Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 21 (1966)

Heft: 2

Rubrik: Aufgaben

Remark. Since, for $n \geqslant 2$, $\alpha = 0$ is an admissible value the result of this note can be used for the evaluation of many integrals of the form $\int_0^\infty f(x)\,dx$. A discussion of integrals of this type using a contour similar to that in Figure 2 can be found in [3].

H. KAUFMAN and S. MELAMED, McGill University, Montreal

REFERENCES

[1] H. CARTAN, *Elementary Theory of Analytic Functions of One or Several Complex Variables* (Addison-Wesley, 1963).

[2] L. L. PENNISI, *Elements of Complex Variables* (Holt, Rinehart and Winston, 1963).

[3] S. MELAMED and H. KAUFMAN, *Evaluation of Certain Improper Integrals by Residues*, (accepted for publication in American Mathematical Monthly.)

Aufgaben

Aufgabe 497. In einem Dreieck mit gegebenen Seiten a und b stehe die Verbindungsgerade von In- und Umkreismittelpunkt normal auf der Schwerlinie m_c. Man konstruiere das Dreieck.

F. LEUENBERGER, Küsnacht

1. Lösung: Die Dreiecksseite c ist das harmonische Mittel der Seiten a und b. Demnach ist c eindeutig aus a und b und somit das Dreieck eindeutig aus den drei Seiten konstruierbar[1]). Zum Nachweis obiger Eigenschaft von c seien die Ecken des Dreiecks durch die auf den Umkreismittelpunkt M bezogenen Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ dargestellt. Dann ist $\boldsymbol{m}_c = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - 2\,\boldsymbol{c})/2$ und, wenn I der Inkreismittelpunkt ist, $\boldsymbol{MI} = (a\,\boldsymbol{a} + b\,\boldsymbol{b} + c\,\boldsymbol{c})/(a + b + c)$. Aus der Bedingung $\boldsymbol{m}_c \perp \boldsymbol{MI}$ folgt

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - 2\,\boldsymbol{c})\,(a\,\boldsymbol{a} + b\,\boldsymbol{b} + c\,\boldsymbol{c}) = 0\,.$$

Daraus ergibt sich unter Berücksichtigung von $\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{c}^2 = r^2$ (r = Umkreisradius) und $\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b} = r^2 - c^2/2$ usw. die von r unabhängige Gleichung

$$c^2 + \frac{a^2 + b^2}{a + b}\,c - 2\,a\,b = 0$$

mit der einzigen positiven Lösung $c = 2\,a\,b/(a + b)$ (die zweite Lösung $c = -(a + b)$ ist negativ).

O. REUTTER, Ochsenhausen

Eine ähnliche Lösung sandte W. JÄNICHEN (Berlin).

2nd Solution: Let h_a, h_b, h_c denote the triangle's altitudes. The median m_c passes through the triangle's center of gravity G, and the distances from G to the triangle's sides have the sum $(h_a + h_b + h_c)/3$.

Now it is known[2]) that the locus of all points in a triangle whose distances from the three sides have the same sum is a line perpendicular to the line joining the triangle's incenter and circumcenter. Since m_c also passes through vertex C, we have $(h_a + h_b + h_c)/3 = h_c$, or equivalently

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Thus we can construct c and hence the required triangle.

J. STEINIG, Zürich

---

[1]) Determination: Ist etwa $a \leqq b$, dann genügt c als harmonisches Mittel von a und b der Ungleichung $a \leqq c \leqq b$. Da zudem $a + c > b$ sein muss (Dreiecksungleichung), folgt $a > (\sqrt{2} - 1)\,b$ als notwendige Bedingung für die Konstruierbarkeit des Dreiecks.

[2]) E. J. F. PRIMROSE, *A Triangle Property*, note 2967, Math. Gaz. *45*, 231–232 (1961).

Weitere Lösungen sandten G. BACH (Braunschweig), C. BINDSCHEDLER (Küsnacht), H. FRISCHKNECHT (Berneck), I. PAASCHE (München), E. ROTHMUND (Wallisellen), W. SCHULER (Rottweil), H. SEYBOLD (München), W. VINZENZ (München).

