

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 23 (1968)  
**Heft:** 3

**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Insgesamt haben wir also bewiesen, dass für alle  $\lambda \in \mathcal{A}$  stets  $2\nu$  ( $\nu \neq 0$ ) im Nenner ein unkürzbares nichttriviales Quadrat enthält. Also gibt es auf jeder Geraden  $\lambda = t/\tau = \text{const.}$  eine dichte Punktmenge, für die (16) irreduzibel ist. Da  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{Q}$  dicht liegt, haben wir eine dichte Menge rationaler  $\lambda, \nu$  und damit auch eine in  $D'$  dichte Menge rationaler  $(p, q)$  gefunden, für die (16) über den rationalen Zahlen irreduzibel ist. Für diese Koeffizienten hat (16) keine konstruierbaren Nullstellen.

Die Punkte  $(p, q) \in D'$  mit rationalen Komponenten, aus denen sich die zugehörigen Winkel  $\alpha, \beta$  nicht konstruieren lassen, liegen also in  $D'$  dicht, erst recht sämtliche Punkte  $(p, q) \in D'$ , aus denen sich die zugehörigen Winkelpaare  $(\alpha, \beta) = A^{-1}(p, q)$  nicht konstruieren lassen.

Insgesamt wissen wir also bisher, dass die Punkte  $(p, q) \in D'$ , aus denen sich die  $\cos\alpha$  und  $\cos\beta$  konstruieren, wie nicht konstruieren lassen, in  $D'$  dicht liegen. Weiter liegen die Tripel  $(p, q, R)$  mit aus  $p$  und  $q$  konstruierbarem Umkreisradius  $R$  in  $D' \times \mathbf{R}$  dicht, da die (schlechthin) konstruierbaren Radien  $R$  in den reellen Zahlen  $\mathbf{R}$  dicht liegen. Diese Voraussetzung ist etwa für alle  $p, q$  und  $R$  mit festem und konstruierbarem  $|h - m|$  erfüllt. Also liegen die Tripel  $(p, q, R)$  derjenigen Dreiecke, die sich aus  $p, q, R$  konstruieren, wie nicht konstruieren lassen, in  $D' \times \mathbf{R}$  dicht. Bei festem  $|h - m|$  gilt das entsprechend für die Schnittpunkte  $w \in D''$ , q.e.d.

K. KOPFERMANN, Hannover

#### LITERATUR

- [1] BIBERBACH, LUDWIG, *Theorie der geometrischen Konstruktionen*, Basel 1952.
- [2] KOOISTRA, *Dreiecksungleichungen*, *El. Math.* 15, 79–80 (1960).
- [3] STEINIG, J., *Inequalities concerning the Inradius and Circumradius of a Triangle*, *El. Math.* 18, 127–131 (1963).
- [4] VELDKAMP, G. R., *Note on a Paper by J. STEINIG*, *El. Math.* 19, 87–88 (1964).

## Kleine Mitteilungen

### Area of the Union of Disks

At the Conference on Geometry in Eger in 1953, SZELE set forth a problem, which was written to him by KNESER. The problem, which has become well known since then, is the following. A set of  $n$  circular disks is given on the plane. Change the position of the disks in such a way that their distances from each other decrease. (The term 'it decreases' will always be used in the weak sense, i.e. it means that 'it does not increase'.) Is it true that the area covered by the disks decreases? The obvious conjecture is *yes*, but this has not been proved yet, and the answer seems to be rather difficult.

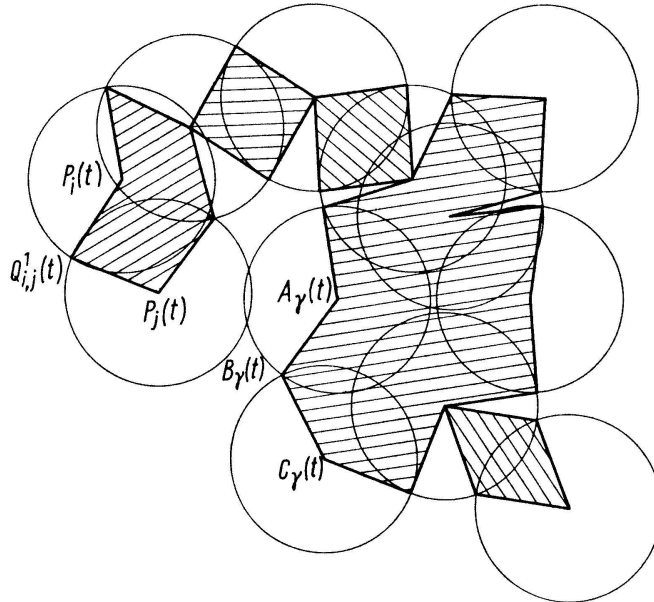
In this note a partial solution of this problem will be presented. Namely it will be proved (theorem 2) that if the disks are congruent and they can be moved *continuously* in such a way that the distance of any two centres decreases continuously, then the area covered by the disks also decreases. The proof is based on a similar statement about the perimeter length of the union of disks.

