

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 25 (1970)
Heft: 3

Artikel: Einige Figuren der erweiterten Oktaedergruppe
Autor: Hohenberg, Fritz
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-27352>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Einige Figuren der erweiterten Oktaedergruppe

Zu jeder Kante eines regulären Oktaeders gibt es 7 andere Kanten, die sie (in einem eigentlichen oder uneigentlichen Punkt) schneiden, und weitere 4 Kanten, die sie kreuzen. Die Gemeinlote kreuzender Oktaederkanten, kurz Lote genannt, bilden eine Figur \mathcal{L} von 24 Geraden, die die erweiterte Oktaedergruppe gestattet. Im folgenden werden \mathcal{L} und Teilfiguren von \mathcal{L} , die je eine Diedergruppe gestatten, untersucht. \mathcal{L} erweist sich als ein Teil der Diagonalfigur einer Kummerschen Konfiguration¹⁾.

\mathcal{L} ist ein anschauliches Beispiel eines Geradensystems, das aus einer Geraden besonderer Lage durch Anwendung der erweiterten Oktaedergruppe entsteht. Die Frage nach den Geradensystemen, die aus einer Geraden beliebiger Lage durch Anwendung einer erweiterten Polyedergruppe erzeugt werden, wird in einer späteren Arbeit behandelt.

1. Die 24 Gemeinlote kreuzender Oktaederkanten

Das reguläre Oktaeder Π habe den Mittelpunkt M und die Kantenlänge a . Eine Seitenfläche habe die Ecken $0, 1, 2$; deren Gegenecken seien $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}$. Figur 1 ist Grundriss auf die Ebene $\bar{0}\bar{1}\bar{2}$. Die zu 012 und $\bar{0}\bar{1}\bar{2}$ normale Flächenachse f erscheint als Punkt f' . Die Kante 01 kreuzt die Kanten $\bar{1}\bar{2}, \bar{0}\bar{2}, \bar{1}\bar{2}, \bar{0}\bar{2}$.

01 und $\bar{2}\bar{1}$ liegen waagrecht, daher erscheint ihr Gemeinlot l als Punkt l' , und zwar im Abstand $a/3$ von 0 und von $\bar{2}$. Wir bezeichnen l mit $01|\bar{2}\bar{1}$; darin bedeuten die Ziffernpaare die Kanten 01 und $\bar{2}\bar{1}$ und die erste Ziffer in jedem Paar gibt jenen Endpunkt der Kante an, der vom Fusspunkt von l den Abstand $a/3$ hat.

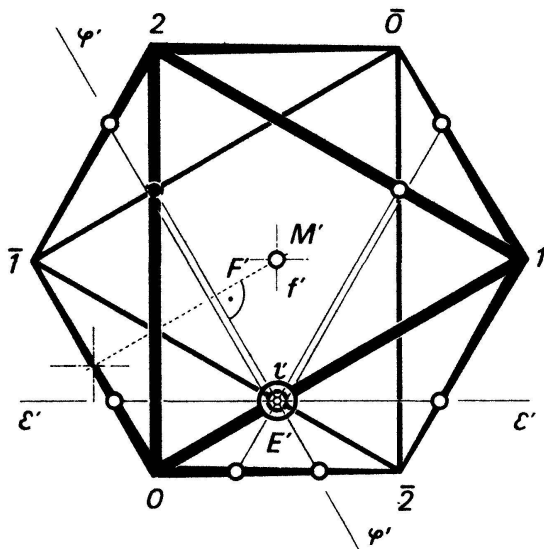
In Figur 1 erscheinen die Lote $01|\bar{2}\bar{1}, 10|\bar{2}\bar{0}, 12|\bar{0}\bar{2}, 21|\bar{0}\bar{1}, 20|\bar{1}\bar{0}, 02|\bar{1}\bar{2}$ als Ecken eines regelmässigen Sechseckes mit der Seitenlänge $a/3$. Diese Lote sind zu f parallel und sie bilden ein reguläres sechsseitiges Prisma. Als Länge von l folgt $a\sqrt{2/3}$.