Aufgabe 498. Es seien c_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ vier beliebige Kreislinien, die in dieser Reihenfolge durch einen gemeinsamen Punkt C gehen. Für die sechs Schnittwinkel φ_{ik} der Kreislinien c_i gilt dann

$$\sin\frac{1}{2}\varphi_{23}\sin\frac{1}{2}\varphi_{14} - \sin\frac{1}{2}\varphi_{13}\sin\frac{1}{2}\varphi_{24} + \sin\frac{1}{2}\varphi_{12}\sin\frac{1}{2}\varphi_{34} = 0\,.$$

(Sind O_i, O_k die Zentren der Kreise c_i, c_k und ist S_{ik} einer ihrer Schnittpunkte, so sei φ_{ik} der Gegenwinkel der Seite $O_i O_k$ im Dreieck $O_i O_k S_{ik}$.)

Die angegebene Beziehung gilt gleichzeitig für die sechs (geeignet gewählten) Schnittwinkel $\varphi_{ik} = \sphericalangle (g_i, g_k)$ von vier allgemeinen Geraden g_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ in einer Ebene.

H. FRISCHKNECHT, Berneck

Lösung: Der gemeinsame Schnittpunkt C der vier Kreise (Radien r_1, r_2, r_3, r_4) sei Ursprung eines Koordinatensystems. Die Gleichung des i-ten Kreises $(i = 1, 2, 3, 4)$ sei

$$x^2 + y^2 + 2\,x\,r_i \sin 2\,\alpha_i - 2\,y\,r_i \cos 2\,\alpha_i = 0\,.$$

Die Tangente t_i im Ursprung hat die Steigung tg $2\,\alpha_i$. Für die Schnittwinkel im Sinne der Aufgabe erhält man dann $\varphi_{ik} = 2\,\alpha_i - 2\,\alpha_k$ oder $\varphi_{ik}/2 = \alpha_i - \alpha_k$. Setzt man nun in die in der Aufgabe gegebene Gleichung diese Werte ein und beachtet die Formel

$$2\sin u \sin v = \cos(u - v) - \cos(u + v)\,,$$

so erhält man eine Identität. K. SCHULER, Rottweil

Vier allgemeine Geraden der Ebene können durch Parallelverschiebung in vier sich in C schneidende Tangenten t_i übergeführt werden.

Weitere Lösungen sandten H. MEILI (Winterthur) und O. REUTTER (Ochsenhausen).

Aufgabe 499. Trouver toutes les centaines de nombres naturels successifs qui contiennent au moins 25 nombres premiers. W. SIERPIŃSKI, Varsovie

Lösung: Wir zeigen zunächst, dass irgendeine 100-Folge sukzessiver ganzer Zahlen mindestens 76 Zahlen enthält, die durch wenigstens eine der Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11 teilbar sind.

Zum Beweis bilden wir in der Menge der ganzen Zahlen Untermengen $M(p_k)$, deren Elemente n die Eigenschaften $p_k \mid n$, aber $p_i \nmid n$ für $p_i < p_k$ besitzen ($p_k = 2, 3, 5, 7, 11$). Diese Mengen bestehen aus den Elementen: $M(2) = \{2\,g\}$, $M(3) = \{3\,(2\,g + 1)\}$, $M(5) = \{5\,(6\,g \pm 1)\}$, $M(7) = \{7\,(30\,g \pm 1);\ 7\,(30\,g \pm 7);\ 7\,(30\,g \pm 11);\ 7\,(30\,g \pm 13)\}$, $M(11) = \{11\,(210\,g \pm 1);\ 11\,(210\,g \pm 11); \ldots\ 11\,(210\,g \pm p) \ldots;\ 11\,(210\,g \pm 103)\}$, ($p$ bedeute jede Primzahl zwischen 11 und 103), wobei g alle ganzen Zahlen durchläuft. Ordnet man die Elemente von $M(p_k)$ als monotone Folge, dann wiederholen sich die Differenzen aufeinanderfolgender Elemente periodisch in Intervallen von der Länge $p_1\,p_2 \ldots p_k$, insbesondere ist $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$ in diesem Sinn gemeinsame «Periode» für die fünf oben angegebenen Mengen, so dass wir die weitere Untersuchung auf ein Intervall dieser Länge, etwa $1 \leqq n \leqq 2310$, beschränken können.

