

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 21 (1966)
Heft: 1

Artikel: Lösungen der Gleichung $x^n + y^n = z^n$ mit $n = 2m$ im Ring gewisser ganzzahliger Matrizen
Autor: Domiaty, R.Z.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-24643>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 01.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Lösungen der Gleichung $x^n + y^n = z^n$ mit $n = 2^m$ im Ring gewisser ganzzahliger Matrizen

I. Problemstellung und Ergebnis

Ziel der vorliegenden Arbeit ist der Nachweis, dass die Gleichung

$$x^n + y^n = z^n \quad n > 2, \text{ ganzzahlig} \quad (1)$$

in gewissen Ringen mit nur abzählbar vielen Elementen für bestimmte n nichttriviale Lösungstriple besitzt.

Dabei heisse ein Tripel von Elementen α, β, γ aus einem beliebigen Ring R mit dem Nullelement 0 ein *nichttriviales Lösungstriple* von (1), wenn

$$\alpha^n \neq 0, \quad \beta^n \neq 0, \quad \gamma^n \neq 0 \quad \text{und} \quad \alpha^n + \beta^n = \gamma^n$$

ist. Existiert ein solches Tripel, so heisse (1) *nichttrivial lösbar*. A. AIGNER hat in mehreren Arbeiten [1]–[5]¹⁾ die Möglichkeit der Gleichung (1) für gewisse n in quadratischen Körpern untersucht. Weiter ist bekannt, dass (1) im Ring der ganzzahligen Matrizen der Ordnung 2 für $n = 4$ nichttrivial lösbar ist; vgl. [6]. Dieses Ergebnis lässt sich verallgemeinern. Es gilt nämlich der folgende

Satz. *Die Gleichung (1) ist für $n = 2^m$ im Ring der ganzzahligen quadratischen Matrizen der Ordnung 2^{m-1} nichttrivial lösbar.*

Der Beweis folgt im Abschnitt III der Arbeit. Er wird sich auf die folgenden Hilfssätze stützen.

II. Hilfssätze

Hilfssatz 1. *Es sei R ein Ring mit Einselement 1 . α und β seien Elemente aus R mit $\alpha\beta = \beta\alpha$. Dann gilt für jedes geradzahlige $n \geq 2$*

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}^n = (\alpha\beta)^{n/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und für jedes ungeradzahlige $n \geq 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}^n = (\alpha\beta)^{(n-1)/2} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Beweis ergibt sich durch vollständige Induktion.

Hilfssatz 2. *Ist (1) in einem Ring R mit Einselement für $n = s$ nichttrivial lösbar, so ist (1) auch für $n = 2s$ nichttrivial lösbar, und zwar im Ring R_2 der quadratischen Matrizen der Ordnung 2 über R .*

¹⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 7.

Beweis. Für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

mit Elementen aus R gilt wegen Hilfssatz 1

$$A^{2s} = \alpha^s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{2s} = \beta^s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^{2s} = \gamma^s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Es sei α, β, γ ein nichttriviales Lösungstripel von (1) für $n = s$. Dann ist

$$A^{2s} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{2s} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{2s} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

und

$$A^{2s} + B^{2s} = (\alpha^s + \beta^s) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \gamma^s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = C^{2s}. \quad (5)$$

Dies war zu zeigen.

Trivialerweise gilt weiter der

Hilfssatz 3. *Ist R ein abzählbarer Ring mit Einselement, so trifft dasselbe auch für R_2 zu.*

Hilfssatz 2 und 3 besagen zusammen: Ist (1) in einem abzählbaren Ring R mit Einselement für ein $n = s$ nichttrivial lösbar, so gilt dies auch für $n = 2s$ in einem weiteren abzählbaren Ring mit Einselement, nämlich im Ring R_2 .

Hilfssatz 4. (a) *Im Ring G der ganzen Zahlen ist (1) für $n = 2$ nichttrivial lösbar.*
 (b) *Es sei $H = G_p$ der Ring der ganzzahligen quadratischen p -reihigen Matrizen und H_q der Ring der q -reihigen Matrizen über H . Dann ist H_q isomorph dem Ring G_{pq} der pq -reihigen Matrizen über G .*

Beweis. (a) ist trivial. Wir beweisen (b). Jedes Element von H_q lässt sich in der Form einer zusammengesetzten quadratischen Matrix der Ordnung pq über G schreiben. Dabei unterteilt man die Matrix der Ordnung pq in q^2 Quadrate mit je p^2 Elementen und ordnet jeder solchen quadratischen Untermatrix ein Element aus G_p zu. Ordnet man nun jeder Matrix aus G_{pq} die nach dem obigen Muster abgeteilte Matrix zu, so ist die Zuordnung eineindeutig und, wie man durch direkte Ausrechnung findet, ein Isomorphismus zwischen G_{pq} und H_q .