Jede Oktaederkante kreuzt 4 andere Kanten, jedes Paar kreuzender Kanten hat ein Gemeinlot, daher gibt es $12 \cdot 4/2 = 24$ Lote. Entsprechend den 4 Flächenachsen verteilen sie sich auf 4 reguläre sechsseitige Prismen. Jedes solche Prisma gestattet eine in der Oktaedergruppe enthaltene Diedergruppe der Ordnung 6. Beim Prisma in Figur 1 enthält die Diedergruppe die Drehungen um f durch 120° und 240° und die Drehungen um die drei zu f normalen Kantenachsen durch je 180° ; diese Kantenachsen gehen durch die Mitten je zweier ansteigenden Gegenkanten in Figur 1, nämlich $\bar{1}\bar{0}$ und $\bar{0}\bar{1}, \bar{1}\bar{2}$ und $\bar{2}\bar{1}, \bar{0}\bar{2}$ und $\bar{2}\bar{0}$.

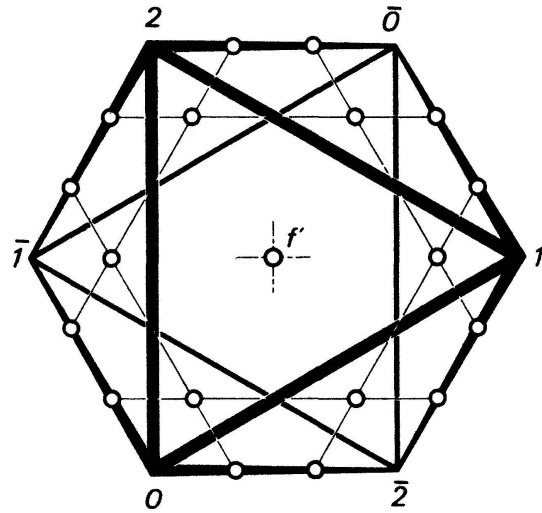
2. Lotvierecke und Lotsechsecke

Durch Spiegelung an einer Symmetrieebene σ des Oktaeders Π geht ein Lot l in ein anderes Lot l_1 über; l und l_1 schneiden sich auf σ . Unterwirft man l den Spiege-

¹⁾ In den Figuren sind Polyeder als Drahtmodelle ihrer Kanten aufgefasst und in Normalrissen dargestellt. Vom Betrachter weglauende Kanten sind in bekannter Weise keilförmig gezeichnet. Wo eine Gerade von einer anderen Geraden überkreuzt wird, ist sie in der Zeichnung unterbrochen. Lote sind dünn gezeichnet, ihre Schnittpunkte durch Ringe angedeutet.



