Aufgaben

Aufgabe 541. Let I, O, H denote respectively the incenter, the circumcenter and the orthocenter of a triangle with sides a, b, c and the inradius r. Prove that the area K of the triangle IOH is given by
$$K = |(a-b)(b-c)(c-a)|/8r.$$

W. J. BLUNDON, Memorial Univ. of Newfoundland

1. Lösung: Die Ecken des Dreiecks seien bezüglich O durch die Vektoren z_i dargestellt. Dann gelten für H und I die Vektordarstellungen $H = \sum z_i$ und $I = (1/2s) \sum a_i z_i$, wobei a_i die Länge der Gegenseite der Ecke z_i, und $2s = \sum a_i$ ist. Demnach hat das Dreieck IOH den Flächeninhalt

$$K = \frac{1}{2}\left|\det\left(\sum z_i; \frac{1}{2s}\sum a_i z_i\right)\right| = \frac{1}{4s}\left|\sum (a_{i+1} - a_i)\det(z_i; z_{i+1})\right|.$$

Nun ist bekanntlich
$$\det(z_i; z_{i+1}) = \frac{1}{8rs} a_{i+2}^2 (a_i^2 + a_{i+1}^2 - a_{i+2}^2),$$
folglich
$$K = \frac{1}{32 r s^2}\left|\sum (a_{i+1} - a_i) a_{i+2}^2 (a_i^2 + a_{i+1}^2 - a_{i+2}^2)\right|$$
$$= \frac{1}{32 r s^2}\left|\prod (a_{i+1} - a_i)\cdot\left(\sum a_i\right)^2\right| = \frac{1}{8r}\left|\prod (a_{i+1} - a_i)\right|, \quad \text{q.e.d.}$$

O. REUTTER, Ochsenhausen

2. Lösung: Nach R. TUCKER und T. C. SIMMONS, Sol. qu. 3733 Ed. Times *43*, 60 gilt, wenn R der Umkreisradius des ebenen Dreiecks mit Innenwinkeln ABC ist,
$$K = \left|2R^2 \sin\frac{A-B}{2} \sin\frac{B-C}{2} \sin\frac{C-A}{2}\right|.$$
Wegen $a - b = 2R(\sin A - \sin B) = 4R\sin((A-B)/2)\sin(C/2)$ (analog $b - c$ und $c - a$) ist die Behauptung von BLUNDON äquivalent mit
$$1 = K/K = (4R\sin(A/2)\sin(B/2)\sin(C/2))\, r^{-1}.$$
Dies ist aber allgemein als richtig bekannt, q.e.d.

I. PAASCHE, München

Weitere Lösungen sandten L. BANKOFF (Los Angeles, USA), L. CARLITZ (Durham USA), W. JÄNICHEN (Berlin-Zehlendorf), S. KLEVEN (Sfeinkjer, Norwegen), R. WHITEHEAD (Hayle, England).

Aufgabe 542. a) Trouver un exemple de trois nombres triangulaires distincts > 0, tels que la somme de deux quelconques d'eux est un nombre triangulaire.

b) Démontrer qu'il existe une infinité de tels triples de nombres triangulaires.

W. SIERPIŃSKI, Varsovie

Solution: We have to solve the following system of Diophantine equations:
$$t_x + t_y = t_a, \quad t_x + t_z = t_b, \quad t_y + t_z = t_c.$$
If we put here $z = t_x - 1$, $b = t_x$ then the second equation is an identity. We put further
$$x = 2n^2 + n - 1, \quad y = 2n^3 - n - 1, \quad a = 2n^3, \quad c = b + n^2 - n - 1.$$
Then for $n > 1$, $x < y < z$, and a simple calculation shows that the system is satisfied. For $n = 2$ we get: $t_9 + t_{13} = t_{16}$, $t_9 + t_{44} = t_{45}$, $t_{13} + t_{44} = t_{46}$.

P. PIELORZ, Katowice, Poland

Dieselbe Lösung von a) sandte A. KRAWCZYK (Warschau). A. SCHINZEL (Warschau) führt die Lösung des Systems auf die Gleichung $u^2 - 281\,v^2 = 200$ zurück, die die Lösung $u = 85$, $v = 5$ besitzt und somit unendlich viele Lösungen hat.

Aufgabe 543. Welche natürlichen Zahlen sind zugleich Fibonaccizahlen 1 2 3 5 8 13 ... und Lucaszahlen 2 1 3 4 7 11 ...? I. PAASCHE, München

Lösung: Die Fibonaccizahlen f_n sind definiert durch $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_{k+2} = f_k + f_{k+1}$; die Lucaszahlen g_n durch $g_0 = 2$, $g_1 = 1$, $g_{k+2} = g_k + g_{k+1}$. Daraus, und aus der bekannten Beziehung

$$g_n = f_{n-1} + f_{n+1} \quad (n \geqslant 1)$$

folgt

$$f_{n+1} < g_n < f_{n+2} \text{ für } n \geqslant 3.$$

Die einzigen Lösungen sind also 2, 1 und 3. P. HOHLER, Olten

Weitere Lösungen sandten A. AMMANN (Yverdon), A. BAGER (Hjørring, Dänemark), L. CARLITZ (Durham, USA), C. BINDSCHEDLER (Küsnacht), W. JÄNICHEN (Berlin-Zehlendorf), W. JENTSCH (Halle/Saale), O. REUTTER (Ochsenhausen), E. TEUFFEL (Korntal/Stuttgart), E. WIDMER (Biel), K. ZACHARIAS (Berlin).

