

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 24 (1969)  
**Heft:** 3

**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

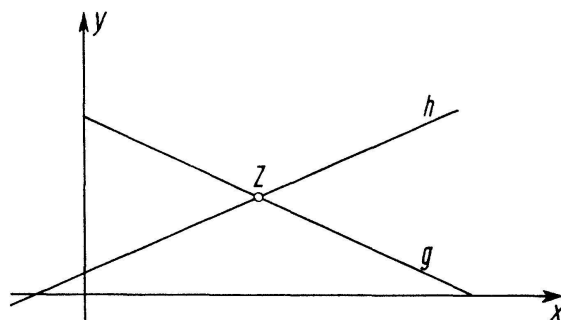
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 01.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**



Figur 4

also: Jeder Punkt der  $XY$ -Ebene ist ein Fixpunkt der Abbildung. Die durch die Formeln (5) vermittelte Abbildung muss also die identische Abbildung sein.

Es muss also gelten:

$$\varrho x = b_{11} f_1 + b_{12} f_2 + b_{13} f_3,$$

$$\varrho y = b_{21} f_1 + b_{22} f_2 + b_{23} f_3,$$

$$\varrho z = b_{31} f_1 + b_{32} f_2 + b_{33} f_3.$$

Wegen  $B \neq 0$  folgt daraus

$$f_1 = \frac{\varrho}{B} \cdot \begin{vmatrix} x & b_{12} & b_{13} \\ y & b_{22} & b_{23} \\ z & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}, \quad f_2 = \frac{\varrho}{B} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & x & b_{13} \\ b_{21} & y & b_{23} \\ b_{31} & z & b_{33} \end{vmatrix}, \quad f_3 = \frac{\varrho}{B} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & x \\ b_{21} & b_{22} & y \\ b_{31} & b_{32} & z \end{vmatrix}.$$

Die gesuchten Abbildungsgleichungen sind daher linear und homogen.

J. MALL, München

#### LITERATUR

BIEBERBACH, L. *Projektive Geometrie*, (Leipzig und Berlin 1931) § 10.

BLASCHKE, W. *Projektive Geometrie*, (Basel 1954). Abschnitt 17

SCHREIER, O., SPERNER, L., *Einführung in die analytische Geometrie und Algebra*, II, (Leipzig 1935) § 17.

## Kleine Mitteilungen

### Über « Super perfect numbers »

In Band 24, S. 16–17 dieser Zeitschrift, hat Herr D. SURYANARAYANA eine kleine Mitteilung veröffentlicht mit dem Titel « Super perfect numbers ». Er betrachtet natürliche Zahlen  $n$ , welche

$$\sigma(\sigma(n)) = 2n \tag{1}$$

genügen, wobei  $\sigma(n)$  die Summe aller (positiven) Teiler von  $n$  bedeutet. Eine solche Zahl wird «super perfect number» genannt. Wir wollen kurz s.p.n. schreiben. In der obigen Mitteilung wird der folgende Satz bewiesen: «Eine gerade Zahl  $n$  ist genau dann eine s.p.n., wenn  $n = 2^r$ , und  $2^{r+1} - 1$  eine Primzahl ist.»

In diesem Beweis ist eine kleine Ungenauigkeit, welche aber leicht zu beheben ist. Im zweiten Teil des Beweises wird behauptet, dass  $(2^{r+1} - 1) \sigma(q)$ ;  $\sigma(q)$ ;  $2^{r+1} - 1$  und 1

verschiedene Teiler von  $(2^{r+1} - 1) \sigma(q)$  sind. Das ist aber nur richtig, wenn  $\sigma(q) \neq 2^{r+1} - 1$  erfüllt ist. (Gegenbeispiel:  $q = 25, r = 4$ ).

Man kann aber den Beweis so führen: Ist  $q > 1$ , so sind  $(2^{r+1} - 1) \sigma(q); \sigma(q); 1$  verschiedene Teiler von  $(2^{r+1} - 1) \sigma(q)$ . Es folgt

$$2^{r+1} q \geq (2^{r+1} - 1) \sigma(q) + \sigma(q) + 1 > 2^{r+1} \sigma(q).$$

Weil  $\sigma(q) > q$ , ergibt sich ein Widerspruch.

