaeder* ist demnach folgendermassen zu konstruieren: Man geht aus von zwei Ebenen π_0, π_1 mit der Schnittgeraden p und nimmt in π_1 ein beliebiges Dreieck $A_1B_1C_1$ sowie einen keiner Dreieckseite angehörenden Punkt P_1 an; keiner der Punkte soll auf p liegen (Figur 5). Die auf p liegenden Punkte von B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 seien mit X_0, Y_0, Z_0 bezeichnet, jene von P_1A_1, P_1B_1, P_1C_1 mit X_1, Y_1, Z_1 . Nach DESARGUES sind X_0X_1, Y_0Y_1, Z_0Z_1 drei Punktepaare einer Involution. Nun ziehe man in π_0 drei von p verschiedene und keinem Büschel angehörende Geraden durch X_1, Y_1 und Z_1 ; sie bilden die Seiten eines Dreiecks $A_0B_0C_0$. – Die Verbindungsgeraden A_0X_0 und B_0Y_0 liefern einen Schnittpunkt P_0 . Weil die Gegenseitenpaare des vollständigen Vierecks $A_0B_0C_0P_0$ auf p ebenfalls drei Punktepaare einer DESARGUESSCHEN Involution ausschneiden und diese wegen der gemeinsamen Punktepaare X_0X_1, Y_0Y_1 mit der erstgenannten identisch ist, muss auch die Gerade C_0Z_0 durch P_0 gehen.



Figur 5

Um nun nachzuweisen, dass das durch $A_0B_0C_0$ und $A_1B_1C_1$ definierte Oktaeder ein wackeliges ist, ist nur zu zeigen, dass die drei Elementenpaare $A_1, \alpha_1 = A_1B_0C_0$, $B_1, \beta_1 = B_1C_0A_0$ und $C_1, \gamma_1 = C_1A_0B_0$ eine Nullkorrelation bestimmen. Eine solche kann bekanntlich durch zwei reziproke Polare und einen Nullstrahl festgelegt werden. Verwenden wir hierzu die Geraden A_1B_1 und C_0P_1 sowie den Strahl C_1A_0 , so werden den Punkten A_1 und B_1 tatsächlich die Nullebenen $A_1C_0P_1 = \alpha_1$ und $B_1C_0P_1 = \beta_1$ zugewiesen, und weiters gehört zu C_1 die von den Nullstrahlen C_1A_0 und C_1P_1 (Treffgerade von A_1B_1 und C_0P_1) aufgespannte Ebene $C_1A_0P_1 = \gamma_1$. – Zum Punkt $A_0 \in \beta_1\gamma_1$ gehört ferner die ihn mit B_1C_1 verbindende Nullebene $\alpha_0 = A_0B_1C_1$, und analog gehören zu B_0 und C_0 die Nullebenen $\beta_0 = B_0C_1A_1$ und $\gamma_0 = C_0A_1B_1$. Schliesslich ist $P_0 = \alpha_0\beta_0\gamma_0$ der Nullpunkt von $\pi_0 = A_0B_0C_0$ und ebenso P_1 der Nullpunkt von π_1 .

Aus dem Gesagten folgt unter anderem, dass $A_0B_0C_0P_1$ und $A_1B_1C_1P_0$ ein *Möbiussches Tetraederpaar* bilden, denn die Ecken des einen Tetraeders liegen in den Seitenflächen des anderen und umgekehrt. Die beiden Tetraeder sind einander also (im projektiven Sinne) gleichzeitig eingeschrieben und umgeschrieben. – Mit einem Wackeloktaeder sind im übrigen *vier Möbiussche Tetraederpaare* verbunden, weil ja je zwei gegenüberliegende Seitenflächen eine infinitesimale Relativbewegung ausführen, welche ein lineares Nullsystem erzeugt.

Die Wackeloktaeder hat W. BLASCHKE entdeckt, der ihre infinitesimale Beweglichkeit als eine affine Eigenschaft hervorhob [3]. Aus der zugrundeliegenden Nullkorrelation und der daraus abgeleiteten rein projektiven Konstruktion geht aber klar hervor, dass es sich bei der Wackeligkeit sogar um eine *projektive Eigenschaft* handelt: Jedes durch Kollineation aus einem Wackeloktaeder gewonnene Achtfläch ist auch ein (wenigstens) wackeliges.

