

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 23 (1968)  
**Heft:** 4

**Artikel:** Netzprojektion eines Tetraeders  
**Autor:** Klix, W.-D.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-26031>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

also die Berührungspunkte von  $m^c$  mit  $u^c$ . Berührende Parallelkreisbilder sind aber leicht zu finden, da die Tangenten an alle Kreise  $p^{\varepsilon 0}$  in ihren Schnittpunkten mit  $m^{\varepsilon 0}$  dieselbe Richtung haben. Figur 3 zeigt nach dieser Methode die Umrisspunkt-konstruktion für den gegebenen Meridian  $m$ ; die erwähnte Tangentenrichtung ist in diesem Fall normal zu  $e$ . Man sucht also jenen Punkt  $V^{\varepsilon 0}$  von  $m^{\varepsilon 0}$  auf, dessen Tangente normal zu  $e$  ist, unterwirft ihn der Kollineation  $\mathfrak{R}^{-1}$  und erhält den Umrisspunkt  $V^c$  von  $m^c$ .

JOSEF P. TSCHUPIK, Graz

## Netzprojektion eines Tetraeders

Bei einer *Netzprojektion* des  $P_3$  auf eine Bildebene werden als Abbildungsmittel die  $\infty^2$  Geraden eines Strahlnetzes benutzt. Durch spezielle Wahl der Leitgeraden dieses abbildenden Netzes kann erreicht werden, dass die Bilder von Raumgeraden entweder Kreise oder Parabeln mit fester Achsenrichtung sind; es handelt sich dann um eine *spezielle elliptische* bzw. eine *spezielle parabolische Netzprojektion*. Die bekannten – z. B. in [9] dargestellten – Beziehungen zwischen der elliptischen Netzprojektion eines Tetraeders und der MIQUELSchen *Kreisfigur* werden durch Heranziehung einer speziellen parabolischen Netzprojektion zu Aussagen über gewisse *Parabelfiguren* der Ebene erweitert. Dies erscheint aus zwei Gründen mitteilenswert: Einmal wird ein weiteres Beispiel dafür gegeben, wie Aussagen über ebene Figuren durch räumliche Betrachtungen gewonnen werden können. Zum anderen werden durch das gleiche Prinzip, nämlich verschiedene Netzprojektionen, gleichberechtigt nebeneinander stehende Sachverhalte in der Bildebene erhalten, die sich durch rein planimetrische Überlegungen nicht ohne weiteres ineinander überführen zu lassen scheinen. – In den ersten drei Abschnitten werden einige benötigte Eigenschaften der Netzprojektion bereitgestellt.

1. Die Netzprojektion [1–4] ist eine auf J. STEINER zurückgehende *Abbildung des dreidimensionalen projektiven Raumes  $P_3$  auf eine Bildebene  $\pi$* , bei der als Abbildungsmittel die Geraden eines Strahlnetzes  $\mathfrak{R}$ , also einer linearen Strahlkongruenz verwendet werden. Je nach der Art des abbildenden Netzes soll auch die Netzprojektion *hyperbolisch*, *elliptisch* oder *parabolisch* heißen; die Bildebene  $\pi$  enthalte keine Leitgerade von  $\mathfrak{R}$ . Das Bild  $P'$  bzw.  $\varepsilon'$  eines Punktes  $P$  bzw. einer Ebene  $\varepsilon$  wird erklärt als der Schnittpunkt von  $\pi$  mit der mit  $P$  bzw.  $\varepsilon$  inzidierenden Netzgeraden  $n_P$  bzw.  $n_\varepsilon$ . Das Bild  $g'$  einer Geraden  $g$  ist die Gesamtheit der Spurpunkte der die Gerade  $g$  treffenden Netzgeraden. Da diese Netzgeraden einen Regulus  $\mathfrak{R}_g$  bilden, ist  $g'$  i. allg. ein Kegelschnitt durch die beiden Spurpunkte der Leitgeraden von  $\mathfrak{R}$  in  $\pi$ , die im parabolischen Fall durch ein Linienelement zu ersetzen sind.

**Satz 1.** *Jeder Punkt von  $\pi$  ist gleichzeitig Bildpunkt der  $\infty^1$  auf der durch ihn gehenden Netzgeraden liegenden Punkte und der  $\infty^1$  durch diese Netzgerade gehenden Ebenen. Jeder durch die Spurpunkte der Leitgeraden von  $\mathfrak{R}$  gehende Kegelschnitt von  $\pi$  ist Bild der  $\infty^1$ -Geraden, die zu dem  $\mathfrak{R}$  angehörenden Regulus durch diesen Kegelschnitt konjugiert sind.*

Die Spurkurve von  $\mathfrak{R}_g$  zerfällt in zwei Geraden, wenn die in  $\pi$  liegende Netzgerade  $n_\pi$  diesem Regulus angehört.