Aus obiger Darstellung der Elemente von $M(p_k)$ und unter Berücksichtigung der erwähnten Periodizitätseigenschaft ergibt sich unschwer, dass eine 100-Folge sukzessiver ganzer Zahlen genau 50 Elemente aus $M(2)$, mindestens 16 aus $M(3)$, mindestens 6 aus $M(5)$ und mindestens 3 aus $M(7)$ enthält, also mindestens 75 Zahlen, die durch eine der Primzahlen 2, 3, 5, 7 teilbar sind. In der geordneten Menge $M(11)$ treten im Intervall $1 \leqq n \leqq 2310$ zwei Fälle auf, wo die Differenz benachbarter Elemente grösser als 100 ist; es handelt sich um die Elementpaare 11 und 11^2 sowie $11 \cdot 199$ und $11 \cdot 209$. Sonst ist die Differenz benachbarter Elemente höchstens $8 \cdot 11 < 100$, da benachbarte Primzahlen zwischen 11 und 103 höchstens die Differenz 8 aufweisen. Demnach ist in einer 100-Folge sukzessiver ganzer Zahlen mindestens noch 1 Element aus $M(11)$ enthalten, sofern nicht das Anfangsglied a der Folge in $12 \leqq a \leqq 21$ oder in $2190 \leqq a \leqq 2199$ liegt. In diesen Ausnahmefällen enthält die zugehörige 100-Folge zwar kein Element von $M(11)$, jedoch prüft man leicht nach, dass sie in jedem dieser Fälle von wenigstens einer der Mengen $M(3)$, $M(5)$, $M(7)$ ein Element mehr als die angegebene Mindestzahl enthält. Damit ist die zu Beginn gemachte Aussage bewiesen.

Aus dem Bisherigen folgt, dass eine 100-Folge sukzessiver natürlicher Zahlen nur dann mindestens 25 Primzahlen enthalten kann, wenn ihr Anfangsglied a im Intervall $1 \leqq a \leqq 11$ liegt. Unter diesen 11 Folgen gibt es 7, denen die Eigenschaft zukommt; ihre Anfangsglieder sind $a = 1, 2, 3, 4, 5, 10, 11$.

O. REUTTER, Ochsenhausen

Der Aufgabensteller benutzt die von A. SCHINZEL, Acta Arith. *4*, 203 (1958), bewiesene Tatsache, dass eine 100-Folge höchstens 23 Zahlen enthält, die durch keine Primzahl $\leqq 17$ teilbar sind.

Eine weitere Lösung sandte H. HARBORTH (Braunschweig).

Aufgabe 500. Les pieds des bissectrices intérieures des angles de face d'un tétraèdre sont douze points d'une même quadrique.

NATHAN ALTSHILLER-COURT, University of Oklahoma, USA

Lösung: Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass drei Punktepaare P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 die resp. auf den Seiten A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 eines Dreiecks liegen, einem Kegelschnitt angehören, ist nach CARNOT das Bestehen der Relation

$$(\overline{A_2P_1}/\overline{P_1A_3})\,(\overline{A_2Q_1}/\overline{Q_1A_3})\,(\overline{A_3P_2}/\overline{P_2A_1})\,(\overline{A_3Q_2}/\overline{Q_2A_1})\,(\overline{A_1P_3}/\overline{P_3A_2})\,(\overline{A_1Q_3}/\overline{Q_3A_2}) = 1\,. \quad (1)$$

(Dieser Satz lässt sich mit baryzentrischen Koordinaten leicht verifizieren.) Im Fall der vorliegenden Aufgabe geht (1) für die 6 Fusspunkte, die auf den drei Kanten einer Seitenfläche des Tetraeders liegen, in die Identität

$$(a/b)\,(b'/a')\,(b/c)\,(c'/b')\,(c/a)\,(a'/c') = 1$$

über, wo a, b, c die drei betreffenden Kanten und a', b', c' ihre Gegenkanten bedeuten. Die 10 Fusspunkte, die auf den 5 verschiedenen Kanten zweier Seitenflächen F_1, F_2 liegen, gehören daher zwei Kegelschnitten K_1, K_2 an, die zwei gemeinsame Punkte haben und deshalb ein Büschel von Flächen zweiter Ordnung bestimmen. Die Fläche des Büschels, die durch den einen Fusspunkt auf der sechsten Kante geht, enthält dann auch noch den anderen, weil ihre Schnitte mit den Seitenflächen F_3, F_4 mit den Kegelschnitten K_3, K_4 5 Punkte gemeinsam haben und damit mit K_3, K_4 zusammenfallen.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Weitere Lösungen sandten W. JÄNICHEN (Berlin), J. SCHOPP (Budapest) und K. SCHULER (Rottweil).