Aus Figur 5 ist noch herauszulesen, dass ein *konvexes Oktaeder niemals wackelig* sein kann: es müssten ja sonst die Spuren P_1A_1 , P_1B_1 und P_1C_1 ganz im Aussengebiet des Dreiecks $A_1B_1C_1$ verlaufen, was offensichtlich unmöglich ist.

Das metrisch spezielle, eine dreizählige Drehsymmetrie aufweisende Wackeloktaeder, das zum Grenzfall $\omega = 0$ von (2) gehört, ist dadurch charakterisiert, dass die gegenüberliegenden Flächen $A_0B_0C_0$ und $A_1B_1C_1$ gleichseitige Dreiecke sind, die vermöge einer Viertelschraubung um die gemeinsame Symmetrieachse auseinander hervorgehen ($\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$ in Figur 4). Die zugehörigen Möbiustetraeder sind übrigens auch in projektiver Hinsicht ausgezeichnet, indem sie sich in neunfacher hyperboloidischer Lage befinden [4].

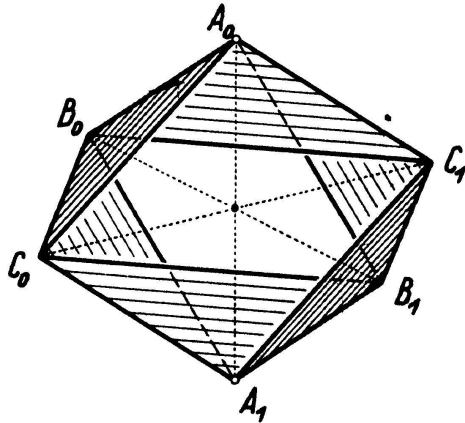
IV. Bricardsche Gelenkoktaeder

So merkwürdig bereits das Auftreten kippender und wackeliger Achtfläche an und für sich ist, weit erstaunlicher noch ist die Existenz von *Oktaedern mit endlicher, kontinuierlicher Beweglichkeit*. Sie wurden von R. BRICARD im Zuge einer systematischen Untersuchung von bewundernswerter Tiefgründigkeit gefunden [5]. Er gelangte dabei zu *drei Typen*:

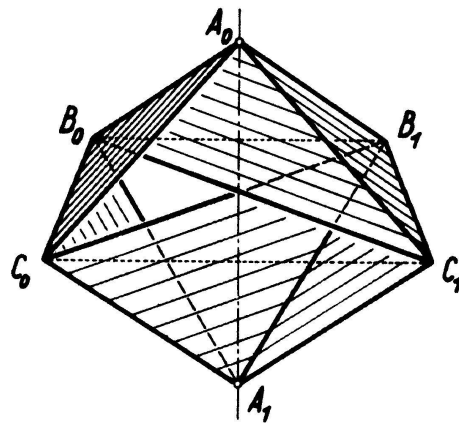
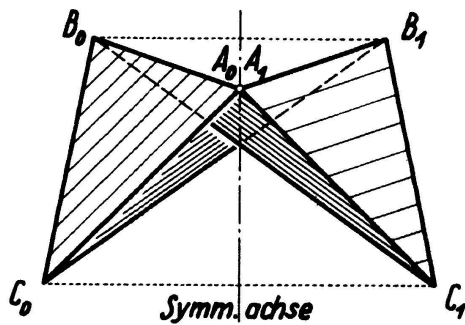
1. *Gelenkoktaeder mit Symmetrieachse*. Man gehe aus von zwei beliebigen, längs einer Seite zusammenhängenden Dreiecken $A_0B_0C_0$ und $A_1B_0C_0$, und unterwerfe sie einer axialen Spiegelung, welche A_0 mit A_1 vertauscht; die dabei aus B_0 und C_0 hervorgehenden Punkte seien B_1 und C_1 (Figur 6). Die beiden, gelenkig verbunden zu denkenden Dreieckspaare $A_0B_0C_0$, $A_1B_0C_0$ und $A_0B_1C_1$, $A_1B_1C_1$ weisen eine Beweglichkeit von zwei Freiheitsgraden auf. In jeder Lage sind auf Grund der Symmetrie die Strecken B_0C_1 und B_1C_0 gleich lang, sodass die Festsetzung ihrer gemeinsamen Länge die Beweglichkeit noch nicht aufhebt, sondern nur um einen Grad auf *Zwanglauf* reduziert. Man kann also die (kongruenten) Dreiecke $A_0B_0C_1$ und $A_1B_1C_0$ noch hinzufügen. Die restlichen Dreiecke $A_0B_1C_0$ und $A_1B_0C_1$ müssen offen bleiben, um die Bewegung des Modells nicht zu stören. – Ein hübsches, von W. BLASCHKE [6]⁵⁾ angegebenes spezielles Modell erhält man, wenn man die sechs materialisierten Dreiecke gleichschenkelig-rechtwinklig ausführt, wobei ihre Hypotenusen die beiden gleichseitigen Öffnungen beranden.