Daher gilt der

**Satz 2.** *Jede Treffgerade  $h$  von  $n_\pi$  geht bei Netzprojektion in eine Gerade  $h'$  von  $\pi$  über. Die zweite zum Netzbild gehörende Gerade ist  $n_\pi$ .*

Aus den eben dargestellten Eigenschaften der Netzprojektion folgt für zwei sich schneidende Geraden der

**Satz 3.** a) *Ist  $S$  der Schnittpunkt zweier Geraden  $a'$  und  $b$  einer Ebene  $\varepsilon$ , dann schneiden sich die Bildkegelschnitte  $a'$  und  $b'$  ausser in den Spurpunkten  $L_1, L_2$  der Leitgeraden von  $\mathfrak{R}$  in zwei weiteren Punkten, von denen der eine der Bildpunkt  $S'$  von  $S$  und der andere der Bildpunkt  $\varepsilon'$  von  $\varepsilon$  ist.*

b) *Schneiden sich  $a$  und  $b$  nicht, dann sind die von  $L_1$  und  $L_2$  verschiedenen Schnittpunkte der Bilder  $a'$  und  $b'$  die Spurpunkte der beiden Netzgeraden, die sowohl  $a$  als auch  $b$  treffen; es gibt genau zwei solche Netzgeraden, da  $b$  den Regulus  $\mathfrak{R}_a$  in zwei Punkten schneidet und umgekehrt.*

2. Durch besondere Wahl des Netzes  $\mathfrak{R}$  kann bei reeller affiner Bildebene  $\pi$  erreicht werden, dass die Bilder der Geraden des  $P_3$  nur gewisse Kegelschnitte sind. Es treten z. B. *gleichseitige Hyperbeln, Kreise bzw. Parabeln mit gemeinsamer Achsenrichtung* als Bildkegelschnitte auf, wenn die Geraden mittels einer geeigneten, im folgenden *speziell* genannten hyperbolischen, elliptischen bzw. parabolischen Netzprojektion abgebildet werden. Zu diesem Zweck wird die Bildebene  $\pi$  zunächst durch eine *uneigentliche Gerade  $u$*  projektiv abgeschlossen. Die Leitgeraden werden so gewählt, dass ihre Spurpunkte in  $\pi$ , durch die die Bildkegelschnitte der Geraden gehen, uneigentliche Punkte von  $\pi$  werden;  $u$  ist dann die in  $\pi$  liegende Netzgerade  $n_\pi$ . Die Bildpunkte von Punkten bzw. Ebenen, deren abbildende Netzgerade  $n_\pi$  ist, sind unbestimmt. Es liegt daher nahe, die Punkte von  $n_\pi$  als *den uneigentlichen Punkt* von  $\pi$  zu definieren, d. h. die Bildebene  $\pi$  nicht projektiv, sondern *konform abzuschliessen*. Ob die Bildebene als projektiv oder konform abgeschlossen aufzufassen ist, wird im folgenden der jeweiligen Problemstellung angepasst.

Fasst man die uneigentlichen Spurpunkte der Leitgeraden von  $\mathfrak{R}$  in  $\pi$  als die *Fundamentalphunkte einer Metrik* in der Bildebene bei den jeweiligen speziellen Netzprojektionen auf, dann liegt in  $\pi$  eine *pseudoeuklidische, euklidische bzw. isotrope Metrik* vor [7, 8]. Da die Bilder der Geraden Kegelschnitte durch diese Fundamentalphunkte sind, lässt sich zusammenfassend der folgende Satz aussprechen:

**Satz 4.** *Liegt eine spezielle Netzprojektion vor, d. h. ist die in  $\pi$  liegende Netzgerade  $n_\pi$  die uneigentliche Gerade  $u$  von  $\pi$ , dann gehen die Geraden des  $P_3$  in die «Kreise» der Bildebene über, wenn die Spurpunkte der Leitgeraden von  $\mathfrak{R}$  als Fundamentalphunkte einer Metrik in  $\pi$  angesehen werden.*

Eine spezielle hyperbolische Netzprojektion liegt somit vor, wenn die Spurpunkte der Leitgeraden von  $\mathfrak{R}$  bez. der absoluten Kreispunkte von  $\pi$  harmonisch liegen; die Bilder der Geraden sind gleichseitige Hyperbeln bzw. die *pseudoeuklidischen Kreise* dieser Bildebene mit pseudoeuklidischer Metrik. Bei spezieller elliptischer Netzprojektion werden die absoluten Kreispunkte von  $\pi$  als die Spurpunkte der Leitgeraden von  $\mathfrak{R}$  gewählt, so dass  $\mathfrak{R}$  ein (Rechts- oder Links-) Drehnetz ist. Die Metrik

in  $\pi$  ist dann euklidisch, die Bilder der Geraden sind daher gewöhnliche *euklidische Kreise*. Eine spezielle parabolische Netzprojektion bildet die Geraden des  $P_3$  auf die Parabeln mit der Achsenrichtung  $U$  ab, wobei der uneigentliche Punkt  $U$  der Spurpunkt der Leitgeraden des abbildenden parabolischen Netzes ist. Durch das Linienelement  $(U, u)$  wird in  $\pi$  eine isotrope Metrik bestimmt, und die Parabeln durch  $U$  werden daher als die *isotropen Kreise* in  $\pi$  bezeichnet.

