

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 25 (1970)
Heft: 5

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 16.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Diese letzte Tatsache legt die Frage nahe, ob es sogar eine Funktion $f \in \mathcal{F}[a, b]$ gibt, für die $\mathcal{H}[f]$ dicht ist in $[a, b]$. Bislang konnte ich jedoch dieses Problem nicht entscheiden.

Es mag noch eine Verallgemeinerung des beschriebenen Rekursionsverfahrens zur Gewinnung der F_k angegeben werden.

Dazu gehe man von einer streng monoton gegen Null konvergierenden Zahlenfolge a_l mit $a_1 = 1$ aus und definiere ausgehend von $F_0 = F$

$$F_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0 \\ \frac{1}{l} F_{k-1} \left(\frac{x - a_{l+1}}{a_l - a_{l+1}} \right) & \text{für } a_{l+1} \leq x \leq a_l \text{ und } l \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Die so gegebenen $\mathcal{H}[F_k]$ besitzen ganz analoge Eigenschaften wie im behandelten Fall $a_l = 1/l$. Ausserdem wächst $\mathcal{H}[F_k]$ für $k \rightarrow \infty$ «um so stärker» an, «je langsamer» a_l gegen Null konvergiert.

FRANÇOIS FRICKER, Basel

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] GELBAUM-OLMSTED, Counterexamples in Analysis (Holden-Day Inc., San Francisco 1964).

Kleine Mitteilungen

A New Condition for Consecutive Primitive Roots of a Prime

In [1] we have shown that if $p > 3$ is a prime such that $\varphi(p-1)/(p-1) > 1/3$ then there is at least one pair of consecutive primitive roots modulo p . In this note we shall give a new condition that there be consecutive primitive roots for primes of the form $4n+1$.

Theorem 1. If the prime $p = 4n+1$ has 2 as a primitive root then there is at least one pair of consecutive primitive roots modulo p .

Proof. If g is a primitive root of a prime p , then the congruence $gx \equiv 1 \pmod{p}$ has $x \equiv g^{p-2}$ for its unique solution; since $(p-2, p-1) = 1$, x is also a primitive root of p . If $p \equiv 1 \pmod{4}$, it is well known that if g is a primitive root of p , then so is $-g$.

Let $p = 4n+1$ be a prime and 2 a primitive root of p . Then -2 is also a primitive root and the congruence $(-2)g \equiv 1 \pmod{p}$, has a primitive root g for its solution. It follows then that $2(g+1) \equiv 1 \pmod{p}$, so that $g+1$ is also a primitive root of p .

The following theorem may also be of interest here.

Theorem 2. If the prime $p = 4n+1$ has exactly one pair of consecutive primitive roots, then 2 is a primitive root of p .

Proof. Let $0 < g < g+1 < p$ be consecutive primitive roots of p . Then $0 < p-(g+1) < p-g < p$ are also consecutive primitive roots of p . Since there is exactly one pair of consecutive primitive roots of p , we obtain $p-(g+1) = g$, or $(-2)g \equiv 1 \pmod{p}$. Thus -2 , and hence 2, is a primitive root of p .

EMANUEL VEGH, U.S. Naval Research Laboratory, Washington, D.C.

REFERENCE

- [1] E. VEGH, *Pairs of Consecutive Primitive Roots Modulo a Prime*, Proc. Am. Math. Soc. 79, 1169-1170 (1968).

A property of the Unitary Analogue of Ramanujan's Sum

A divisor $d > 0$ of the positive integer n is called unitary if $d\delta = n$ and $(d, \delta) = 1$. We write $d \parallel n$. For integers $a, b, b > 0$, let $(a, b)_*$ denote the greatest divisor of a which is a unitary divisor of b . ECKFORD COHEN ([1], § 2) defined the unitary analogue $c^*(m, n)$ of Ramanujan's Sum as

$$c^*(m, n) = \sum_{\substack{1 \leq x \leq n \\ (x, n)_* = 1}} e(mx, n), \quad (1)$$

where $e(m, n) = \exp(2\pi i m/n)$, and established that

$$c^*(m, n) \text{ is multiplicative as a function of } n, \quad (2)$$

$$\varphi^*(n) \equiv c^*(0, n) = \sum_{d \parallel n} d \mu^*(n/d), \quad (3)$$

$$\mu^*(n) \equiv c^*(1, n) = (-1)^r, \quad (4)$$

where r is the number of distinct prime factors of n .

Further, he established the following evaluation of $c^*(m, n)$:

$$c^*(m, n) = \sum_{\substack{d \mid m \\ d \parallel n}} d \mu^*(n/d). \quad (5)$$

In this note, we establish the following:

Theorem. $c^*(m, n) = \frac{\varphi^*(n) \mu^*(n/a)}{\varphi^*(n/a)}$, where $a = (m, n)_*$.

Proof. Since a is the greatest divisor of m which is a unitary divisor of n , we can write $n = aN$, where $(a, N) = 1$. By (5), we have

$$c^*(m, n) = \sum_{d \parallel a} d \mu^*(n/d) = \sum_{\substack{cd = a \\ (c, d) = 1}} d \mu^*(aN/d) = \sum_{\substack{cd = a \\ (c, d) = 1}} d \mu^*(cN).$$

Now, $(a, N) = 1$ and $cd = a$ imply that $(c, N) = 1$; so that by (2), (3) and (4),

$$c^*(m, n) = \sum_{\substack{cd = a \\ (c, d) = 1}} d \mu^*(c) \mu^*(N) = \mu^*(N) \sum_{d \parallel a} d \mu^*(a/d) = \mu^*(N) \varphi^*(a).$$

Since $n = aN$ and $(a, N) = 1$, $\varphi^*(n) = \varphi^*(a) \varphi^*(N)$, so that

$$c^*(m, n) = \frac{\varphi^*(n) \mu^*(N)}{\varphi^*(N)} = \frac{\varphi^*(n) \mu^*(n/a)}{\varphi^*(n/a)}.$$

Hence the theorem follows.

D. SURYANARAYANA, Andhra Univ. Waltair, India

REFERENCE

- [1] E. COHEN, *Arithmetical Functions Associated with the Unitary Divisors of an Integer*, Math. Zeit. 74, 66–80 (1960).

Aufgaben

Aufgabe 607. Sind X und Y Teilmengen einer Menge M , so definieren wir $X + Y$ durch $X + Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$, d.h. $X + Y$ besteht aus all den Elementen von M , die in X oder Y , jedoch nicht im Durchschnitt von X und Y liegen. Es sei nun M eine endliche Menge mit $|M| = n$ Elementen. Ferner sei k eine gerade ganze Zahl mit $2 < k \leq n - 1$. Zeige: Es gibt $n - 1$ Teilmengen B_1, \dots, B_{n-1} von M mit den Eigen-