Figur 1

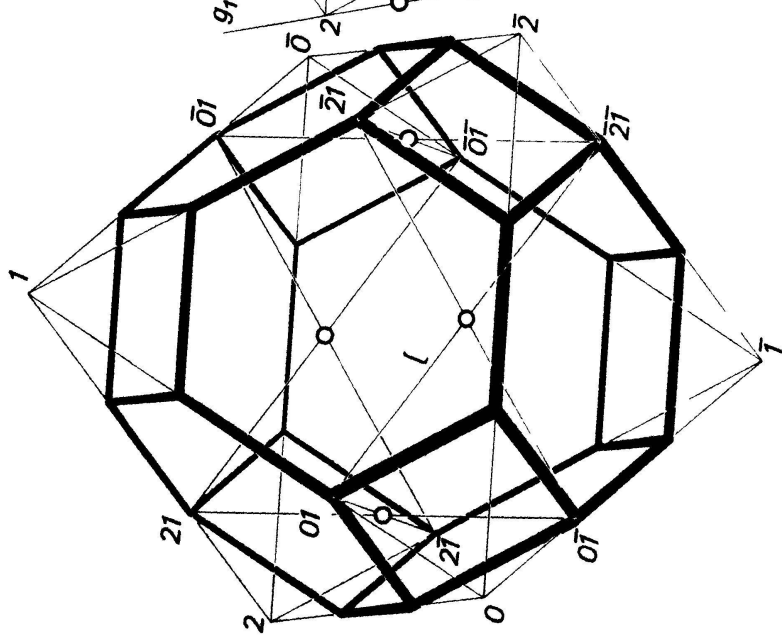


Figur 2

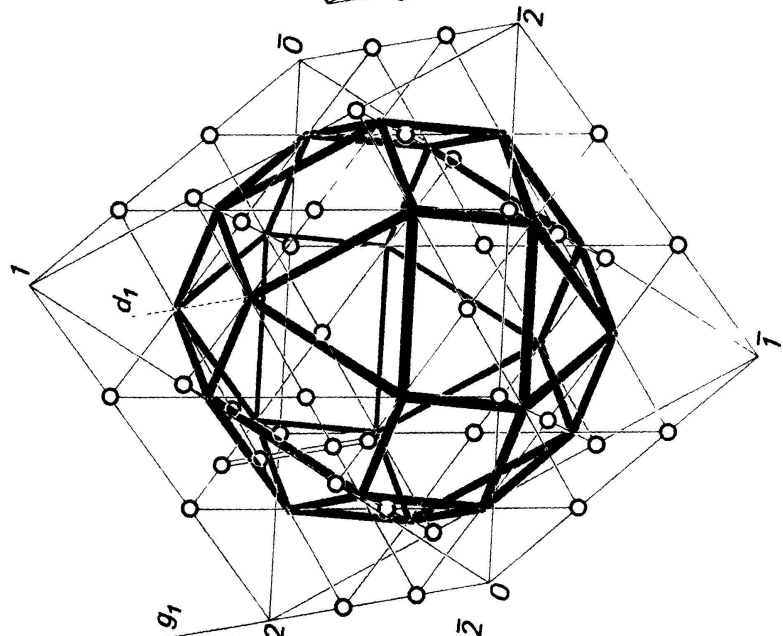
lungen an den 9 Symmetrieebenen von Π (am besten an Hand eines Drahtmodells), so geht l in 3 zu l parallele Lote und in die in Figur 1 gezeichneten Lote $01|2\bar{1}$, $2\bar{0}|\bar{1}0$, $2\bar{1}|\bar{0}1$, $0\bar{2}|\bar{1}2$, $0\bar{1}|\bar{2}1$ über. Man sieht: l wird von 5 anderen Loten im Endlichen geschnitten. Die Lote $01|2\bar{1}$ und $2\bar{1}|\bar{0}1$ schneiden l in den Endpunkten, die übrigen 3 Schnittpunkte teilen die Lotlänge zwischen den Endpunkten in vier gleiche Teile; $01|2\bar{1}$ und $0\bar{1}|\bar{2}1$ schneiden einander im gemeinsamen Mittelpunkt, während $01|2\bar{1}$ von $2\bar{0}|\bar{1}0$ und von $0\bar{2}|\bar{1}2$ in «Viertelungspunkten» geschnitten wird. Damit lassen sich aus Loten zwei weitere Figuren bilden, die je eine Diedergruppe gestatten.