Aufgabe 544. The formulas

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^2 = (-1)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2}, \qquad \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^3 = (-1)^n \frac{(3n)!}{(n!)^3}$$

are well known. Show that

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^n \binom{2n}{k}^r = (-1)^n \frac{(rn)!}{(n!)^r} \qquad (*)$$

is impossible for $r > 3$. L. CARLITZ, Duke Univ., USA

Lösung: Für $n = 1$ würde die Formel lauten $r! = 2^r - 2$. Dies ist aber für jedes $r \geqq 4$ unmöglich, da dann $r! \equiv 0 \pmod 4$, dagegen $2^r - 2 \equiv 2 \pmod 4$.

A. BAGER, Hjørring, Dänemark

Eine weitere Lösung sandte E. WIDMER (Biel).

Neue Aufgaben

Aufgabe 565. Man zeige, dass in einem orthonormierten Koordinatensystem die Gleichung

$$(x_1^2 - x_2 x_3)^2 + (x_2^2 - x_3 x_1)^2 + (x_3^2 - x_1 x_2)^2 = c^4$$

eine Drehfläche darstellt. Man bestimme die Drehachse und eine Meridiankurve.

L. KIEFFER, Luxemburg

Aufgabe 566. In einer Ebene, in der ein Kreis K und ein Punkt A gegeben sind, wird jedem Punkt P derjenige Punkt P' auf der Geraden $A\,P$ zugeordnet, der zu P bezüglich K konjugiert ist. Man beweise: Fasst man alle Geraden der Ebene, die durch die Abbildung $P \to P'$ in zueinander ähnliche Kegelschnitte übergehen, in eine Schar zusammen, so sind die Enveloppen dieser Scharen konzentrische Kreise. Diejenigen Geraden, die in gleichseitige Hyperbeln übergehen, bilden das Büschel durch das gemeinsame Zentrum dieser Kreise. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Aufgabe 567. Man beweise: Eine Zahl α ist genau dann rational, wenn die Zahlenfolge α, $\alpha + 1$, $\alpha + 2$, ... eine wenigstens dreigliedrige geometrische Teilfolge enthält.

E. TEUFFEL, Korntal/Stuttgart

Aufgabe 568. Es sei P_m eine Menge von m verschiedenen Primzahlen und $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ die Folge aller natürlichen Zahlen, deren Primzahlzerlegung nur Primzahlen aus P_m enthält. Ist m nicht endlich, so ist nach Aufgabe 508 (El. Math. *21*, 112 (1966))

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}^{-1}$$

mmer rrational, wobei $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ das k.g.V. von $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bedeutet. Für $m = 1$ ist S rational. Der Aufgabensteller kennt keine weiteren m, für die S rational ist. Gibt es solche m oder ist S für $m > 1$ immer irrational? P. Erdös

Bericht

Ein mathematischer Problemwettbewerb im Kanton Bern

Die Informationsstelle für Mathematikunterricht, ein kantonal-bernisches Zentrum zur Förderung und Modernisierung des Mathematikunterrichts an den bernischen Schulen, hat vom Oktober 1966 bis zum Mai 1967 einen Problemwettbewerb («Olympiade») an den Gymnasien, Techniken und Seminarien des Kantons Bern organisiert. Es wurden vier Runden zu je fünf Aufgaben durchgeführt, wobei die Teilnehmer pro Runde 3–4 Wochen Zeit zur Lösung erhielten: Die Aufgaben wurden an sämtliche Mittelschüler des Kantons versandt; insgesamt beteiligten sich rund hundert Schüler am Wettbewerb. Bei der Bewertung der Lösungen wurden auch die sprachlich korrekte Darstellung und die Originalität berücksichtigt. Elf Schüler mit den höchsten Punktezahlen nahmen schliesslich an der fünften Runde teil, bei welcher fünf weitere Aufgaben während dreier Stunden unter Aufsicht zu lösen waren. Die drei Gewinner des Wettbewerbs erhielten Büchergutscheine. Es mag interessieren, dass die Schulnoten in Mathematik der drei Preisträger, alles Gymnasiasten, einen Durchschnitt von 5,9 aufweisen.

Der Leser findet anschliessend die 25 Aufgaben kurz dargestellt. Die den Schülern ausgehändigten Fassungen waren oft eingekleidet und von Erklärungen und Figuren begleitet. Die Probleme sind teilweise Originalprobleme, teilweise entstammen sie Aufgabensammlungen ähnlicher Wettbewerbe oder dem Aufgabenteil von Fachzeitschriften. Manchmal war es nötig, sie durch Vereinfachungen auf das den Schülern zugängliche Niveau zu bringen.

1.1 Ein Rechteck ist in 35 kongruente quadratische Felder unterteilt. Vom Zentralfeld aus soll ein Weg genau einmal durch alle Felder führen und in einem Randfeld enden, wobei nur Zwischenstrecken, keine Ecken durchlaufen werden dürfen. Beweise, dass ein solcher Weg unmöglich ist.

1.2 Beweise: die Folge der Endziffern der Zahlen n^{n+1} ($n = 1, 2 3 \ldots$) ist periodisch. Gib eine volle Periode an.

1.3 Einem beliebigen konvexen und zentralsymmetrischen Sechseckbereich sei ein Dreieckbereich einbeschrieben. Weise nach, dass der Flächeninhalt des Dreiecks höchstens halb so gross sein kann wie der Inhalt des Sechsecks. Gibt es Fälle, bei denen das Gleichheitszeichen eintritt?

1.4 Im Zahlenschema

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & 1 & & \\ & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

ist jede Zahl die Summe der drei über ihr stehenden (Ergänzung durch Nullen). Beweise, dass in jeder Zeile, mit Ausnahme der ersten beiden, mindestens eine von null verschiedene gerade Zahl vorkommen muss.

1.5 In wieviele Gebiete teilen n Parallelenpaare die Ebene höchstens?