Let  $P_i(t)$  be points on the plane for  $i = 1, 2, \dots, n$  and  $0 \leq t \leq 1$ . Suppose  $P_i(t)$  is a continuous function of  $t$  and  $S(P_i(t), P_j(t))$  is a decreasing function of  $t$  for every pair  $i, j$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ . Denote by  $U(t)$  the union of unit disks with centres  $P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t)$ .

**Theorem 1.** *If  $p(t)$  denotes the perimeter length of  $U(t)$ , then  $p(t)$  is decreasing in  $[0, 1]$ .*

Denote by  $Q_{i,j}^1(t)$  and  $Q_{i,j}^2(t)$  the common points of the circles with centres  $P_i(t)$  and  $P_j(t)$ , provided they exist. Let  $B_\gamma(t)$  ( $\gamma \in \Gamma(t)$ , a set of indices) denote the points  $Q_{i,j}^k(t)$  on the boundary of  $U(t)$ , and if  $B_\gamma(t) \equiv Q_{i,j}^k(t)$  then let  $A_\gamma(t) = P_i(t)$  and  $C_\gamma(t) = P_j(t)$ . The union of the segments  $A_\gamma(t) B_\gamma(t)$ ,  $B_\gamma(t) C_\gamma(t)$  forms some polygons, which are completely covered by  $U(t)$  (see the figure). Denote the sum of the angles of these polygons by  $\sigma(t)$ . Then the perimeter length of  $U(t)$  is the following:

$$p(t) = 2 n \pi - \left( (\sigma(t) - \sum_{\gamma \in \Gamma(t)} \sphericalangle A_\gamma(t) B_\gamma(t) C_\gamma(t)) \right) = (2 n \pi - \sigma(t)) + \sum_{\gamma \in \Gamma(t)} \sphericalangle A_\gamma(t) B_\gamma(t) C_\gamma(t).$$



Suppose  $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$ , and the polygons, belonging to  $t_1$  and  $t_2$ , are formed by the segments  $Q_{i,j}^k(t) P_i(t)$  with the same indices and they are in the same cyclic order. Then  $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$ , and as  $S(P_i(t), P_j(t))$  decreases, the angle  $P_i(t) Q_{i,j}^k(t) P_j(t)$  also decreases, consequently

$$\sum_{\gamma \in \Gamma(t_1)} \sphericalangle A_\gamma(t_1) B_\gamma(t_1) C_\gamma(t_1) \geq \sum_{\gamma \in \Gamma(t_2)} \sphericalangle A_\gamma(t_2) B_\gamma(t_2) C_\gamma(t_2),$$

from which it follows that  $p(t_1) \geq p(t_2)$ .

But as there are only finitely many  $Q_{i,j}^k(t) P_i(t)$  segments, only finitely many different sets of polygons exist. Using the continuity of  $p(t)$ , it is easily seen that this implies the statement of the theorem.

**Theorem 2.** *If  $a(t)$  denotes the area of  $U(t)$ , then  $a(t)$  is decreasing.*

Suppose  $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$ . Denote by  $p(r, t)$  and  $a(r, t)$  the perimeter length and the area, respectively, of the union of the disks of radii  $r$  with centres  $P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t)$ . It is easily seen that  $a(r, t)$ , as a function of  $r$ , is differentiable and  $(\partial a(r, t) / \partial r) = p(r, t)$ . On the other hand  $a(0, t) = 0$  for all  $t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , and, according to theorem 1,  $p(r, t_1) \geq p(r, t_2)$  for all  $r$ ,  $0 \leq r \leq 1$ . Consequently  $a(1, t_1) \geq a(1, t_2)$ , i.e.  $a(t_1) \geq a(t_2)$ , the function  $a(t)$  decreases in  $[0, 1]$ .