⁵⁾ Dort steht das (aus einem Würfel abgeleitete) Modell in Zusammenhang mit der bekannten Konfiguration von PETERSEN-MORLEY.

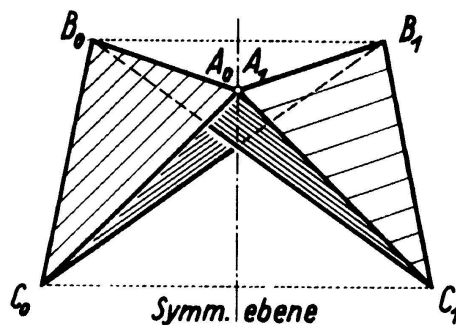
2. *Gelenkkoctaeder mit Symmetrieebene.* Man gehe wieder von zwei beliebigen, längs einer Seite gelenkig zusammenhängenden Dreiecken $A_0B_0C_0$ und $A_1B_0C_0$ aus, spiegle sie diesmal jedoch an einer durch A_0 und A_1 gehenden Ebene; die dabei aus B_0 und C_0



Figur 6



Figur 7



hervorgehenden Punkte seien B_1 und C_1 (Figur 7). Dieselben Betrachtungen wie unter 1 lehren, dass man noch die Dreiecke $A_0B_0C_1$ und $A_1B_1C_0$ (mit gleichen Basen $\overline{B_0C_1} = \overline{B_1C_0}$) hinzufügen kann, ohne die Beweglichkeit ganz aufzuheben. Die restlichen Dreiecke $A_0B_1C_0$ und $A_1B_0C_1$ müssen wieder offen bleiben. – Ein hübsches spezielles Modell ergibt sich, wenn die Ausgangsdreiecke gleichseitig und die Zusatzdreiecke gleichschenkelig-rechtwinklig (mit rechten Winkeln bei A_0 und A_1) ausgeführt werden. In der Mittellage fallen die Ecken mit jenen eines regulären Oktaeders zusammen.