Am Schluss wird die Frage nach der Existenz einer ungeraden s.p.n. gestellt. Dazu gilt der

**Satz.** *Ist  $n$  eine ungerade s.p.n., so muss  $n$  eine Quadratzahl sein.*

**Beweis.** Es sei  $n = \prod_{\kappa=1}^k p_{\kappa}^{\alpha_{\kappa}}$  in der kanonischen Zerlegung gegeben. Dann gilt

$$\sigma(n) = \prod_{\kappa=1}^k (1 + p_{\kappa} + \dots + p_{\kappa}^{\alpha_{\kappa}}) = \prod_{\lambda=1}^l q_{\lambda}^{\beta_{\lambda}}, \quad (2)$$

wobei der letzte Ausdruck die kanonische Zerlegung von  $\sigma(n)$  sein soll. Für eine s.p.n. gilt nach (1)

$$\sigma(\sigma(n)) = \prod_{\lambda=1}^l (1 + q_{\lambda} + \dots + q_{\lambda}^{\beta_{\lambda}}) = 2n = 2 \prod_{\kappa=1}^k p_{\kappa}^{\alpha_{\kappa}}. \quad (3)$$

$$\frac{\sigma(\sigma(n))}{\sigma(n)} \cdot \frac{\sigma(n)}{n} = \prod_{\lambda=1}^l \left(1 + \frac{1}{q_{\lambda}} + \dots + \frac{1}{q_{\lambda}^{\beta_{\lambda}}}\right) \cdot \prod_{\kappa=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_{\kappa}} + \dots + \frac{1}{p_{\kappa}^{\alpha_{\kappa}}}\right) = 2. \quad (4)$$

Ist  $n$  ungerade und keine Quadratzahl, dann folgt  $\sigma(n) \equiv 0 \pmod{2}$ , d.h. o.B.d.A.

$$q_1 = 2. \quad (5)$$

Aus (3) folgt weiterhin o.B.d.A.

$$p_1 \leq 1 + 2 + \dots + 2^{\beta_1} = 2^{\beta_1+1} - 1. \quad (6)$$

Nach (4) und (6) erhalten wir

$$\begin{aligned} 2 &\geq \frac{2^{\beta_1+1} - 1}{2^{\beta_1}} \cdot \frac{p_1 + 1}{p_1} \cdot \prod_{\lambda=2}^l \left(1 + \dots + \frac{1}{q_{\lambda}^{\beta_{\lambda}}}\right) \cdot \prod_{\kappa=2}^k \left(1 + \dots + \frac{1}{p_{\kappa}^{\alpha_{\kappa}}}\right) \\ &\geq \frac{2^{\beta_1+1} - 1}{2^{\beta_1}} \cdot \frac{2^{\beta_1+1}}{2^{\beta_1+1} - 1} = 2. \end{aligned} \quad (7)$$

Hieraus ergibt sich sogleich

$$k = l = 1, \quad \alpha_1 = 1 \quad \text{und} \quad p_1 = 2^{\beta_1+1} - 1. \quad (8)$$

Dann folgt

$$\sigma(n) = p_1 + 1 = 2^{\beta_1+1}; \quad \sigma(\sigma(n)) = 2^{\beta_1+2} - 1 = 2p_1, \quad (9)$$

worin der Widerspruch ersichtlich wird.

H.-J. KANOLD, Braunschweig

## Zur Möbiusinvolution der Ebene

1. Herr STRUBECKER hat in einer Abhandlung gleichen Titels [1] einen ausführlichen Bericht über zwei sich bei einer Möbiusinvolution darbietende Probleme gegeben: 1. das Problem, ihre beiden Fixpunkte und 2. bei zwei gegebenen Punktepaaren  $(A, A')$  und  $(B, B')$  zu einem weiteren Punkt  $C$  den Bildpunkt  $C'$  zu konstruieren. Es gelang ihm, für das 2. Problem eine ganz besonders einfache Lösung in zweierlei Gestalt zu finden:

Bezeichnen  $(AB'C)$ ,  $(A'BC)$ ,  $(ABC)$ ,  $(A'B'C')$  die Kreise durch die drei eingeklammerten Punkte, und  $(AB'C) \cdot (A'BC) = D$ ,  $(ABC) \cdot (A'B'C') = D'$  die Schnittpunkte der eingeklammerten Kreise, so ist entweder  $(ABC) \cdot (A'B'D) = C'$  oder auch  $(AB'D') \cdot (A'BD') = C'$ .

Die Einfachheit der Konstruktion legt nahe, einen ebenso einfachen Beweis für sie zu suchen, ohne die Theorie der harmonischen Quadrupel (H. Wiener) oder räumliche Betrachtungen dafür (K. Strubecker) in Anspruch zu nehmen.