Spiegelt man $l = 01|2\bar{1}$ an der Symmetrieebene $M 01$, so geht l in das Lot $01|2\bar{1}$ über (Fig. 3). $01|2\bar{1}$ geht durch Spiegelung an der Symmetrieebene $M 12$ in das Lot $2\bar{1}|\bar{0}1$ über, dieses durch Spiegelung an $M 01$ in das Lot $0\bar{1}|\bar{2}1$. So entsteht das geschlossene «Lotviereck» $01, 2\bar{1}, \bar{0}1, \bar{2}1, 01$. Es ist ein regelmässiges unebenes Viereck mit der Seitenlänge $a\sqrt{2/3}$; die Seiten sind parallel zu den Flächenachsen des Oktaeders, sie schliessen daher denselben Winkel wie die Oktaederflächen ein. Je zwei aufeinanderfolgende Lote des Lotvierecks bestimmen eine Ebene; von diesen Ebenen schliessen je zwei aufeinanderfolgende den Winkel 60° , je zwei nicht aufeinanderfolgende den Winkel 120° ein. Das Lotviereck gestattet eine Diedergruppe der Ordnung 4; diese enthält die Drehung um die Eckenachse $1\bar{1}$ durch 180° und die Drehungen um die zu $1\bar{1}$ normalen Kantenachsen durch je 180° . Im Normalriss auf die Ebene $02\bar{0}2$ erscheint das Lotviereck als Quadrat, das aus dem Quadrat $02\bar{0}2$ durch die Streckung ($M; 2/3$) hervorgeht. Die Spiegelung an der Symmetrieebene $M 02$ führt das Lotviereck in das Lotviereck $0\bar{1}, 21, \bar{0}\bar{1}, \bar{2}1, 0\bar{1}$ (Fig. 3) über, das dieselbe Diedergruppe gestattet. Auch zu den Eckenachsen $0\bar{0}$ und $2\bar{2}$ gehören je zwei Lotvierecke.

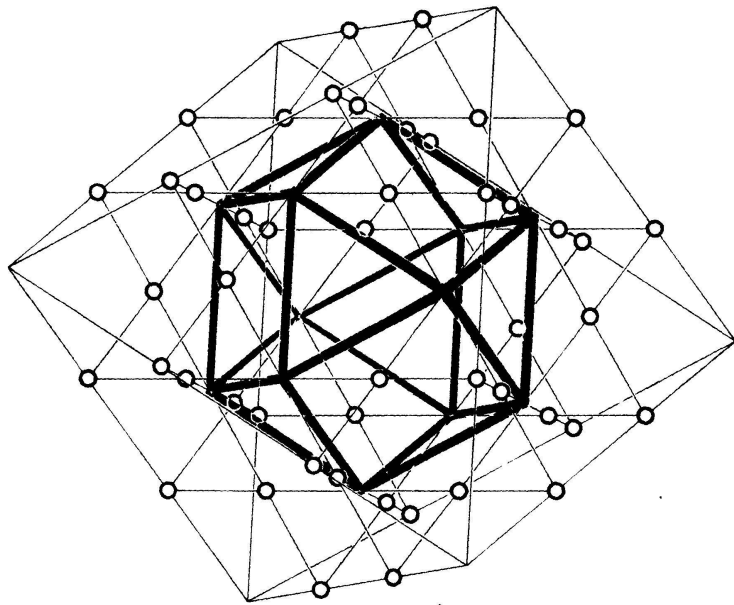
In gleicher Weise erhält man zu jeder Flächenachse ein *Lotsechseck*, das eine Diedergruppe der Ordnung 6 gestattet. Figur 2 zeigt das Lotsechseck, das die Drehungen um f durch 120° und 240° und um die zu f normalen Kantenachsen durch



Figur 3



Figur 4



Figur 5

180° gestattet. Die Seiten des Lotsechseckes haben die Richtungen der drei von f verschiedenen Flächenachsen, sie schliessen miteinander denselben Winkel wie die Oktaederflächen ein. Die Ecken des Sechsecks liegen in den durch f gehenden Symmetrieebenen des Oktaeders, ihre Abstände im Raum sind $a/\sqrt{6}$ (halbe Lotlänge); der Normalriss in Richtung f ist das regelmässige Sechseck mit der Seitenlänge $2a/3\sqrt{3}$.