BÉLA BOLLOBÁS, Math. Research Institute, Budapest

### Überall maximale Funktionen

In Aufgabe 522 (El. Math. 21, 42 (1966)) wurde die Frage aufgeworfen: Existiert auf den rationalen bzw. reellen Zahlen eine Funktion, welche überall ein lokales strenges Extremum besitzt? Im ersten Falle ist die Antwort «ja», im zweiten «nein»; hier wird in einem allgemeineren Rahmen eine Antwort gegeben.

Sei  $(X, \mathfrak{T})$  ein topologischer Raum,  $(Y, <)$  eine irreflexiv totalgeordnete Menge und  $f$  eine Abbildung von  $X$  nach  $Y$ . Man nennt einen Punkt  $x \in X$  lokales Maximum von  $f$ , wenn eine offene Umgebung  $U(x)$  von  $x$  existiert, so dass jedes  $y \in U(x)$  mit  $y \neq x$  die Eigenschaft  $f(y) < f(x)$  hat;  $f$  heisse Maximalfunktion, wenn  $f$  in jedem Punkt von  $X$  ein lokales Maximum hat. In dieser Note wird die Frage behandelt, wann ein topologischer Raum eine Maximalfunktion zulässt.

**Definition.**  $(X, \mathfrak{T})$  heisst  $M$ -Raum, wenn eine Abbildung  $V: X \rightarrow \mathfrak{T}$  existiert mit

(1)  $x \in V(x)$ ;

(2) für kein  $n$ -Tupel ( $n \geq 2$ ) paarweise verschiedener Punkte  $x_1, \dots, x_n$  aus  $X$  gilt  $x_i \in V(x_{i+1})$ ,  $1 \leq i < n$  und  $x_n \in V(x_1)$ .

Aus dieser Definition folgt sofort, dass die Mächtigkeit eines  $M$ -Raumes  $X$  nicht grösser ist als die Mächtigkeit jeder beliebigen Basis von  $X$ , da die Funktion  $V$  insbesondere injektiv ist. Ein  $M$ -Raum ist immer ein  $T_0$ -Raum. Andererseits zeigt das Beispiel der reellen Zahlen, dass selbst ein normaler Raum nicht notwendig ein  $M$ -Raum ist. Jedoch ist ein endlicher  $T_0$ -Raum immer ein  $M$ -Raum; man setze nur  $V(x) = \bigcap_{x \in U \in \mathfrak{T}} U$ , dann folgt

aus  $x_i \in V(x_{i+1})$  für  $1 \leq i < n$ , dass  $x_1 \in V(x_n)$  und wegen der  $T_0$ -Eigenschaft  $x_n \notin V(x_1)$  gilt.

Für abzählbare Räume lässt sich obige Definition noch vereinfachen, denn es gilt:

**Satz 1.** Ein höchstens abzählbarer Raum  $X$  ist genau dann  $M$ -Raum, wenn eine Funktion  $V: X \rightarrow \mathfrak{T}$  existiert mit

(1)  $x \in V(x)$ ;

(3) für kein Paar verschiedener Punkte  $x, y$  aus  $X$  gilt  $x \in V(y)$  und  $y \in V(x)$ .

*Beweis.* Nach Voraussetzung existiert ein Abschnitt  $A$  der natürlichen Zahlen mit  $X = \{x_i \mid i \in A\}$  und eine Funktion  $V$  mit (1) und (3). Die durch

$$V^*(x_0) = V(x_0), \quad V^*(x_{i+1}) = V(x_{i+1}) \cap \bigcap_{\substack{k \leq i \\ x_{i+1} \in V^*(x_k)}} V^*(x_k)$$

definierte Funktion  $V^*$  erfüllt dann (1) und (2). Denn wäre (2) für ein  $n$ -Tupel ( $n > 2$ ) verletzt, so auch für ein  $(n-1)$ -Tupel, da sich das Element mit grösstem Index nach Konstruktion von  $V^*$  eliminieren lässt; folglich auch für ein 2-Tupel im Widerspruch zu (3).

Einen Zusammenhang zwischen Maximalfunktionen und  $M$ -Räumen beschreibt der

**Satz 2.** Zu einem topologischen Raum  $X$  existiert genau dann eine irreflexive Totalordnung  $(Y, <)$  und eine Maximalfunktion  $f: X \rightarrow Y$ , wenn  $X$  ein  $M$ -Raum ist.

