Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 22 (1967)

Heft: 2

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Kleine Mitteilungen

Bemerkungen zu einem Satz von Steinitz

Der wohlbekannte Satz von STEINITZ [1][1]) über nicht umschreibbare Polyedertypen lässt sich folgenderweise verschärfen (Ein Polyedertypus heisst nicht umschreibbar, wenn kein konvexer Repräsentant dieses Typus eine Inkugel besitzt, die alle seine Seitenflächen berührt.):

Wenn unter den n Flächen eines Polyeders (Typus) H eine Menge T mit $m > n/2$ Flächen existiert, in der keine zwei Flächen eine gemeinsame Kante haben, dann gibt es keine Kugel, die alle Flächen der Menge T berührt. Dies gilt auch für $m = n/2$, wenn es eine Kante gibt, die mit keiner Fläche aus T inzidiert.

Der Satz von STEINITZ besagt nur, dass ein solches Polyeder nicht umschreibbar ist.

Zum Beweis nehmen wir an, dass eine Inkugel alle Flächen der Menge T berührt. Dann berührt sie entweder auch alle anderen Flächen des Polyeders H, die nicht zu T gehören, oder es gibt Flächen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$, die sie nicht berührt. Im zweiten Falle legen wir zu diesen Flächen parallele Ebenen, die die Inkugel berühren. Keine dieser Ebenen schneidet eine ganze Fläche aus T ab, auch führt diese Operation nicht dazu, dass irgendwelche zwei Flächen aus T eine gemeinsame Kante bekommen. Dagegen kann bei dieser Operation eine solche Fläche ganz weggeschnitten werden, die die Inkugel nicht berührt und also nicht zur Klasse T gehört. Wir bekommen so ein einer Kugel umbeschriebenes Polyeder H_1 mit $n_1 \leqq n$ Flächen, unter denen es eine Menge T mit $m \geqq n/2 \geqq n_1/2$ Ebenen gibt, von denen keine zwei «benachbart» sind.

Der weitere Teil des Beweises ist eine knappere Fassung des Beweises von STEINITZ [1]. Die Flächen des Polyeders H_1, die nicht zu T gehören, bilden die Menge T'. K sei die Menge derjenigen Kanten des Polyeders H_1, die mit Flächen aus T inzidieren. Jede Kante aus K inzidiert also mit einer Fläche aus T und mit einer Fläche aus T'; aber eine Fläche aus T' kann auch mit einer Kante inzidieren, die nicht zu K gehört.

Jede Fläche von H_1 zerlegen wir in Dreiecke, indem wir den Berührungspunkt dei Inkugel mit den Eckpunkten verbinden. Jede Kante kommt bei zwei kongruenten Dreiecken vor, deshalb sind die diesen Kanten gegenüber liegenden Winkel gleich. Die Summe der den Kanten aus K gegenüber liegenden Winkel in den Flächen von T ist $2 \pi m$. Gleich gross sollte auch die Summe der entsprechenden Winkel in den Flächen aus T' sein. Das ist aber nicht möglich, wenn $m > n_1/2$ ist, oder wenn $m = n_1/2$ ist und H_1 eine Kante enthält, die nicht zu K gehört. Dieser Widerspruch beendet den Beweis des Satzes.

ERNEST JUCOVIČ, Prešov, ČSSR

LITERATURVERZEICHNIS

[1] STEINITZ, E., *Über isoperimetrische Probleme bei konvexen Polyedern II*, J. reine angew. Math. *159*, 133–143 (1928).

Aufgaben

Aufgabe 521. Die drei Ecken P_1, P_2, P_3 eines beliebigen Dreiecks sollen durch eine räumliche Inversion in die drei Punkte P_1^*, P_2^*, P_3^* so abgebildet werden, dass

$$P_1^* P_2^* = P_2 P_3, \quad P_2^* P_3^* = P_3 P_1, \quad P_3^* P_1^* = P_1 P_2 .$$

Welches ist der geometrische Ort für das Inversionszentrum?

W. JÄNICHEN, Berlin-Zehlendorf

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf die Literatur, S. 39.