2. Eine *Möbiustransformation* ist zunächst in komplexen Koordinaten durch eine Gleichung

$$\bar{z} = \frac{A z + B}{C z - A} \quad (1)$$

gegeben, wo  $A, B, C$  komplexe Konstanten mit nichtverschwindender Determinante  $-A^2 - BC \neq 0$  sind. Bezeichnet man zwei entsprechende Punktepaare von (1) mit  $(a, \bar{a})$  und  $(b, \bar{b})$ , so lautet die durch sie gegebene Involution

$$\begin{vmatrix} z\bar{z} & z + \bar{z} & 1 \\ a\bar{a} & a + \bar{a} & 1 \\ b\bar{b} & b + \bar{b} & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

Wir bezeichnen nun die Koordinaten der in 1. angegebenen Punkte  $A, A'; B, B'; C, C'; D$  mit  $a, \bar{a}; b, \bar{b}; z, \bar{z}$  und  $u$ . Nach der angegebenen Konstruktion sollen  $u, a, \bar{b}, z$  auf einem Kreise liegen, also muss das Doppelverhältnis (DV)

$$\frac{u - a}{u - \bar{b}} : \frac{z - a}{z - \bar{b}} = \lambda \quad (3)$$

reell sein, nämlich gleich dem DV der Strecken  $\overline{ua}/\overline{ub} : \overline{za}/\overline{zb}$  (die Umfangswinkel über  $\overline{ab}$  in  $u$  und  $z$  sind gleich).

Genau so müssen die Gleichungen gelten:

$$\frac{u - \bar{a}}{u - b} : \frac{z - \bar{a}}{z - b} = \mu = \frac{\overline{ua} \cdot \overline{zb}}{\overline{ub} \cdot \overline{za}} \quad (4)$$

$$\frac{u - a}{u - b} : \frac{\bar{z} - a}{\bar{z} - b} = \lambda' = \frac{\overline{ua} \cdot \overline{\bar{z}b}}{\overline{ub} \cdot \overline{\bar{z}a}} \quad (5)$$

$$\frac{u - \bar{a}}{u - \bar{b}} : \frac{\bar{z} - \bar{a}}{\bar{z} - \bar{b}} = \mu' = \frac{\overline{ua} \cdot \overline{\bar{z}b}}{\overline{ub} \cdot \overline{\bar{z}a}} \quad (6)$$

Aus den linken Seiten von (3) bis (6) lässt sich nun der Hilfspunkt  $u$  sofort eliminieren und es käme, wenn die Gleichung (7)  $\lambda \mu = \lambda' \mu'$  gelten würde, sofort die Gleichung

$$\frac{\bar{z} - \bar{a}}{z - \bar{a}} : \frac{\bar{z} - \bar{b}}{z - b} = \frac{z - a}{\bar{z} - a} : \frac{z - b}{\bar{z} - b}. \quad (8)$$

Diese ist aber nichts anderes als die Gleichung der Möbiustransformation, die nach Abscheidung des Faktors  $\bar{z} - z \neq 0$  in die einfache Gleichung (2) übergeht. Die Gleichung (7) aber lautet

$$\frac{\overline{zb} \cdot \overline{z\bar{b}}}{\overline{za} \cdot \overline{z\bar{a}}} = \frac{\overline{\bar{z}b} \cdot \overline{\bar{z}b}}{\overline{\bar{z}a} \cdot \overline{\bar{z}a}}, \quad (9)$$

und sie gilt tatsächlich. Da nämlich die Zuordnung

$$z \rightarrow \bar{z}, a \rightarrow \bar{a}, \bar{a} \rightarrow a, b \rightarrow \bar{b}, \bar{b} \rightarrow b$$

gilt, so ist die linke Seite von (9) die bekannte *Inversionsinvariante*, oder, da sie ebenso für Bewegungen und Ähnlichkeitstransformationen gilt, *Möbiustransformation* von vier Strecken zwischen vier Punkten. Damit ist aber die Strubeckersche Konstruktion auf sehr einfache Weise bewiesen.

K. FLADT, Calw

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] K. STRUBECKER, *Zur Möbiustransformation der Ebene*, Monatsh. Math. Phys. 41, 439-444 (1934).