3. Die Polyeder der Schnittpunkte und der Verbindungsebene der Lote

Die *Fusspunkte der Lote* teilen die Oktaederkanten in 3 gleiche Teile, daher bilden die Fusspunkte der Lote ein Archimedisches Polyeder, und zwar ein *abgestumpftes Oktaeder* Π_1 (Fig. 3), begrenzt von 6 Quadraten und 8 regelmässigen Sechsecken (Seitenlängen $a/3$). Die Lote sind die zweitkürzesten Raumdiagonalen von Π_1 .

Das von den 48 *Viertelungspunkten der Lote* gebildete konvexe Polyeder heisse Π_2 (Fig. 4). Π_2 ist halbrekulär, aber nicht Archimedisches. Π_2 ist begrenzt von 6 Quadraten (Seitenlänge $a\sqrt{2}/6$, Seiten parallel zu den Eckenachsen des Oktaeders Π), 8 gleichseitigen Dreiecken (Seitenlängen $a/3$, Seiten parallel zu den Kanten von Π) und 12 Rechtecken (Seitenlängen $a/3$ und $a\sqrt{2}/6$); in jeder Ecke von Π_2 stossen zwei Rechtecke und zwischen ihnen ein Dreieck und ein Quadrat zusammen. Jede Quadratenebene liegt normal zu einer Eckenachse, jede Dreiecksebene normal zu einer Flächenachse, jede Rechtecksebene normal zu einer Kantenachse des Oktaeders Π ; die 24 Lote von Π sind die Diagonalen der 12 Rechtecke von Π_2 .

Die *Mittelpunkte der Lote* von Π bilden ein Archimedisches Polyeder Π_3 (Fig. 5). Π_3 ist das aus den Mittelpunkten der Rechtecke von Π_2 gebildete *Kubooktaeder*. Nach Figur 1 geht der Mittelpunkt E von l aus dem Mittelpunkt von $0\bar{2}$ durch die Streckung $(M; 2/3)$ hervor; aus dem von den Mittelpunkten der Oktaederkanten gebildeten Kubooktaeder geht Π_3 daher durch die Streckung $(M; 2/3)$ hervor. Π_3 hat die Kantenlänge $a/3$. – Als Radien der Umkugeln von Π_1 , Π_2 , Π_3 findet man $a\sqrt{10}/6$ bzw. $a\sqrt{22}/12$ bzw. $a/3$.

Zwei Lote, die einander schneiden, liegen in einer Ebene. Diese Verbindungsebenen umhüllen, wie nun gezeigt werden soll, *zwei Rhombendodekaeder*. In Figur 1 erscheint die lotrechte Verbindungsebene ε der Lote l und $0\bar{1}|\bar{2}\bar{1}$, die einander hälften, als Gerade ε' . Der Schnittpunkt E beider Lote ist der Fusspunkt der Normalen aus M auf diese Ebene. Unterwirft man E der Oktaedergruppe, so erhält man die Ecken von Π_3 . Durch Polarisieren von Π_3 an der Umkugel von Π_3 erhält man das von den Ebenen ε gebildete Polyeder Π'_3 , daher: Die 12 Verbindungsebenen von Loten, die einander hälften, sind die Seitenflächen des Rhombendodekaeders Π'_3 , das aus Π_3 durch Polarisierung an der Umkugel von Π_3 entsteht. Die Kantenlote des Oktaeders sind die 24 Mittellinien der 12 Rhomben von Π'_3 , nämlich die Geraden, die parallel zu den Seiten eines Rhombus durch dessen Mittelpunkt gehen.