Neue Aufgaben

Aufgabe 521. Die drei Ecken P_1, P_2, P_3 eines beliebigen Dreiecks sollen durch eine räumliche Inversion in die drei Punkte P_1^*, P_2^*, P_3^* so abgebildet werden, dass

$$P_1^*P_2^* = P_2P_3\,, \quad P_2^*P_3^* = P_3P_1\,, \quad P_3^*P_1^* = P_1P_2\,.$$

Welches ist der geometrische Ort für das Inversionszentrum?

W. JÄNICHEN, Berlin-Zehlendorf

Aufgabe 522. 1. Gibt es eine auf $I = \{x \text{ rational}, 0 < x < 1\}$ definierte reellwertige Funktion, die in jedem Punkt von I ein starkes lokales Extremum hat?

2. Gibt es eine auf $J = \{x \text{ reell}, 0 < x < 1\}$ definierte reellwertige Funktion, die in jedem Punkt von J ein starkes lokales Extremum hat?

W. Schwarz und J. Spilker, Freiburg i. Br.

Aufgabe 523. Man zeige, dass das Polynom in z

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n+k-i}{k} z^i + \sum_{i=0}^{k} \binom{n+k-i}{n} z^{1+2i} - z^{2+n+2k} \quad (n, k = 0, 1, 2, \ldots)$$

den Faktor $1 + z - z^2$ enthält. I. Paasche, München

Aufgabe 524. $a_1 < a_2 < \cdots$ sei eine unendliche Folge natürlicher, paarweise teilerfremder Zahlen, von denen keine eine Primzahl ist. Man beweise

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} < \infty .$$

P. Erdös, Budapest

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. Willi Lüssy, Büelrainstrasse 51, Winterthur

1. Von einem rotationsförmigen Hohlkegel mit konstanter Wandstärke sind gegeben: die Höhe h des äusseren Mantels, die Höhe $h - t$ des inneren Mantels, mit $t = h\,x$. Bestimme den Abstand η seines Schwerpunkts von der äusseren Spitze.

▶ $$\eta = \frac{h}{4} \cdot \frac{8 - 6x + x^3}{3 - 3x + x^2} .$$

Für kleine Werte von x gilt

$$\eta = \frac{2}{3} h \left(1 + \frac{1}{4} x - \frac{1}{12} x^2 - \frac{1}{24} x^3 \cdots\right) .$$

2. Zwei konfokale Ellipsen sind gegeben durch die Halbachsen a_1, b_1 und a_2, b_2 $(a_2 > a_1)$. Ein Strahl dreht sich um den einen Brennpunkt. Wie lang ist die grösste Strecke s, die von den beiden Ellipsen auf dem Strahl ausgeschnitten wird?

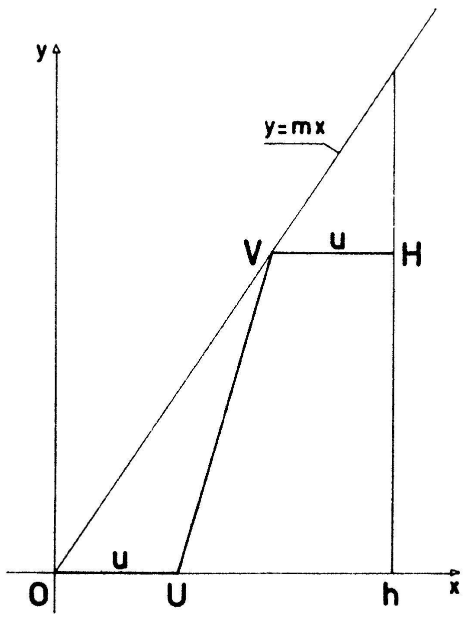
▶ Benütze die Polargleichung der Ellipse.

$$s = \frac{(b_2 - b_1)^2}{a_2 - a_1} .$$

3. Gegeben ist die Gerade $y = m\,x$ und die Abszisse h. Man suche einen Streckenzug $OUVH$ minimaler Länge, in dem die horizontalen Strecken OU und VH gleich lang sind.

▶ Für das Minimum findet man

$$u = \frac{h\,m^2}{4 + m^2} \quad \text{und} \quad \overline{UV} = h!$$



4. Bestimme die Länge der Kreisevolvente

$$\begin{cases} x = r\,(\cos t + t \sin t) \\ y = r\,(\sin t - t \cos t) \end{cases}$$

a) Zeige: Wickelt man den Bogen $2\,r$ ab, so ist auch die Länge der Evolvente gleich $2\,r$.

b) Ein voller Umlauf der Spirale soll beendet sein, wenn die Kurve die positive x-Achse schneidet. Berechne die Länge des ersten Umlaufs.