### Eine Bemerkung über mehrdimensionale Axonometrien

**Definitionen:** Eine lineare Abbildung  $\pi$  von  $E_n$  auf  $E_m \subset E_n$  heisst  $(n, m)$ -Parallelprojektion, wenn  $P \in \pi^{-1} P$  für jedes  $P \in E_m$  gilt. Ist  $\pi^{-1} P \perp E_m$ , so bekommt man eine  $(n, m)$ -Normalprojektion. Eine  $(n, m)$ -Parallelprojektion  $\pi: E_n \rightarrow E_m$  zusammen mit einem festen orthonormierten  $n$ -Bein  $(n_1, \dots, n_n)$  in  $E_n$  heisst eine  $(n, m)$ -Axonometrie. Eine  $(n, m)$ -Normalprojektion  $\pi: E_n \rightarrow E_m$  gemeinsam mit einem festen orthonormierten  $n$ -Bein  $(n_1, \dots, n_n)$  in  $E_n$  heisst  $(n, m)$ -Normalaxonometrie. Weiter setzen wir

$$a_i = |\pi n_i|, \quad i = 1, \dots, n \quad \text{und} \quad \alpha_{ij} = \sphericalangle \pi n_i, \pi n_j \quad \text{für} \quad i, j = 1, \dots, n.$$

L. A. JAZKEWITSCH zeigte in [2], dass in jeder  $(n, m)$ -Normalaxonometrie

$$a_1^2 + \dots + a_n^2 = m, \quad a_1 + \dots + a_n \leq \sqrt{n \cdot m}$$

gilt. Dagegen bewies J. SCHOPP in [3], dass in jeder  $(n, n-1)$ -Axonometrie

$$a_1^2 + \dots + a_n^2 \geq n-1 < a_1 + \dots + a_n$$

in Kraft ist. Im folgenden möchten wir diese Beziehungen noch verallgemeinern.

**Behauptung 1.** In einer beliebigen  $(n, m)$ -Axonometrie gilt für die Summe  $s_k$  sämtlicher  $k$ -Hauptminoren der Matrix  $\| a_i a_j \cos \alpha_{ij} \|$  die Ungleichung

$$(-1)^{n-k-1} \cdot s_k \geq \binom{m}{k}, \quad 1 \leq k \leq m.$$

Dabei gilt das Gleichheitszeichen genau im Falle der  $(n, m)$ -Normalaxonometrie.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus folgendem Satz ([4]): Es sei  $(a_1, \dots, a_n)$  ein Vektor- $n$ -tupel in  $E_m \subset E_n$ . Eine  $(n, m)$ -Axonometrie  $\pi: E_n \rightarrow E_m$  mit  $\pi n_i = a_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , existiert gerade dann, wenn für die (notwendig reellen) Eigenwerte  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$  von  $\| a_i \cdot a_j \|$  die Beziehungen  $\lambda_{n-m+1} = \dots = \lambda_m = 1$ ,  $\lambda_{m+1} = \dots = \lambda_n = 0$  gelten. Hierbei charakterisiert der Fall  $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 1$  gerade die  $(n, m)$ -Normalaxonometrien. Es genügt jetzt, die bekannten Eigenschaften der elementarsymmetrischen Polynome zu verwenden (vgl. [1], S. 83), um die Behauptung 1 zu gewinnen. Für  $k = 1$  erhält man  $s_1 = a_1^2 + \dots + a_n^2 \geq m$  (vgl. [3]) und  $s_1 = a_1^2 + \dots + a_n^2 = m$  gilt genau im Falle der  $(n, m)$ -Normalaxonometrie (vgl. [2] und [3]). Einen einfachen direkten Beweis der in jeder  $(n, m)$ -Normalaxonometrie geltenden Gleichung  $a_1^2 + \dots + a_n^2 = m$  bekommen wir auch so: Es sei

$$E_m = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_{m+1} = \dots = x_n = 0\} \quad \text{und} \quad n_i = (e_{i1}, \dots, e_{in}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Hieraus ergibt sich

$$\pi n_i = (e_{i1}, \dots, e_{im}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Weil  $\| e_{ij} \|$  eine orthogonale Matrix ist, so ist auch  $\| e_{ij} \|^T$  eine orthogonale Matrix, woraus folgt

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n e_{ij}^2 = \underbrace{1 + \dots + 1}_m = m.$$

**Behauptung 2.** In einer beliebigen  $(n, m)$ -Axonometrie  $\pi: E_n \rightarrow E_m$  gilt  $a_1 + \dots + a_n > m$ .

Beweis. Es sei  $\pi$  eine  $(n, m)$ -Normalaxonometrie. Dann ist  $|\pi n_i| \leq |n_i|$ , d. h.  $a_i \leq 1$ ;  $i = 1, \dots, n$ . Gleichheit kann hier höchstens in  $m$  Fällen auftreten. Also ist

$$a_i^2 \leq a_i; \quad i = 1, \dots, n \quad \text{und} \quad a_1^2 + \dots + a_n^2 < a_1 + \dots + a_n.$$