*Beweis.* Die Notwendigkeit des Kriteriums ist klar. Sei nun  $X$  ein  $M$ -Raum. Dann ist die folgende Relation eine irreflexive Halbordnung auf  $X: x \sqsubset y$  für  $x, y \in X$  genau dann, wenn ein  $n$ -Tupel ( $n \geq 2$ ) von Punkten  $x_1, \dots, x_n$  aus  $X$  existiert mit  $x_1 = x$ ,  $x_n = y$ ,  $x_i \neq x_{i+1}$  und  $x_i \in V(x_{i+1})$  für  $1 \leq i < n$ .

Eine solche Halbordnung lässt sich bekanntlich zu einer irreflexiven Totalordnung auf ganz  $X$  ausdehnen<sup>1)</sup>. Der Vollständigkeit halber wird hier ein Beweis gegeben.

Sei

$S = \{(X', <) \mid X' \subseteq X, < \llcorner \llcorner \text{ Totalordnung und eine Fortsetzung der } \sqsubset\text{-Ordnung}\}$  und sei  $S$  halbgeordnet durch:  $(X'_1, <_1) \llcorner (X'_2, <_2)$  genau dann, wenn  $X'_1 \subseteq X'_2$  und  $<_2 \llcorner X'_1 = <_1$ . Dann erfüllt  $(S, \llcorner)$  die Voraussetzung des Zornschen Lemmas, denn  $S$  ist nicht leer und jede Kette besitzt eine obere Schranke, nämlich ihre Vereinigung, daher enthält  $S$  ein maximales Element  $(X_0, <)$ . Es muss  $X_0 = X$  sein, denn falls ein  $x \in X - X_0$  existierte, liesse sich die Ordnung von  $X_0$  auf  $X_0 \cup \{x\}$  in naheliegender Weise fortsetzen, was der Maximalität von  $(X_0, <)$  widerspricht. Es sei nun  $(Y, <) = (X, <)$  und  $f$  die Identität, offensichtlich ist  $f$  eine Maximalfunktion.

Die so konstruierte Funktion  $f$  ist im allgemeinen nicht die günstigste, d. h. es gibt i. allg. noch Maximalfunktionen mit echt grösserem Kern. (Wenn z. B.  $X$  ein diskreter Raum ist, genügt es,  $Y$  einelementig zu wählen.) Die Vermutung jedoch, dass ein Wertebereich existiert, welcher sich in die Wertebereiche aller Maximalfunktionen von  $X$  isomorph einbetten lässt, wird durch folgendes Beispiel widerlegt: Sei  $N$  die Menge der

<sup>1)</sup> E. SZPILRAJN, *Sur l'extension de l'ordre partiel*, Fund. Math. 16, 386–389 (1930).

natürlichen Zahlen und  $X = \{x_i | i \in N\} \oplus \{y_i | i \in N\}$ ; eine Basis der Topologie  $\mathfrak{X}$  seien die Mengen  $\{x_i | i \leq n\}$ ,  $\{x_0\} \cup \{y_i | i \in N\}$ ,  $\{y_i | i > n\}$  für  $n \in N$ . Damit ist  $X$  ein  $M$ -Raum, man setze nur  $V(x) = \bigcap_{x \in U \in \mathfrak{X}} U$  für jedes  $x \in X$ . Es ist dann  $x_i \sqsubset x_{i+1}$ ,  $x_0 \sqsubset y_0$ ,

$y_{i+1} \sqsubset y_i$  für jedes  $i$ . Jede Maximalfunktion  $f$  muss nun die  $x_i$  auf eine geordnete Menge vom Typ  $\omega$ , die  $y_i$  auf eine Menge vom Typ  $\omega^*$  abbilden, und es muss  $f(x_0) < f(y_0)$  sein. Daher enthält jeder Wertebereich Mengen vom Typ  $\omega^* + \omega$  oder  $\omega + \omega^*$ , und es ist dann klar, dass es keinen gibt, der sich in alle anderen isomorph einbetten lässt.