Die lotrechte Ebene φ in Figur 1 enthält die 4 Lote $l = 0\bar{1}|\bar{2}\bar{1}, 20|\bar{1}\bar{0}, 0\bar{1}|\bar{2}\bar{1}, \bar{1}\bar{0}|\bar{2}\bar{0}$. Die Normale aus M auf φ schneide φ in F . F geht aus dem Mittelpunkt von $0\bar{1}$ durch die Streckung $(M; 1/3)$ hervor, daher ergibt sich aus F durch Anwendung der Oktaedergruppe ein Kubooktaeder mit dem Umkugelradius $a/6$. Polarisiert man dieses Kubooktaeder an seiner Umkugel, so ergibt sich das von den Ebenen φ eingehüllte

Polyeder Π'_2 . Π'_2 ist ein Rhombendodekaeder mit dem Inkugelradius $a/6$. Jede Seitenfläche von Π'_2 ist ein Rhombus, der durch Streckung (im Verhältnis 3:1) aus seinem Mittelpunkt in den Rhombus der in φ liegenden Lote übergeht. Durch jedes Lot gehen zwei Seitenflächen von Π'_2 . Sind r_1 und r_2 zwei parallele Seiten eines Rhombus von Π'_2 , so schneiden sich die zweite durch r_1 und die zweite durch r_2 gehende Seitenfläche von Π'_2 in einem Lot.

4. Ergänzungen

a) *Gemeinlote der Kantenlote des Oktaeders*

Die Kantenlote sind zu den Flächenachsen des Oktaeders parallel, das Gemeinlot zweier Kantenlote hat daher die Richtung einer Kantenachse des Oktaeders. Jedes Kantenlot des Oktaeders ist zu 5 anderen Loten parallel und es wird von 5 Loten im Endlichen geschnitten. Jedes Lot kreuzt daher $24 - 1 - 5 - 5 = 13$ andere Lote und es gibt $24 \cdot 13/2 = 156$ Paare kreuzender Lote. $156/6 = 26$ Paare kreuzender Lote haben Gemeinlote, die zu einer bestimmten Kantenachse k parallel sind. k selbst ist zweifaches Gemeinlot, ebenso sind die zu k parallelen Oktaederkanten g_1 und g_2 zweifache Gemeinlote, ebenso die zu k parallelen Quadratdiagonalen d_1 und d_2 des Polyeders Π_2 . Es bleiben noch $26 - 10 = 16$ Paare kreuzender Lote, und deren Gemeinlote sind (wie ein Normalriss in Richtung von k zeigt) die Mittelparallelen der Geraden g_1 und d_1 , g_1 und d_2 , g_2 und d_1 , g_2 und d_2 ; diese Mittelparallelen schneiden je 4 Kantenlote des Oktaeders normal, die Schnittpunkte folgen in den Abständen $a/6$, $a/3$, $a/6$ aufeinander. Für die Kantenachse k , die durch die Mitten der Kanten $\bar{0}2$ und $\bar{0}2$ geht, sind in Figur 4 die Geraden g_1 , d_1 und ihre Mittellinie (als Doppellinie) eingetragen.

b) *Eine Oktaederlagerung im Raum*

Haben die Oktaederkanten a_1 und a_2 das Gemeinlot l , so gibt es eine Schraubung mit der Achse l , die a_1 in a_2 überführt; der Schraubwinkel ist 120° , die Schraubhöhe ist die Länge von l , nämlich $a\sqrt{2/3}$. Diese Schraubung führt das Oktaeder in ein neues Oktaeder über, das mit dem ersten die Kante a_2 und ihre Endpunkte gemein hat. Führt man dies für alle Kantenlote durch und setzt man das Verfahren bei den neuen Oktaedern fort, so erhält man eine räumliche Lagerung von Oktaedern, die auseinander auch durch wiederholte Schiebung in Richtung der Kantenachsen um die Strecke a hervorgehen. Jedes Oktaeder in diesem Gitter ist von 12 Oktaedern umgeben, die mit ihm je eine Kante (und deren Endpunkte) gemein haben.