3. Im folgenden sollen die Grundzüge einer parabolischen Netzprojektion dargestellt werden, da wegen des Zusammenfallens der Leitgeraden einige Besonderheiten auftreten [3]. Ein parabolisches Strahlnetz  $\mathfrak{N}_p$  mit der doppelt zu zählenden Leitgeraden  $l$  ergibt sich, wenn zwischen der Punktreihe  $l$  und dem Ebenenbüschel  $l$  eine *Korrelation*  $\mathfrak{F}$  erklärt wird; die Netzgeraden gehören dann solchen Geradenbüscheln an, deren Trägerpunkt und Trägerebene durch  $\mathfrak{F}$  einander entsprechen. Die in  $\pi$  liegende Netzgerade  $n_\pi$  ist die Schnittgerade der dem Spurpunkt  $L$  von  $l$  bei  $\mathfrak{F}$  entsprechenden Ebene mit  $\pi$ . Punkte bzw. Ebenen, die weder mit  $l$  noch mit  $n_\pi$  inzidieren, heißen allgemeine Punkte bzw. Ebenen; Geraden, die weder  $l$  noch  $n_\pi$  treffen, heißen allgemeine Geraden. Die mit dem allgemeinen Punkt  $P$  inzidierende Netzgerade  $n_P$  ist die Verbindungsgerade von  $P$  mit dem der Ebene  $P l$  durch  $\mathfrak{F}$  entsprechenden Punkt von  $l$ . Dual dazu ist die mit der allgemeinen Ebene  $\varepsilon$  inzidierende Netzgerade  $n_\varepsilon$  die Schnittgerade von  $\varepsilon$  mit der dem Punkt  $\varepsilon l$  durch  $\mathfrak{F}$  zugeordneten Ebene durch  $l$ . Das Bild  $g'$  einer allgemeinen Geraden  $g$  ist im hyperbolischen Fall ein Kegelschnitt durch die Spurpunkte  $L_1$  und  $L_2$  der Leitgeraden des hyperbolischen Netzes  $\mathfrak{N}_h$ . Da  $\mathfrak{N}_p$  als Grenzfall von  $\mathfrak{N}_h$  aufgefasst werden kann, wobei die getrennten Spurpunkte  $L_1, L_2$  der Leitgeraden von  $\mathfrak{N}_h$  in den Spurpunkt  $L$  der Leitgeraden  $l$  von  $\mathfrak{N}_p$  zusammengerückt sind und dort das Linienelement  $(L, n_\pi)$  bilden, gilt der

**Satz 5.** *Die Bilder  $g'$  aller allgemeinen Geraden  $g$  sind bei parabolischer Netzprojektion Kegelschnitte mit dem gemeinsamen Linienelement  $(L, n_\pi)$ .*

Die oben erwähnte spezielle parabolische Netzprojektion ergibt sich z. B., wenn eine Ferngerade des  $P_3$  als Leitgerade  $l$  von  $\mathfrak{N}_p$  gewählt und deren Spurpunkt  $L = U$  in  $\pi$  durch  $\mathfrak{F}$  die Fernebene des  $P_3$  zugeordnet wird. Dann ist die Ferngerade  $u$  von  $\pi$  die in  $\pi$  liegende Netzgerade  $n_\pi$ , und es gilt daher der

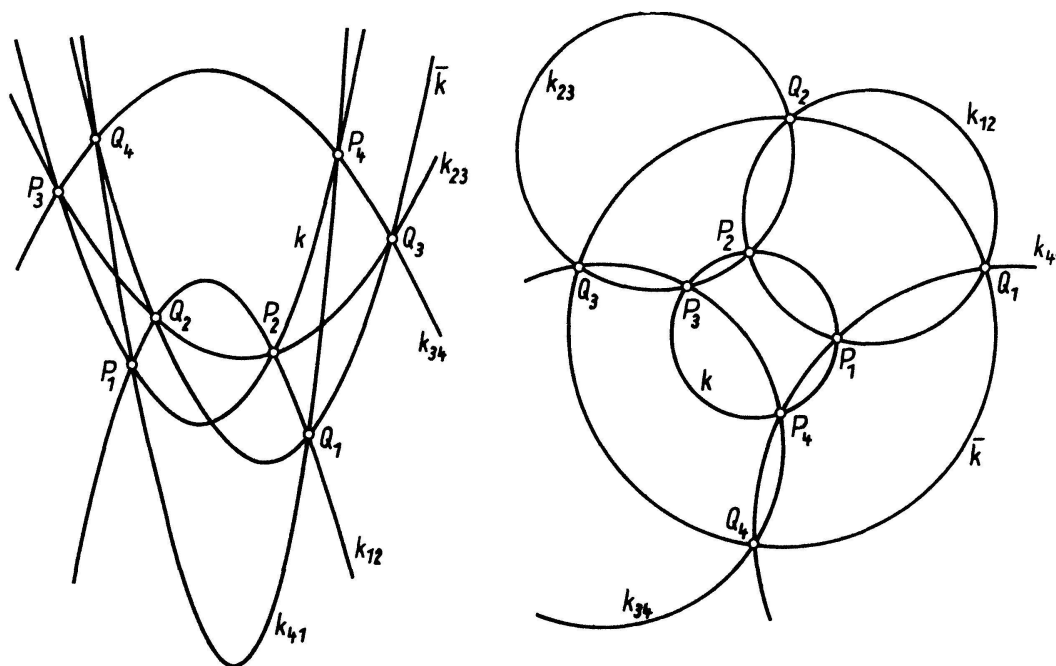
**Satz 6.** *Die Bilder  $g'$  aller allgemeinen Geraden  $g$  sind bei spezieller parabolischer Netzprojektion Parabeln mit der gemeinsamen Achsenrichtung  $U$ .*