III. Beweis des Satzes in Abschnitt I

Nach Hilfssatz 4 (a) ist (1) in G für $n = 2$ nichttrivial lösbar. Aus Hilfssatz 2 folgt damit, dass (1) im Ring G_2 der zweireihigen quadratischen Matrizen über G für $n = 2^2$ nichttrivial lösbar ist. Wir machen nun die Induktionsannahme, dass (1) für $n = 2^m$ im Ring $\Delta = G_{2^{m-1}}$ der ganzzahligen quadratischen Matrizen der Ordnung 2^{m-1} nichttrivial lösbar sei. Nach Hilfssatz 2 ist (1) dann für $n = 2 \cdot 2^m = 2^{m+1}$ im Ring Δ_2 der zweireihigen quadratischen Matrizen über Δ nichttrivial lösbar. Nun ist aber Δ_2 gemäss Hilfssatz 4 (b) isomorph dem Ring G_{2^m} der 2^m -reihigen quadratischen Matrizen über G . Also ist (1) auch für $n = 2^{m+1}$ nichttrivial lösbar, und zwar im Ring G_{2^m} . Der Satz ist damit bewiesen.

IV. Beispiel

Nach [6] ist im Ring G_2 der ganzzahligen quadratischen Matrizen der Ordnung 2

$$\alpha^* = \begin{pmatrix} 0 & 2rt \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^* = \begin{pmatrix} 0 & r^2 - t^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^* = \begin{pmatrix} 0 & r^2 + t^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit ganzzahligem r und t ein nichttriviales Lösungstriple für den Exponenten $n = 4$. Nach den obigen Überlegungen ist dann

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2rt \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & r^2 - t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & r^2 + t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ein nichttriviales Lösungstriple von (1) für $n = 2^3 = 8$ im Ring G_4 der ganzzahligen quadratischen Matrizen der Ordnung 4. Das kann man übrigens auch direkt durch Nachrechnung verifizieren.

R. Z. DOMIATY, Graz

LITERATUR

- [1] A. AIGNER, *Über die Möglichkeit von $x^4 + y^4 = z^4$ in quadratischen Körpern*. Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. 43, Heft 9/12, S. 226–229 (1934).
- [2] A. AIGNER, *Weitere Ergebnisse über $x^3 + y^3 = z^3$ in quadratischen Körpern*. Monatsh. f. Math. 56, 3. Heft, S. 240–252 (1952).
- [3] A. AIGNER, *Ein zweiter Fall der Unmöglichkeit von $x^3 + y^3 = z^3$ in quadratischen Körpern mit durch 3 teilbarer Klassenzahl*. Monatsh. f. Math. 56, 4. Heft, S. 335–338 (1952).
- [4] A. AIGNER, *Die kubische Fermatgleichung in quadratischen Körpern*. J. f. reine u. angew. Math. 195, Heft 1/2, S. 3–17 (1956).
- [5] A. AIGNER, *Die Unmöglichkeit von $x^6 + y^6 = z^6$ und $x^9 + y^9 = z^9$ in quadratischen Körpern*. Monatsh. f. Math. 61, Heft 2, S. 147–150 (1957).
- [6] R. Z. DOMIATY, *Solutions of $x^4 + y^4 = z^4$ in 2×2 Integral Matrices* (Erscheint im American Mathematical Monthly).

Über Kegelschnitte mit gemeinsamem Krümmungselement

F. LAURENTI hat in zwei Untersuchungen [2]¹⁾, [3] gezeigt, dass die Achsen von Parabeln mit gemeinsamem Krümmungselement eine *Steiner-Zykloide* einhüllen. W. KICKINGER [1] hat dem analytischen Beweis von LAURENTI einen synthetischen gegenübergestellt und ausserdem noch nachgewiesen, dass sich die Brennpunkte von Parabeln mit gemeinsamem Krümmungselement auf Kreisen bewegen. In der vorliegenden Untersuchung sollen die gleichen Fragen für allgemeine Kegelschnitte g (*Ellipsen und Hyperbeln*) diskutiert werden.

Es sei K der Krümmungsmittelpunkt eines beliebigen Punktes P des Kegelschnitts g und t die Kurventangente in P . Wir wählen ein kartesisches Bezugskreuz so, dass t mit der x -Achse und P mit O zusammenfallen, wodurch K im Abstand R von O

¹⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 10.