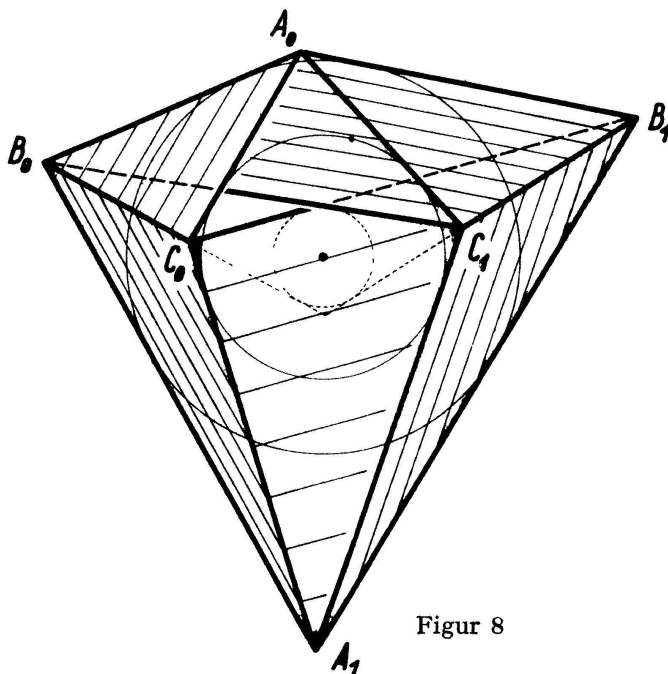
3. *Gelenkkoctaeder mit platten Grenzformen.* Man geht aus von zwei konzentrischen Kreisen einer Ebene π und zwei beliebigen Punkten $A_0, A_1 \in \pi$ ausserhalb des grösseren Kreises. Die Tangenten aus A_0 und A_1 an den einen Kreis liefern im Schnitt die Punkte B_0 und B_1 , die Tangenten an den anderen Kreis die Punkte C_0 und C_1 (Figur 8). Die Dreiecke $A_0B_1C_0$ und $A_1B_0C_1$ bleiben wieder offen. Das so konstruierte Oktaeder, dessen Beweglichkeit nicht unmittelbar einzusehen ist, besitzt ausser der Ausgangslage noch eine zweite ebene Grenzform. – Das spezielle, als Beispiel für den 2. Typ angeführte Achtflach gehört im übrigen auch zum 3. Typ.

Alle drei Modelle bestehen aus einem beweglichen Band aus sechs materialisierten Dreiecken. Die auf diesen in den Abbildungen eingetragenen, durchgehenden Schraffen verlaufen jeweils längs der freien Randkanten.

Die endliche Beweglichkeit eines BRICARDSchen Oktaeders ist keine projektive Eigenschaft mehr. Eine Kollineation verwandelt es im allgemeinen bloss in ein

wackeliges Achteck. Auch mit einem Gelenkkoktaeder sind aber jedenfalls in jeder nicht ausgearteten Lage vier Paare von Möbiustetraedern verbunden.

Während sich die Betrachtungen über kippende oder wackelige Achteckfläche un-
schwer auf andere Polyeder ausdehnen lassen, scheint über sonstige Vielfläche mit
paradoxe Beweglichkeit nichts bekannt zu sein. W. WUNDERLICH, Wien



Figur 8

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] A. L. CAUCHY, *Ille mémoire sur les polygones et les polyèdres*, J. Fc. polyt. 9, 87–98 (1813).
- [2] E. ŠTEINITZ, H. RADEMACHER, *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder*, Grundlehren math. Wiss. 41, 57 ff (Berlin 1934).
- [3] W. BLASCHKE, *Wackelige Achteckfläche*, Math. Z. 6, 85–93 (1920).
- [4] A. REUSCHEL, *Konstruktion zweier gleich grosser regulärer Tetraeder, die einander zugleich ein- und umgeschrieben sind*. El. Math. 4, 7–11 und 25–30 (1949).
- [5] R. BRICARD, *Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé*, J. math. pur. appl. 3, 113–148 (1897). – *Leçons de cinématique, II*, 318–332 (Paris 1927).
- [6] W. BLASCHKE, *Analytische Geometrie*, 60 (Wolfenbüttel 1948).

Eine ordnungstheoretische Charakterisierung des elementaren Flächeninhalts

Es sei V ein verallgemeinerter Boolescher Verband mit Nullelement 0^1) und μ eine (einfach additive) Massfunktion auf V , das heisst eine Abbildung von V in die Menge R^+ der nichtnegativen reellen Zahlen, welche die Eigenschaft

$$A \cap B = 0 \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \quad (\text{I})$$

¹⁾ Das heisst V sei ein abschnittskomplementärer distributiver Verband; siehe hierzu etwa [5]²⁾, Seite 48f. Mit anderen Worten: In V gelten genau dieselben Rechengesetze wie in einem Mengensystem, das mit zwei Mengen A, B stets auch die Vereinigungsmenge $A \cup B$ und (im Falle $A \subseteq B$) die Differenz $B - A$ enthält.