Bemerkung: Eine weitere mögliche spezielle parabolische Netzprojektion, die hier nicht verwendet wird, ergibt sich, wenn die Leitgerade  $l$  des Netzes zu  $\pi$  parallel ist und die Korrelation  $\mathfrak{F}$  dem Fernpunkt  $U$  von  $l$  die durch  $l$  gehende Parallelebene von  $\pi$  zuordnet.

4. Die hier aufgezeigten Zusammenhänge zwischen spezieller elliptischer bzw. spezieller parabolischer Netzprojektion und der euklidischen bzw. isotropen Metrik der Bildebene sollen an anderer Stelle ausführlicher behandelt werden. Hier sollen diese beiden Projektionen nur benutzt werden, um die Punkte, Geraden und Ebenen von *Tetraedern* des  $P_3$  in  $\pi$  abzubilden. Die bereits bekannten Beziehungen zwischen der *Netzprojektion eines Tetraeders* mittels eines Drehnetzes und der *MIQUELSchen Kreisfigur* ([9]) werden hier nochmals zusammengestellt und gleichzeitig durch die Heranziehung der speziellen parabolischen Netzprojektion auf die *isotrope Ebene* übertragen, bzw. es werden neue Sätze über gewisse *Parabelfiguren der euklidischen Ebene*

ausgesprochen. Dazu ist es vorteilhaft, sowohl die euklidischen Kreise als auch die Parabeln mit einer gemeinsamen Achsenrichtung (in den Bildern lotrecht angenommen), die als isotrope Kreise aufgefasst werden können, als «Kreise» zu bezeichnen. – Um im folgenden unwesentliche Fallunterscheidungen im parabolischen Fall zu vermeiden, wird vorausgesetzt, dass die Kanten des abzubildenden Tetraeders die Leitgerade  $l$  von  $\mathfrak{N}$  nicht treffen. Wenn man ein räumliches kartesisches Koordinatensystem so annimmt, dass  $\pi$  dessen  $xy$ -Ebene und die uneigentliche Leitgerade  $l$  die Ferngerade der  $yz$ -Ebene sind, bedeutet das, dass keine Tetraederkante parallel zur  $yz$ -Ebene verläuft. Ein solches Tetraeder soll *allgemein* heissen. Das Bild eines allgemeinen Tetraeders  $\mathfrak{T}$  des  $P_3$  ist eine Figur  $\mathfrak{T}'$  in  $\pi$ , die den 4 Ecken, 6 Kanten und 4 Ebenen von  $\mathfrak{T}$  entsprechend aus 6 «Kreisen» und 8 Punkten besteht. Da jede Kante von  $\mathfrak{T}$  mit zwei Ebenen und zwei Eckpunkten inzidiert, wird jeder «Kreis» von  $\mathfrak{T}'$  genau 4 Punkte enthalten und durch jeden Punkt von  $\mathfrak{T}'$  werden genau 3 «Kreise» gehen, da mit jeder Ebene und mit jedem Eckpunkt von  $\mathfrak{T}$  jeweils 3 Kanten inzidieren. Diese Figur  $\mathfrak{T}'$  beschreibt der folgende

**Satz 7.** Wählt man auf einem «Kreis»  $k$  vier Punkte  $P_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) und zeichnet durch die Punkte  $P_i$  und  $P_j$  einen «Kreis»  $k_{ij}$  ( $ij = 12, 23, 34, 41$ ), dann liegen die vier von  $P_i$  verschiedenen Schnittpunkte  $Q_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) der «Kreise»  $k_{1i}$  und  $k_{ij}$  auf einem «Kreis»  $\bar{k}$  (Figur 1).



Figur 1

Im euklidischen Fall ist diese Figur unter dem Namen *MIQUELSche Kreisfigur* in der Literatur bekannt [9].

