**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik

**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft

**Band:** 23 (1968)

**Heft:** 2

**Artikel:** Un théorème sur les nombres triangulaires

**Autor:** Sierpiski, W.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-26027

# Un théorème sur les nombres triangulaires

Les nombres triangulaires sont des nombres $t_n = n\,(n+1)/2$, où $n = 1, 2, \ldots.$ Le but de cette note est de démontrer d'une façon élémentaire le théorème suivant:

**Théorème.** *Il existe une infinité de nombres triangulaires qui sont à la fois sommes, différences et produits de deux nombres triangulaires* $> 1$.

*Démonstration.* Les nombres $x = y = 1$ satisfont à l'équation

$$x\,(x+1) - 2\,y\,(y+1) + 2 = 0 \tag{1}$$

Or, vu l'identité

$$(3\,x + 4\,y + 3)\,(3\,x + 4\,y + 4) - 2\,(2\,x + 3\,y + 2)\,(2\,x + 3\,y + 3) = x\,(x+1) - 2\,y\,(y+1)$$

on voit que si les nombres naturels $x$ et $y$ satisfont à l'équation (1), les nombres naturels $3\,x + 4\,y + 3$ et $2\,x + 3\,y + 2$ qui sont plus grands que $x$ et $y$ satisfont aussi à l'équation (1). Cette dernière a donc une infinité de solutions en nombres naturels $x$ et $y$ plus grands que 1. Par exemple de la solution $x = y = 1$ on obtient la nouvelle solution $x = 10, y = 7$ qui donne ensuite la solution $x = 61, y = 43$, et ainsi de suite.

Soit $x > 1$ et $y > 1$ une solution de l'équation (1) en nombres naturels. D'après (1) on aura

$$t_x + 1 = 2\,t_y\,,$$

d'où

$$t_{t_x} = \frac{t_x\,(t_x + 1)}{2} = t_x\,t_y\,. \tag{2}$$

Or, comme on le vérifie sans peine, on a, pour $n = 2, 3, \ldots$

$$n = t_n - t_{n-1} \quad \text{et} \quad t_{t_n} = t_{t_n - 1} + t_n\,.$$

D'après (2) on a donc

$$t_{t_x} = t_{t_x - 1} + t_x = t_{t_{t_x}} - t_{t_{t_x} - 1} = t_x\,t_y\,.$$

Par exemple, pour $x = 10$, $y = 7$, on trouve

$$t_{55} = t_{54} + t_{10} = t_{1540} - t_{1530} = t_{10}\,t_7\,.$$

Or, on a aussi

$$t_8 = t_5 + t_6 = t_{13} - t_{10} = t_3\,t_3\,, \quad t_{20} = t_{14} + t_{14} = t_{21} - t_6 = t_6\,t_4\,.$$

Il est à remarquer que s'il s'agissait seulement de démontrer qu'il existe une infinité de nombres naturels qui sont à la fois sommes, différences et produits de deux nombres triangulaires $> 1$, on pourrait le faire d'une façon élémentaire en deux lignes, puisque ça résulte tout de suite de l'identité (qu'on vérifie sans peine):

$$t_{t_n - 1} + t_{t_n} = t_{t_n^2} - t_{t_n^2 - 1} = t_n\,t_n \quad \text{pour} \quad n = 2, 3, \ldots$$

Pour $n = 2$ et $n = 3$ on trouve, par exemple:

$$t_2 + t_3 = t_9 - t_8 = t_2 t_2 , \quad t_5 + t_6 = t_{36} - t_{35} = t_3 t_3 = t_8 .$$

Il existe des paires de nombres triangulaires dont la somme, la différence et le produit sont des nombres triangulaires, par exemple

$$t_{18} + t_{14} = t_{23} , \quad t_{18} - t_{14} = t_{11} , \quad t_{18} t_{14} = t_{189} .$$

Or, je ne sais pas s'il existe une infinité de tels paires.

W. SIERPIŃSKI, Varsovie

# Der Aufbau der Kongruenzgruppe im Raum durch Spiegelungen

(Fortsetzung)

## 4. Die Produkte aus 3 Ebenenspiegelungen

In unserer Aufzählung der Abbildungstypen in $\mathfrak{R}$ fehlen uns nur noch die Produkte aus 3 Ebenenspiegelungen. Wir beginnen die Untersuchung dieser Abbildungen mit einem einfachen Beispiel.

Es seien drei Ebenen $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ vorgegeben, die paarweise senkrecht sind und sich in einem Punkt $S$ schneiden. Die Kongruenz $\Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\gamma$ führt auf zugeordnete Punktepaare $A\,\bar{A}$, die so liegen, dass stets $S$ Mittelpunkt der Strecke $A\bar{A}$ ist (Fig. 9).

$$\Omega = \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\gamma = \Sigma_g \circ \Sigma_\gamma$$

Wegen der besonderen Lage der Ebenen $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ ist

$$\Omega = \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\gamma = \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\gamma \circ \Sigma_\beta = \Sigma_\gamma \circ \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta = \Sigma_\gamma \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\alpha$$
$$= (\Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\gamma)^{-1} = \Omega^{-1}$$

und daher

$$\Omega^2 = \Omega \circ \Omega^{-1} = I .$$

Die Abbildung $\Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\gamma$ ist somit eine Involution mit dem einzigen Fixpunkt $S$; wir bezeichnen sie als Spiegelung am Punkt $S$ und schreiben dafür $\Sigma_S$.

Wie die Fig. 10 zeigt, erhält man durch Zusammensetzen zweier Punktspiegelungen eine Translation:

$$\Sigma_F \circ \Sigma_G = (\Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\gamma) \circ (\Sigma_\gamma \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\delta) = \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\delta = T$$

wobei

$$\boldsymbol{v} = 2\,\boldsymbol{a} = 2\,\boldsymbol{F}\boldsymbol{G} .$$

Wir halten dieses Ergebnis fest in

**Satz 12:** *$\Sigma_F \circ \Sigma_G = T$ ist eine Translation; der Translationsvektor $\boldsymbol{v}$ ist der zweimal genommene Vektor $\boldsymbol{a}$ zwischen den Punkten $F$ und $G$ ($\boldsymbol{a}$ zeigt von $F$ nach $G$). Umgekehrt kann eine vorgegebene Translation $T$ mit dem Vektor $\boldsymbol{v}$ auf unendlichviele Arten als Produkt von zwei Punktspiegelungen $\Sigma_F$ und $\Sigma_G$ geschrieben werden; es ist $\boldsymbol{FG} = 1/2\,\boldsymbol{v}$.*