Aus  $a_1^2 + \dots + a_n^2 = m$  ergibt sich  $m < a_1 + \dots + a_n$ . Ist nun  $\pi$  nicht die  $(n, m)$ -Normalaxonomie, so verwenden wir eine  $m$ -Ebene  $E_m^* \perp \pi^{-1} P$ ,  $P \in E_m$  und die  $(n, m)$ -Normalaxonomie  $\pi^*: E_n \rightarrow E_m^*$  mit demselben orthonormierten  $n$ -Bein  $(n_1, \dots, n_n)$  wie  $\pi$ . Nach vorigem ist hier  $a_1^* + \dots + a_n^* > m$ , wo  $a_i^* = |\pi^* n_i|$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Es ist aber auch  $a_i \geq a_i^*$ ,  $i = 1, \dots, n$ , weil  $\pi^*(\pi n_i) = \pi^*(n_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Hieraus folgt  $a_1 + \dots + a_n \geq a_1^* + \dots + a_n^*$ , so dass  $a_1 + \dots + a_n > m$ , was zu beweisen war. VÁCLAV HAVEL, Brno

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] B. L. V. D. WAERDEN, *Moderne Algebra* 1, 2. Aufl. (New York 1943).  
 [2] L. A. JAZKEWITSCH, *Grundeigenschaften der Normalaxonomie eines  $n$ -dimensionalen euklidischen Raumes, Fragen der angewandten Geometrie* (russisch) unter Redaktion von A. M. Tewlin, (Moskau 1966).  
 [3] J. SCHOPP, *Über die  $n$ -dimensionalen Axonomien*, *El. Math.* 19, 108–111 (1964).  
 [4] V. HAVEL, *Über eine Zerlegung der singulären linearen Transformationen* (tschechisch), *Cas. pest. mat.* 85, 439–447 (1960).

## Aufgaben

**Aufgabe 573.** Man konstruiere (mit Zirkel und Lineal) a) ein beliebiges rechtwinkliges, b) ein beliebiges nichtgleichseitiges, gleichschenkliges Dreieck aus den Schnittpunkten seiner Mittelsenkrechten, seiner Höhen und seiner Winkelhalbierenden.

K. KOPFERMANN, Hannover

*Lösung:* Bezeichnungen: Umkreismittelpunkt  $O$ , Inkreismittelpunkt  $I$ , Höhenschnittpunkt  $H$ .

a) Wegen  $HO^2 - OI^2 = HO \cdot HI \cdot 2^{1/2}$  kann jede Seite des Dreiecks  $OHI$  aus den beiden andern berechnet werden, weshalb wir voraussetzen, dass  $O$ ,  $H$  und  $I$  «richtig» liegen.

Der Kreis um  $O$  mit Radius  $OH$  (Umkreis) wird von der Geraden durch  $H$  und  $I$  ein zweites Mal in  $P$  geschnitten. Der zu  $PO$  normale Durchmesser ist die Hypotenuse,  $H$  die Rechtwinkelecke des Dreiecks.

b)  $I$  ist innerer Teilpunkt von  $OH$ ,  $Y$  der  $I$  harmonisch zugeordnete äussere Teilpunkt. Der Mittelpunkt  $P$  des Kreises (Apolloniuskreis) mit dem Durchmesser  $IY$  liegt auf dem Umkreis des Dreiecks. Die Schnittpunkte von Umkreis (Radius  $OP$ ) und Apolloniuskreis inzidieren mit den Endpunkten der Dreiecksbasis, womit das Dreieck gezeichnet werden kann.

Bemerkungen:  $Y$  ist der Mittelpunkt des Ankreises, welcher die Basis des Dreiecks berührt.  $I$  darf nicht Mittelpunkt von  $OH$  sein. F. LEUENBERGER, Feldmeilen

Weitere Lösungen sandten M. BACHMANN (Küsnacht), P. BUNDSCHUH (Freiburg i. Br.), J. FEHÉR (Pécs/Ungarn), H. FRISCHKNECHT (Berneck), K. HODEL (Wädenswil), I. PAASCHE (München), O. REUTTER (Ochsenhausen), E. WIDMER (Biel).

**Aufgabe 574.** Sei  $r$  der Inkreisradius,  $s$  die Summe der (orientierten) Abstände des Mittelpunktes des Feuerbachkreises von den Seiten des Dreiecks.

Man beweise oder widerlege: Jedes nichtgleichseitige Dreieck, für das  $s = 3r$  ist, lässt sich aus den Schnittpunkten der Mittelsenkrechten, der Höhen und der Winkelhalbierenden (mit Zirkel und Lineal) konstruieren. K. KOPFERMANN, Hannover

*Lösung des Aufgabenstellers:* Es gibt unendlich viele konstruierbare und unendlich viele nicht konstruierbare Dreiecke dieser Art.