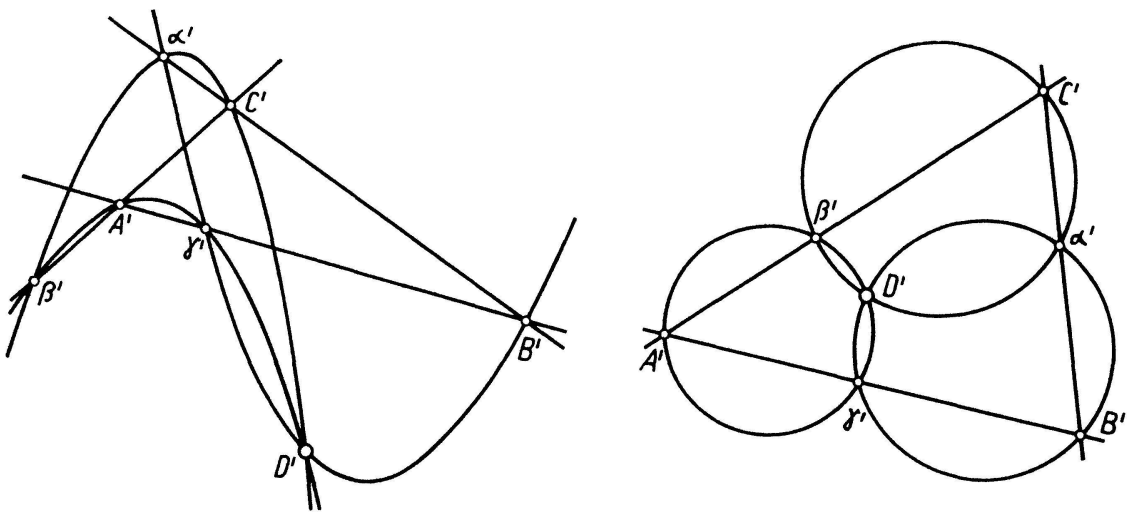
Die Bezeichnungen in den Sätzen 7 und 9 stimmen der übersichtlicheren Formulierung wegen nicht mit den üblichen Bezeichnungen von  $\mathfrak{T}$  überein.

5. Aus den Eigenschaften der Netzprojektion, insbesondere aus Satz 1, folgt, dass es  $\infty^1$  verschiedene Tetraeder mit dem gleichen Bild  $\mathfrak{T}'$  in  $\pi$  gibt. Es sind dies die  $\infty^1$  Tetraeder, die durch eine Kollineation des  $P_3$  mit den Leitgeraden von  $\mathfrak{N}$  als Achsen

auseinander hervorgehen. Ungeachtet dieser in diesem Zusammenhang unwesentlichen Vieldeutigkeit gibt es Tetraeder, die bez.  $\pi$  spezielle Lage haben. Auf diese Sonderlagen von  $\mathfrak{T}$  und die sich daraus ergebenden Sonderfälle der MIQUELSchen «Kreis»-Figur  $\mathfrak{T}'$  soll näher eingegangen werden.

Ist z. B. die Ebene  $\delta$  von  $\mathfrak{T}$  parallel zu  $\pi$ , dann gehen die drei Kanten  $a, b, c$  von  $\delta$  bei spezieller Netzprojektion nach Satz 2 in Geraden von  $\pi$  über. Drei «Kreise» von  $\mathfrak{T}'$  des allgemeinen Falles arten daher in Geraden aus, es ergibt sich also der

**Satz 8.** Wählt man auf den drei Seiten  $a', b', c'$  eines Dreiecks  $A' B' C'$  bzw. die beliebigen Punkte  $\alpha', \beta', \gamma'$ , dann schneiden sich die «Kreise» durch  $A', \beta', \gamma'$ ;  $B', \gamma', \alpha'$  und  $C', \alpha', \beta'$  in einem Punkt  $D'$  (Figur 2).