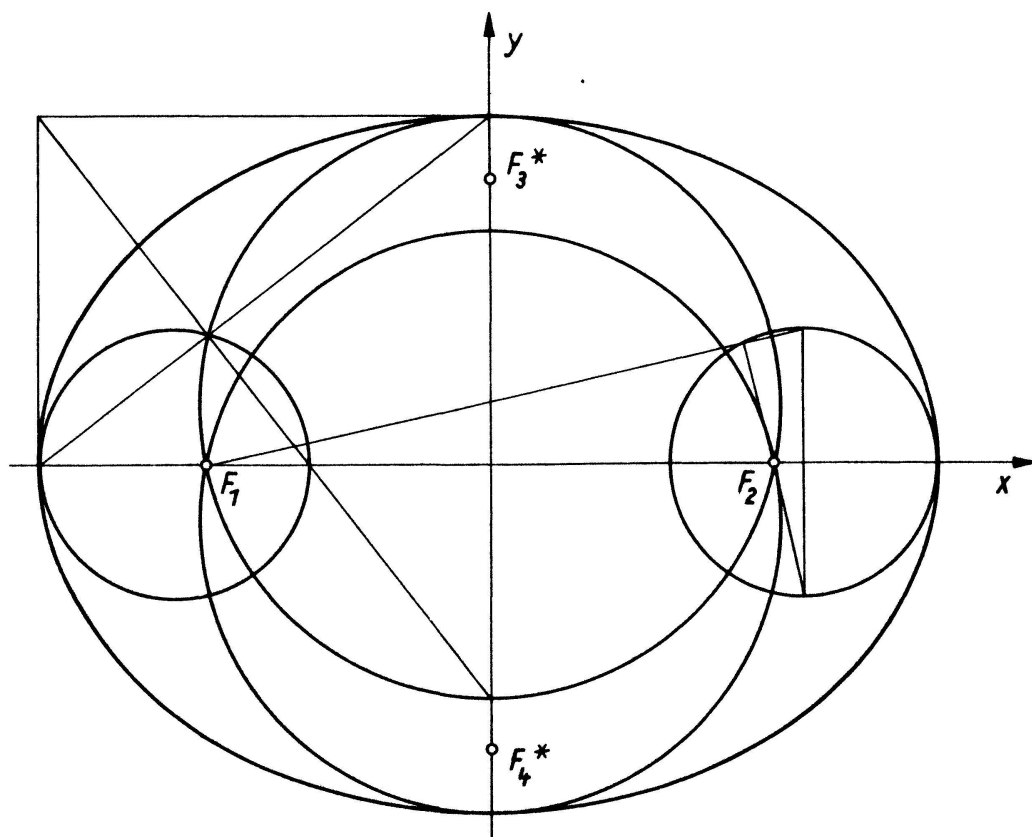
Satz 2 lässt noch folgende einfache Verallgemeinerung zu:

**Satz 3.** *Zu einem topologischen Raum  $X$  existiert genau dann eine irreflexive Totalordnung  $Y$  und eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$ , welche in jedem Punkt ein lokales Extremum besitzt, wenn eine Partition von  $X$  in zwei  $M$ -Räume existiert.*

*Beweis.* Die Notwendigkeit des Kriteriums ist wieder trivial; sei nun  $X = X_1 \oplus X_2$  eine Partition in  $M$ -Räume, dann existieren Maximalfunktionen  $f_i: X_i \rightarrow Y_i$ ,  $i = 1, 2$ . Sei  $Y = Y_1^* \oplus Y_2$ , wobei  $Y_1^*$  die inverse Ordnung von  $Y_1$  ist; setzt man noch  $y_1 < y_2$  für alle  $y_1 \in Y_1$  und alle  $y_2 \in Y_2$ , so hat man durch die  $f_i$  eine Funktion auf  $X$  definiert, welche in jedem Punkt extremal ist. M. W. RICHTER und J. SPILKER, Freiburg/Br.

### Eigenschaften gewisser Scheitelkreise einer Ellipse bezüglich ihrer Brennpunkte

Sind von einer Ellipse Haupt- und Nebenachse gegeben, so gelangt man bekanntlich zu den Zentren der Scheitelkrümmungskreise, indem man zwei Halbachsen zu einem Rechteck ergänzt, die auf der Ellipse liegenden Eckpunkte des Rechtecks (Scheitelpunkte der Ellipse) miteinander verbindet und dann von dem ausserhalb der Ellipse liegenden Eckpunkt das Lot auf die eingezeichnete Diagonale fällt. Die Schnittpunkte des Lotes mit der Haupt- und Nebenachse sind die Mittelpunkte der zu den betreffenden Scheitelpunkten gehörigen Scheitelkrümmungskreise.