Denkt man sich jedes dieser Oktaeder an der Kugel, die seine Kanten berührt, polarisiert, so geht das Oktaedergitter in ein Gitter von Würfeln über, bei dem jeder Würfel mit 12 anderen Würfeln je eine Kante gemein hat (wie bei einem «räumlichen Schach» Würfel einer Farbe).

c) *Eine Beziehung zur Kummerschen Konfiguration*

Diese Konfiguration besteht aus 16 Punkten P und 16 Ebenen ε mit folgenden Lagebeziehungen: 1) Jede Ebene ε enthält 6 Punkte P , und diese liegen auf einem Kegelschnitt, 2) Durch jeden Punkt P gehen 6 Ebenen ε , und diese berühren einen

Kegel 2. Ordnung. Eine spezielle Kummersche Konfiguration bilden die 12 Ecken des Kubooktaeders Π_3 zusammen mit den Fernpunkten F_1, F_2, F_3, F_4 der 4 Flächenachsen des Oktaeders. Die Ebenen dieser Konfiguration ergeben sich so: a) Von jeder Ecke von Π_3 gehen 4 Kanten aus, deren Endpunkte bilden eine Konfigurationsebene ε , in der auch zwei Punkte F_i liegen; das sind 12 Ebenen ε . b) Die zu zwei parallelen Dreiecksflächen von Π_3 parallele Ebene durch M ist ebenfalls eine Konfigurationsebene ε ; das sind die restlichen 4 Ebenen ε . Jede dieser 4 Ebenen schneidet Π_3 nach einem regelmässigen Sechseck, und das zeigt, dass der «charakteristische Sechserwurf» dieser speziellen Kummerschen Konfiguration der eines regelmässigen Sechseckes ist.

Je zwei Punkte P haben als Verbindungsgerade eine «Diagonale» der Kummerschen Konfiguration. Es gibt $16 \cdot 15/2 = 120$ Diagonalen, sie verteilen sich auf a) die 24 Kanten von Π_3 , b) die 12 Diagonalen der 6 Quadrate von Π_3 , c) die 30 Raumdiagonalen von Π_3 , d) die 6 Ferngeraden durch je zwei Punkte F_i , e) die 24 Geraden, die in den Ecken jeder Dreiecksfläche von Π_3 auf dieser Fläche normal stehen, und schliesslich f) die 24 Kantenlote des Oktaeders. Kurz gesagt: *Die 12 Mittelpunkte und die 4 Fernpunkte der Kantenlote eines regulären Oktaeders bilden die 16 Punkte einer Kummerschen Konfiguration. Die Kantenlote sind 24 von den 120 Diagonalen dieser Konfiguration.*

FRITZ HOHENBERG, Graz

Kleine Mitteilungen

Ein Satz über Matrixeigenwerte

Die Eigenwerte einer hermiteschen, schiefhermiteschen bzw. unitären Matrix sind reell, rein imaginär (oder 0) bzw. vom Betrage 1. Diese drei wohlbekanntesten Aussagen, die man üblicherweise gesondert beweist, sind bemerkenswerterweise Sonderfälle eines einzigen Satzes, der sich sehr leicht ergibt und auch noch weitere Anwendungen hat.

Satz. Genügen eine quadratische Matrix A und ihre konjugiert Transponierte A^* einer Beziehung der Form

$$f(A, A^*) = 0 \quad (1)$$

mit

$$f(A, A^*) = \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n a_{\mu\nu} A^{*\mu} A^{\nu}, \quad (2)$$

so gehören die Eigenwerte von A der durch

$$f(z, \bar{z}) = 0 \quad (3)$$

dargestellten Menge komplexer Zahlen an.

Beweis. x sei ein Eigenvektor zu einem Eigenwert λ von A . Dann ist

$$A x = \lambda x, \quad A^{\nu} x = \lambda^{\nu} x, \quad x^* A^{*\mu} = \bar{\lambda}^{\mu} x^* \quad (x^* = \bar{x}^T),$$