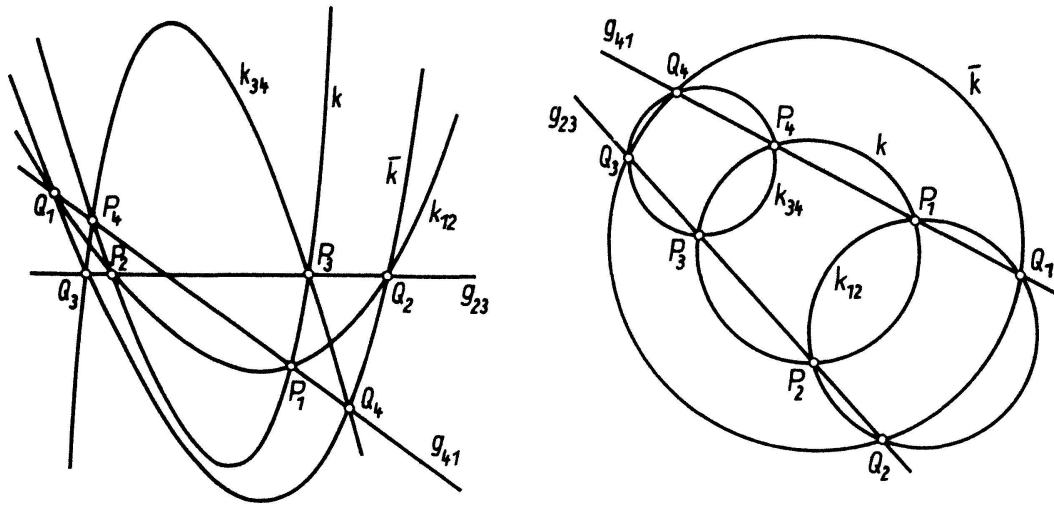
Figur 2

Bemerkung: Der Punkt  $\delta'$  ist hier der Fernpunkt von  $\pi$ , da die Ebene des Dreiecks  $ABC$  zur Bildebene parallel ist;  $\delta'$  gehört wegen des konformen Abschlusses von  $\pi$  allen drei Geraden des Dreiecks  $ABC$  an.

Aus den in Satz 8 gewählten Bezeichnungen geht der Zusammenhang zwischen dem Tetraeder  $\mathfrak{T}$  und dessen Bild  $\mathfrak{T}'$  deutlich hervor.

Da es möglich ist, dass nur eine Kante von  $\mathfrak{T}$  zur Bildebene parallel ist, kann in der MIQUELSchen «Kreis»-Figur ein «Kreis» in eine Gerade ausarten. Sind jedoch genau zwei Kanten von  $\mathfrak{T}$  zu  $\pi$  parallel, dann müssen diese in  $\mathfrak{T}$  einander gegenüberliegen, d. h. zueinander windschief sein. Die zugehörige «Kreis»-Figur  $\mathfrak{T}'$  ergibt sich daher aus der des Satzes 7, wenn entweder  $k$  und  $\bar{k}$  oder  $k_{12}$  und  $k_{34}$  oder  $k_{23}$  und  $k_{41}$  in Geraden entarten. Das entstehende Bild  $\mathfrak{T}'$  lässt sich auch in dem Satz beschreiben:

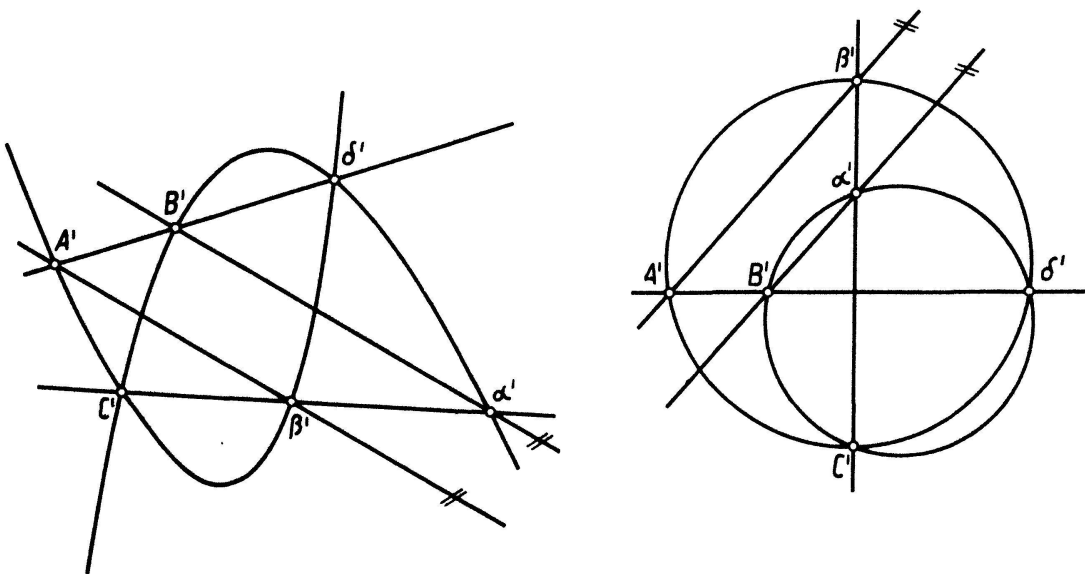
**Satz 9.** Auf dem «Kreis»  $k$  seien 4 Punkte  $P_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) festgelegt. Zeichnet man durch  $P_i$  und  $P_j$  einen «Kreis»  $k_{ij}$  ( $ij = 12, 34$ ) bzw. die Gerade  $g_{ij}$  ( $ij = 23, 41$ ), dann schneiden die Geraden  $g_{ii}$  die «Kreise»  $k_{ij}$  ausser in  $P_i$  in den Punkten  $Q_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) eines «Kreises»  $\bar{k}$  (Figur 3).