Es sollen nun jene Kreise betrachtet werden, die aus den Scheitelkrümmungskreisen durch zentrische Stauchung mit dem Faktor  $1/2$  bezüglich der betreffenden Scheitelpunkte als Ähnlichkeitszentren hervorgehen. Die dadurch entstehenden Kreise bezeichnen wir im folgenden als gestauchte Scheitelkrümmungskreise.

In der Ellipsengleichung  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $a > b$  vorausgesetzt werden. Dabei ist zunächst der Fall  $a = b \sqrt{2}$  auszuschliessen.

Für die gestauchten Hauptscheitelkrümmungskreise gelten die Gleichungen

$$\left[ x \mp \left( a - \frac{b^2}{2a} \right) \right]^2 + y^2 = \frac{b^4}{4a^2}. \quad (1)$$

Für die gestauchten Nebenscheitelkrümmungskreise gelten die Gleichungen

$$x^2 + \left[ y \mp \left( b - \frac{a^2}{2b} \right) \right]^2 = \frac{a^4}{4b^2}. \quad (2)$$

Wie nun eine elementare Rechnung zeigt, *schneiden sich die gestauchten Hauptscheitelkrümmungskreise in den imaginären Brennpunkten der Ellipse.*

Führt man weiterhin eine beliebige der Gleichungen (1) in die zugehörige Polarform über und setzt darin  $y = 0$ , so wird durch die gefundene Gleichung

$$(2ax \mp 2a^2 \pm b^2)(2a\bar{x} \mp 2a^2 \pm b^2) = b^4 \quad (3)$$

auf der  $x$ -Achse eine Punktinvolution induziert. Setzt man in Gleichung (3)  $x = e$  und  $\bar{x} = -e$ , so ist die Gleichung erfüllt. Folglich gilt:

*Die reellen Brennpunkte  $F_1$  und  $F_2$  der Ellipse sind ein Punktepaar der durch Gleichung (3) gegebenen Involution. Sie liegen invers bezüglich der gestauchten Hauptscheitelkrümmungskreise.*

Ganz analog ergeben sich aus elementaren Rechnungen mit den Gleichungen (2) folgende Sätze: *Die gestauchten Nebenscheitelkrümmungskreise schneiden sich in den reellen Brennpunkten der Ellipse. Die imaginären Brennpunkte liegen invers bezüglich dieser Kreise.* Nach diesen Feststellungen kann man die gestauchten Nebenscheitelkrümmungskreise als Elemente eines elliptischen Kreisbüschels ansehen, die sämtlich die beiden gestauchten Hauptscheitelkrümmungskreise orthogonal schneiden. Dieses Kreisbüschel schneidet auf der  $y$ -Achse eine elliptische Punktinvolution mit den imaginären Brennpunkten  $F_3$  und  $F_4$  als Fixpunkte aus. Bezüglich der reellen Brennpunkte der Ellipse ist diese Punktinvolution eine Rechtwinkelinvolution.

Entsprechend hierzu können die gestauchten Hauptscheitelkrümmungskreise als Elemente des ergänzenden hyperbolischen Kreisbüschels angesehen werden. Die Nullkreise dieses Büschels fallen in die reellen Brennpunkte der Ellipse.

In dem zunächst ausgeschlossenen Fall  $a = b\sqrt{2}$  decken sich die beiden gestauchten Nebenscheitelkrümmungskreise. Der doppelt zählende Kreis schneidet die  $x$ -Achse in den reellen Brennpunkten und die  $y$ -Achse in den reellen Vertretern der imaginären Brennpunkte der Ellipse.

Mit diesen Ausführungen ist gezeigt: *Identifiziert man die vier Grundpunkte sich ergänzender Kreisbüschel mit den Brennpunkten einer konfokalen Ellipsenschar, so stellen die gestauchten Scheitelkrümmungskreise zu jeder Ellipse dieser Schar zwei Kreispaare aus den ergänzenden Kreisbüscheln dar.*

Analoge Überlegungen lassen sich für die Hyperbel durchführen. Im Sonderfall der Parabel fällt der eigentliche Brennpunkt in den Mittelpunkt des gestauchten Scheitelkrümmungskreises. Für eine Schar konfokaler Parabeln bildet die Gesamtheit der gestauchten Scheitelkrümmungskreise eine Schar konzentrischer Kreise. Auch in diesem Sonderfall sind die oben abgeleiteten Lagebeziehungen zwischen den Brennpunkten der Parabelschar und den Trägerpunkten der Kreisbüschel erfüllt. E. SCHRÖDER, Dresden