▶ $s = r\,t^2/2$. Zur Bestimmung der oberen Grenze t ist die Gleichung $t = \operatorname{tg} t$ $(2\,\pi < t < 3\,\pi)$ zu lösen.

$$t = 7{,}7253\,, \quad s = r \cdot 29{,}840\,.$$

5. Eine Kette der Länge $2\,s = 36{,}00$ m ist an zwei gleich hohen Punkten aufgehängt. Der Durchhang beträgt $d = 16{,}00$ m. Berechne die Spannweite a.

▶ Für $y = h \operatorname{Cos}(x/h)$ ergibt sich

$$h = \frac{s^2 - d^2}{2\,d} = 2{,}125\,, \qquad a = \frac{s^2 - d^2}{d} \operatorname{Ar\,Sin} \frac{2\,s\,d}{s^2 - d^2} = 12{,}04 \text{ m}\,.$$

Literaturüberschau

Geometrical Probability. Von M. G. Kendall und P. A. P. Moran. 125 Seiten, 17 Figuren, 186 Titel des Schriftenverzeichnisses. sFr. 19.60. Charles Griffin + Co, London 1963.

Wie die Verfasser im Vorwort treffend vermerken, sind in den vielen Werken, die in den letzten Dezennien über Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik geschrieben worden sind, die Probleme der geometrischen Wahrscheinlichkeiten wenig berücksichtigt worden. Die immer mehr anwachsende Bedeutung, die den beiden genannten Disziplinen zuerkannt werden musste, wirkte sich im Fachschrifttum fast lediglich auf die Darstellung der den arithmetischen und analytischen Methoden verpflichteten wahrscheinlichkeitstheoretischen und statistischen Sachbereiche aus. Im Hinblick darauf, dass sich etwa bei den Forschungsarbeiten in den Naturwissenschaften, in der Medizin und in vielen andern wissenschaftlichen, technischen und industriellen Gebieten stets auch Fragen geometrisch statistischer Art stellen, ist eine zusammenfassende Darlegung der zuständigen Bearbeitungsmethoden und eine Zusammenstellung gelöster Probleme von grosser Nützlichkeit. Seit R. Deltheil (1926) die Schrift «Probabilités géométriques» herausgab, erschien kaum mehr eine Monographie vergleichbarer Bedeutung über dieses Sachgebiet. Zwar ermöglichte die von M. W. Crofton (1869), W. Blaschke (1935), L. A. Santaló (1940) und vielen andern Autoren in zahllosen Abhandlungen gefestigte Bindung zwischen Integralgeometrie und der Lehre von den geometrischen Wahrscheinlichkeiten eine reiche Ernte von allgemeinen Methoden und speziellen Einzelresultaten, wobei das erstmals explizite von G. Pólya (1917) formulierte Invarianzprinzip (Äquivalenz «geometrischer Ereignisse» bezüglich einer passenden Bewegungsgruppe) grundlegende Bedeutung erlangte, doch blieben diese Noten in den verschiedensten Fachzeitschriften verstreut. So sind die meisten Ergebnisse, die etwa einem Atomphysiker, Makromolekularchemiker oder auch beispielsweise einem Strahlungsbiologen bei der Bearbeitung geeigneter geometrisch interpretierter Zufallsprozesse dienlich sein könnten, unbekannt oder schwer erreichbar. – Hier erfüllt das vorliegende Bändchen, das übersichtlich gegliedert, ansprechend verfasst und drucktechnisch sehr suggestiv wirkt, einen äusserst nutzbringenden Auftrag. Aber auch abgesehen von der Anwendbarkeit stellt der verarbeitete Stoff in seiner aus der Gegenüberstellung von Geometrie und Wahrscheinlichkeitstheorie resultierenden Eigenart und Vielfalt, auch vom rein mathematischen Standpunkt aus betrachtet, ein originelles und anziehendes Werk dar. – Die Verfasser erreichen das gesteckte Ziel dadurch, dass sie den Leser durch eine Reihe kurzer Studien und Einzelprobleme hindurchführen, die dort, wo es möglich ist, in einen allgemein erörterten Rahmen hineingestellt werden [Integralgeometrische