Figur 3

Wenn ein Punkt von  $\mathfrak{T}$  Fernpunkt wird, ergibt sich im allgemeinen Fall nichts Neues, da das Netzbild eines Fernpunktes i. allg. ein endlicher Punkt von  $\pi$  ist. Von Interesse sind hier nur die Fälle, wo zu  $\pi$  parallele Kanten auftreten, d.h. der Fernpunkt von  $\mathfrak{T}$  auf  $u$  liegt. Dabei ist es möglich, dass keine oder nur eine Seite des im Endlichen liegenden Tetraederdreiecks parallel  $\pi$  ist; dass mindestens zwei Seiten dieses Dreiecks parallel  $\pi$  sind, kann nicht eintreten, da  $\mathfrak{T}$  in diesem Fall in eine zu  $\pi$  parallele Ebene ausarten würde. Im ersten möglichen Fall besteht  $\mathfrak{T}'$  aus drei «Kreisen», drei Geraden und 8 Punkten. Die entstehende Figur ist die gleiche wie in Satz 8, nur sind hier die Bedeutungen der Punkte als Bilder von Punkten bzw. Ebenen des Tetraeders vertauscht. Der zweite mögliche Fall ist ein Sonderfall des ersten, da ein weiterer «Kreis» in eine Gerade ausartet. Das entstehende Bild  $\mathfrak{T}'$  lässt sich in Form des elementargeometrisch sehr leicht zu beweisenden Satzes aussprechen:

**Satz 10.** *Legt man durch die Schnittpunkte zweier «Kreise» je eine Gerade und schneidet diese mit den beiden «Kreisen», dann ist die Verbindungsgerade der entstehenden Schnittpunkte auf dem einen «Kreis» zu der der entsprechenden Punkte auf dem anderen «Kreis» parallel (Figur 4).*

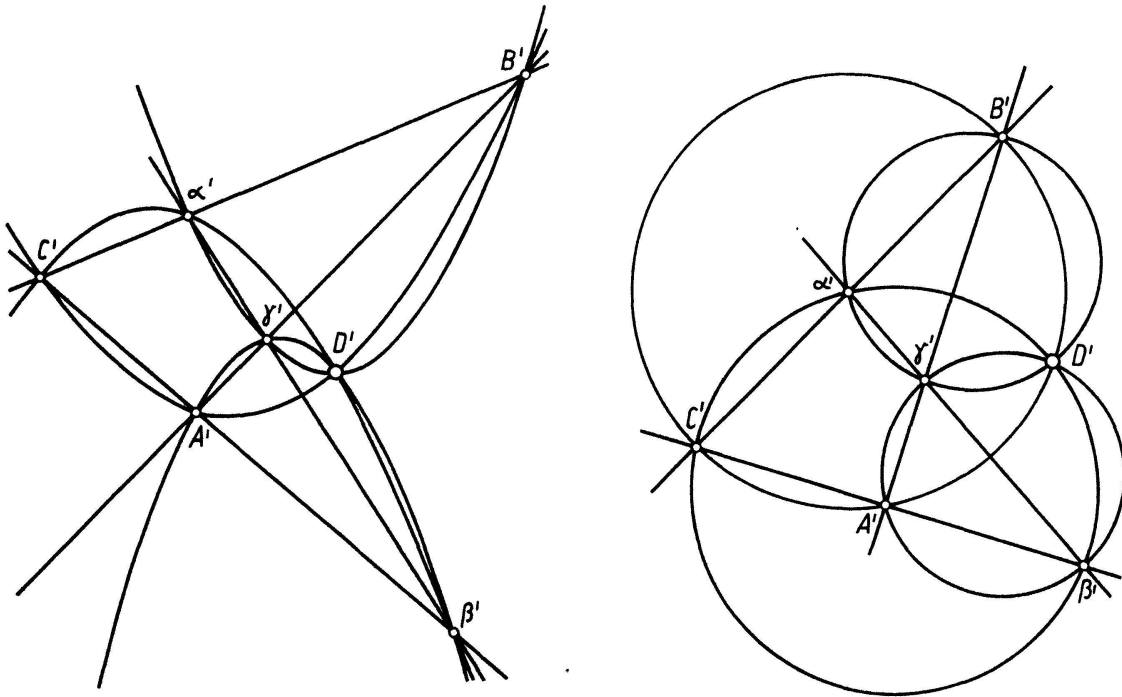


Figur 4

6. Bei gewisser Lage des Tetraeders  $\mathfrak{T}$  im Raum gilt für sein Netzbild  $\mathfrak{T}'$  der

**Satz 11.** *Liegen die Bildpunkte der 4 Eckpunkte von  $\mathfrak{T}$  auf einem «Kreis», dann auch die Bildpunkte der 4 Ebenen von  $\mathfrak{T}$  und umgekehrt. Es ergibt sich somit für  $\mathfrak{T}'$  eine Konfiguration von 8 Punkten und 8 «Kreisen», wobei mit jedem «Kreis» 4 Punkte und mit jedem Punkt 4 «Kreise» inzidieren.*

Beweis (vgl. auch [9]): Wenn die 4 Bildpunkte der Eckpunkte von  $\mathfrak{T}$  auf einem «Kreis» liegen, dann haben die sie abbildenden Netzgeraden hyperboloidische Lage, d.h. sie gehören der gleichen Regelschar an. Nach einem auf M. CHASLES zurückgehenden, in [5] und [6] bewiesenen Satz gilt, dass mit den Verbindungsgeraden ent-



Figur 5

sprechender Punkte zweier Tetraeder stets auch die Schnittgeraden entsprechender Ebenen dieser Tetraeder *hyperboloidische Lage* haben. Da die Verbindungsgeraden der Eckpunkte zweier Tetraeder mit dem gleichen Bild  $\mathfrak{T}'$  aber die diese Eckpunkte abbildenden Netzgeraden sind, gilt bei hyperboloidischer Lage dieser Netzgeraden, dass dann auch die die Ebenen abbildenden Netzgeraden hyperboloidische Lage haben, d.h. deren Spurpunkte liegen auf einem «Kreis». – Die Umkehrung des Satzes folgt analog.

Als Sonderfall dieses Satzes ergibt sich aus Satz 8: Wenn die Punkte  $\alpha'$ ,  $\beta'$  und  $\gamma'$  auf einer Geraden liegen (der vierte Punkt  $\delta'$  ist dann uneigentlicher Punkt), dann liegen die Punkte  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  und  $D'$  auf einem «Kreis». D.h. es gilt der

**Satz 12.** *Die vier Um-«Kreise» der möglichen Teildreiecke eines vollständigen Vierseits schneiden sich in einem Punkt (Figur 5).*

W.-D. KLIX, Dresden



## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] BEREIS, R., *Über das Raumbild eines ebenen Zwanglaufes (kinematische Abbildung von Blaschke und Grünwald)*, Wiss. Z. TU Dresden 13, 7–16 (1964). – Hier findet sich auch weitere Literatur über Netzprojektion, z. B. [2] und [4].
- [2] BEREIS, R. und H. BRAUNER, *Schraubung und Netzprojektion*, El. Math. 12, 33–40 (1957).
- [3] BEREIS, R. und W. D. KLIX, *Parabolische Netzprojektion*, Wiss. Z. TU Dresden 15, 453–458 (1966).
- [4] ECKHART, L., *Konstruktive Abbildungsverfahren* (Wien 1926).
- [5] HERMES, O., *Über homologe Tetraeder*, Crelles Journal 56, 222 (1859).
- [6] SCHUR, F., *Über besondere Lagen zweier Tetraeder*, Math. Ann. 19, 429–432 (1881).
- [7] STRUBECKER, K., *Geometrie in einer isotropen Ebene*, Math.-nat. Unterr. 15 (1962).
- [8] STRUBECKER, K., *Über Parabeln 2. bis 4. Ordnung*, Praxis d. Math. 4 (1962).
- [9] STRUBECKER, K., *Über eine Kreisfigur*, Crelles Journal 169, 79–86 (1933).

On the Coloring of Signed Graphs<sup>1)</sup>

A *graph*  $G$  consists of a finite set of points  $V(G)$  together with a prescribed subset of the collection of all lines, i. e., unordered pairs of distinct points. A *signed graph*  $S$  is obtained from a graph  $G$  when each line of  $G$  is designated either positive or negative. An  *$n$ -coloring of  $G$*  is a partition of the point set  $V(G)$  into  $n$  subsets (called color sets) such that every two points joined by a line are in different color sets. An  *$n$ -coloring of  $S$*  is a partition of  $V(S)$  into  $n$  subsets such that (1) every two points joined by a negative line are in different color sets and (2) every two points joined by a positive line are in the same color set. We say that  $S$  has a *coloring*, or is *colorable*, if it has an  $n$ -coloring for some  $n$ . It follows immediately from these definitions that if a signed graph  $S$  has only negative lines, the problem of coloring  $S$  is the same as that of coloring a graph. If, however,  $S$  has some positive lines, it may not be colorable. We characterize colorable signed graphs, and relate them to complete colorings of graphs.

## Colorability

Let  $S^+$  be the spanning subgraph obtained by removing all negative lines from  $S$ . By a *component* of a graph we mean a maximal connected subgraph. The *positive components* of  $S$  are the components of  $S^+$ . It follows from this definition that two distinct points of  $S$  are in the same positive component if and only if they are joined by a path consisting entirely of positive lines (called an *all-positive path*). Clearly, the positive components of  $S$  partition  $V(S)$  into subsets such that each positive line joins two points in the same subset, and  $S$  has exactly one such partitioning.

We now present two equivalent conditions for a signed graph to be colorable. The equivalence of statements (1) and (3) of the theorem is given in [2].

*Theorem 1.* The following statements are equivalent for any signed graph  $S$ .

- (1)  $S$  has a coloring.
- (2)  $S$  has no negative line joining two points in the same positive component.
- (3)  $S$  has no cycle with exactly one negative line.

<sup>1)</sup> Work reported here was supported by Grant MH 10834 from the National Institute of Mental Health. We wish to thank Dr. GARY CHARTRAND for the formulation of Theorem 4.